Journal for History of Mathematics
Vol. 29 No. 5 (Oct. 2016), 295–314

http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2016.29.5.295

A Study on Various Properties of Tropical Plane Curves

열대평면곡선의 여러 가지 성질에 대한 연구

Kim Young Rock 김영록 Shin Yong-Su* 신용수

In tropical geometry, the sum of two numbers is defined as the minimum, and the multiplication as the sum. We learned that dynamic programming in tropical algebraic geometry can be used to find the shortest path in graphs. We have also learned about the Bézout's Theorem, which is a theorem concerning the intersections of tropical plane curves, and the stable intersection principle.

Keywords: tropical geometry, Fundamental theorem of Algebra, tropical plane curve, Bézout's theorem; 열대기하, 대수학의 기본정리, 열대평면곡선, 안정적 교차 원리, 베쥬정리.

MSC: 97U00 ZDM: N7

1 들어가며

열대대수에서 두 수의 합은 그들의 최솟값이 되고, 곱은 그들의 합이 된다. 이러한 대수적 구조는 열대준환 또는 최솟값-합 대수라고 알려져 있다. 최솟값을 최댓값으로 바꾸면 최댓값-합 대수를 얻을 수 있다 [3]. 형용사 '열대'는 프랑스 수학자 Jean-Eric Pin [5]에 의해서 처음 명명되었는데, 최적화 이론에 최솟값-합 대수를 선구적으로 사용한 브라질 동료 Imre Simon [6]의 업적에 대하여 이름 붙인 것이다. 형용사 '열대'에 더 이상 깊은 의미는 없다. 이것은 단순히 프랑스 사람들에게 브라질이 의미하는 것을 나타낸 것에 불과하다.

*Corresponding Author.

The first author was supported by Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Ministry of Education, Science, and Technology (2015R1D1A1A01059643). The second author was supported by a grant from Sungshin Women's University.

Kim Young Rock: Math. Edu., Graduate School of Edu., Hankuk Univ. of Foreign Studies
E-mail: rocky777@hufs.ac.kr

Shin Yong-Su: Dept. of Math., Sungshin Women's Univ. E-mail: ysshin@sungshin.ac.kr

Received on Sep. 1, 2016, revised on Oct. 27, 2016, accepted on Oct. 30, 2016.

대수기하학의 근원은 다변수 다항식 계의 해집합들을 연구하는 데 있다. 이러한 대상들은 대수다양체라고 불리며 이러한 예로서 익숙한 평면곡선들이나 3차원 공간 내의 곡면들을 들 수 있다. 열대준환 위에서의 다항식이나 유리함수들을 정의하는 것은 의미가 있다. 이러한 함수들은 부분적으로 선형이다. 또한, 대수다양체들은 열대대수에서도 정의되어질 수 있다. 그러므로 열대 대수기하학은 대수기하학에서 다루는 것들을 부분적으로 선형인 것으로 변환하여 다루고 있다.

이 연구에서는 열대 수학의 입문 과정에 대한 소개를 할 것이다. 열대준환에 관련된 기본 개념들에 대해 소개를 할 것이고, 열대 기하의 역사적 기원에 대해 소개할 것이며, 쉬운 예제를 통해 열대적 방법들이 대수, 기하, 조합 분야의 문제를 풀 때 어떻게 사용되어지는지에 대해 알아볼 것이다 [2].

2 산술

이 연구의 기본적인 대상은 열대준환(tropical semiring) $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \oplus, \odot)$이다. 집합으로서 이것은 단순히 실수 집합 $\mathbb{R}$에 무한대를 나타내는 원소 ∞가 추가된 것이다. 이 준환에서는 실수들의 덧셈과 곱셈 연산을 다음과 같이 다시 정의한다:

$$x \oplus y := \min(x, y), \quad x \odot y := x + y.$$

다시 설명하자면, 두 수의 열대합은 이들의 최솟값이고, 두 수의 열대곱은 이들의 덧셈이다. 이제부터 이러한 이상한 수체계의 산술을 하는 방법에 대해 알아보자. 4와 9의 열대합은 4가 되고, 4와 9의 열대곱은 13이 된다. 이것을 식으로 나타내면 다음과 같다:

$$4 \oplus 9 = 4, \quad 4 \odot 9 = 13$$

많은 친숙한 산술의 공리들은 열대수학에서도 여전히 유효하다. 예를 들어, 두 수의 덧셈과 곱셈 연산은 교환 가능하다:

$$x \oplus y = y \oplus x, \quad x \odot y = y \odot x$$

두 연산들에 대해 결합법칙이 성립하고, 곱연산 $\odot$이 합연산 $\oplus$보다 우선권을 가진다.

열대합과 열대곱에 대해서 결합법칙도 성립한다:

$$x \odot (y \oplus z) = x \odot y \oplus x \odot z.$$

열대 연산의 핵심적인 특징은 뺄셈이 없다는 것이다. 등식 $4 \oplus x = 13$이 어떤 해 x도 가질 수 없기 때문에 “13 빼기 4”라고 할 수 있는 실수 x가 없다. 열대 나눗셈은 전통적인 뺄셈으로 정의될 수 있어서 $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \oplus, \odot)$는 덧셈에 대한 역원의 존재성을 제외하고는 모든 환 공리(실제로는 체 공리)를 만족한다. 이러한 대상들을 준환(semiring)이라 하고, 열대준환이라 한다.

"0"은 열대곱셈에 대한 항등원이 된다. 예를 들어 열대 파스칼 삼각형은 다음과 같다:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & & & \\
 & & & 0 & & 0 & & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \\
0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots
\end{array}
$$

주어진 $d \times n$ 행렬 A에 대해 상 $\{A \odot x \ : \ x \in \mathbb{R}^n\}$과 다양한 b에 대하여 선형계 $A \odot x = b$를 푸는 것에 대해 관심이 있을 수도 있다. 관계있는 내용은 후속 연구에서 다룰 것이고, 열대선형계를 푸는 것에 대한 소개는 Baccelli, Cohen, Olsder, Quadrat [1]의 책 Synchronization and Linearity를 참조하면 된다.

컴퓨터과학 또는 이산수학을 전공하는 학생들은 그래프나 네트워크의 최단 경로들을 찾는 알고리즘들에서 열대행렬곱셈을 볼 수 있을 것이다. 이러한 알고리즘들의 일반적인 체계는 동적프로그래밍이라고 알려져 있다. 다음 절에서 이러한 것들을 알아 볼 것이다.

$x_1, x_2, \cdots, x_n$은 열대준환 $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \oplus, \odot)$의 원소들을 나타내는 변수들이라 하자. 단항식은 이러한 변수들의 반복이 허락되는 임의의 곱이다. 본 논문에서는 일반적으로 음의 정수 지수를 허용한다. 변수들의 곱은 위치를 바꿀 수 있으므로 다음과 같이 쓸 수 있다:

$$x_2 \odot x_1 \odot x_3 \odot x_1 \odot x_4 \odot x_2 \odot x_3 \odot x_2 = x_1^2 x_2^3 x_3^2 x_4$$

단항식은 $\mathbb{R}^n$에서 $\mathbb{R}$로 가는 함수를 나타낸다. 고전적인 연산으로 이 함수의 값을 구할 때 우리는 선형함수를 얻을 것이다:

$$x_2 + x_1 + x_3 + x_1 + x_4 + x_2 + x_3 + x_2 = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4$$

참고 2.1: 모든 정수계수 선형함수는 이러한 방식으로 얻을 수 있어서 열대단항식은 정확히 정수 계수를 가지는 선형함수이다.

열대다항식은 유한개의 열대단항식들의 일차결합들이다.

$$p(x_1, \cdots, x_n) = a \odot x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n} \oplus b \odot x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_n^{j_n} \oplus \cdots$$

여기에서 계수 $a, \ b, \ \cdots$는 실수들이고 지수 $i_1, \ j_1, \cdots$는 정수들이다. 모든 열대다항식은 $\mathbb{R}^n$에서 $\mathbb{R}$로 가는 함수를 나타낸다. 고전적인 연산으로 이 함수의 값을 구할 때 우리는 유한개의 선형함수들의 최솟값을 얻을 것이다:

$$p(x_1, \cdots, x_n) = \min(a + i_1 x_1 + i_2 x_2 + \cdots + i_n x_n, \ b + j_1 x_1 + j_2 x_2 \cdots + j_n x_n, \cdots)$$

이 함수 $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$는 다음과 같은 중요한 성질들을 가진다.

1. p는 연속이다.

2. p는 부분들의 개수가 유한일 때 부분마다 선형이다.

3. p는 볼록하다. 즉, $p\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geq \dfrac{1}{2}(p(x)+p(y)), \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

위의 세가지 성질을 만족하는 모든 함수는 유한개의 선형함수들의 최솟값으로 나타낼 수 있다.

도움정리 2.1: $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$는 연속적이고 위로 볼록이며 유한한 정수계수 다항식의 합으로 표현된 부분마다 선형인 함수이면 p가 $x_1, \cdots, x_n$의 열대다항식으로 나타내어질 수 있다.

증명. 열대다항함수 $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$는 선형함수들로 이루어진 유한집합의 최소값으로 주어진다. 예를 들어, $n = 3$일 때 p는 다음과 같이 주어진다.

$$p(x, y, z) \quad = \quad \bigoplus_{(i,j,k)} c_{ijk} \odot x^i \odot y^j \odot z^k \qquad (c_{ijk} \in \mathbb{Z}).$$

만약 $n = n$이라면, p는 다음과 같이 주어진다.

$$p(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad = \bigoplus_{(i_1, i_2, \cdots, i_n)} c_{i_1, i_2, \cdots, i_n} \odot x_1^{i_1} \odot x_2^{i_2} \odot \cdots \odot x_n^{i_n} \qquad (c_{i_1 i_2 \cdots i_n} \in \mathbb{Z}).$$

따라서, p는 $x_1, \ \cdots, \ x_n$으로 이루어진 열대다항식으로 나타내어질 수 있다. □

도움정리 2.2: n개의 변수 $x_1, \ \cdots, \ x_n$에 대한 열대다항식은 정확히 정수 계수들을 가지는 $\mathbb{R}^n$ 위의 부분마다 선형인 볼록한 함수들이다.

일변수 열대다항식들과 함수들을 알아보는 것도 좋은 공부가 될 것이다. 예를 들어, 일반적인 일변수 x에 대한 삼차다항식을 살펴 보자:

$$p(x) = a \odot x^3 \oplus b \odot x^2 \oplus c \odot x \oplus d \tag{1}$$

이 함수의 그래프를 $(x, \ y)$ 평면에 그리면 다음과 같은 4개의 직선이 됨을 알 수 있다:

$$y = 3x + a, \ \ y = 2x + b, \ \ y = x + c, \ \ y = d$$

$p(x)$의 값은 위의 4개의 직선 중 어느 하나 위에 있는 점 (x, y) 중 가장 작은 y 값이 된다. 즉, $p(x)$의 그래프는 4개의 직선들의 아래 부분이 된다. 만약

$$b - a \leq c - b \leq d - c \tag{2}$$

라면 4개의 직선 모두 함수의 그래프를 그리는 데 사용되어진다. 이러한 3개의 x값들은 함수 $p(x)$의 그래프의 선형이 깨지는 점이 되고, 삼차다항식은 세개의 일차항으로 인수분해된다:

$$p(x) = a \odot (x \oplus (b - a)) \odot (x \oplus (c - b)) \odot (x \oplus (d - c)).$$

그래프가 꺾이는 3개의 점은 이 삼차다항식의 근이라고 부를 수 있다. 이 부분에 대한 것은 Speyer와 Sturmfels의 논문을 참조하였다 [7].

모든 열대다항함수는 열대 선형함수들의 열대곱으로 유일하게 나타낼 수 있다. 즉, 대수학의 기본 정리가 열대적으로도 성립된다. 이 주장에서 우리는 함수라는 단어를 강조해야만

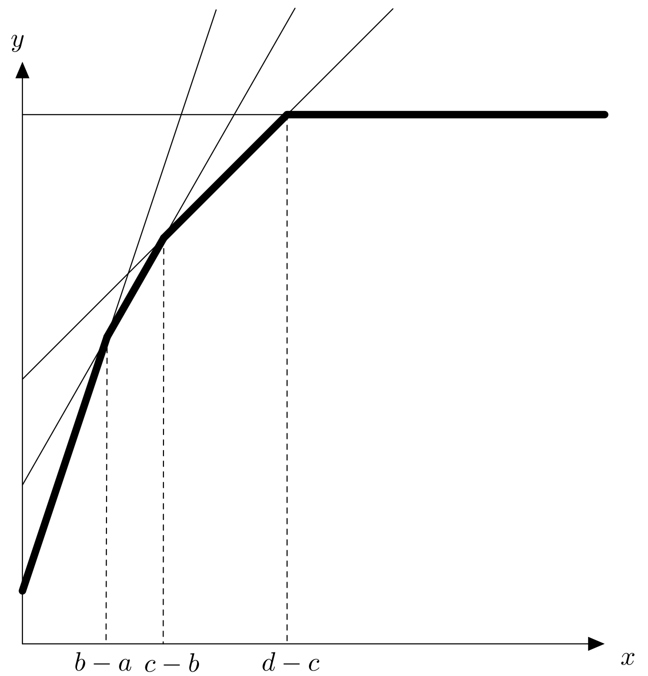


Figure 1. The graph and solution of a tropical cubic polynomial; 삼차다항식의 그래프와 해

한다. 서로 다른 다항식들이 같은 함수 $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$를 나타낼 수도 있다. 모든 다항식이 일차항들로 인수분해된다고 주장할 수는 없다. 그러나 모든 다항식을 일차항들로 인수분해될 수 있는 동형인 다항식으로 교체할 수 있다고 주장할 수 있다. 다음은 이차 다항함수와 일차 다항함수들로 유일하게 인수분해되는 예이다:

$$x^2 \oplus 17 \odot x \oplus 2 = x^2 \oplus 1 \odot x \oplus 2 = (x \oplus 1)^2$$

열대다항식들의 유일 인수분해는 일변수에 대해서는 성립하지만 이변수나 그 이상의 변수들에 대해서는 성립하지 않는다. 다음은 이변수 다항식 중에서 두개의 서로 다른 기약 인수를 가지는 예이다:

$$(x \oplus 0) \odot (y \oplus 0) \odot (x \odot y \oplus 0) = (x \odot y \oplus x \oplus 0) \odot (x \odot y \oplus y \oplus 0).$$

위 식을 기하적으로 해석해 보자. 다항식 $f(x, y)$의 뉴턴 다각형은 $f(x, y)$에 나타나는 $x^i y^j$에 대해서 (i, j)에 의해 만들어진 볼록다각형이다. 위 다항식의 뉴턴 다각형은 오각형이 된다. 이것은 2개의 삼각형의 합과 3개의 선분의 합으로 표현되어진다.

대수학의 기본 정리는 복소계수를 가지는 n차다항식은 반드시 복소수 근을 가진다는 것이다 [4]. 따라서 열대다항식에서의 대수학의 기본 정리는 n차 열대다항식은 열대적으로 반드시 n개의 근을 가진다는 것인데, n개의 근을 가지려면 열대다항식이 n개의 일차 열대 선형함수들의 열대곱으로 유일하게 나타내어져야 한다. 즉, 열대다항식에 있어서 대수학의

기본 정리를 증명하기 위해서는 모든 차수에 대해 열대다항식 $f(x)$가 일차 열대 선형함수들의 열대곱으로 유일하게 나타내어짐을 증명하여야 한다.

정리 2.3 (대수학의 기본정리: 열대기하 버전): n차 열대다항식은 열대적으로 반드시 n개의 근을 가진다

증명. 이차다항식 $f(x) = a \odot x^2 \oplus b \odot x \oplus c$를 고려해 보자. 이를 일반적인 계산으로 바꾸어 표현해 보면,

$$f(x) = \min(2x + a,\ x + b,\ c)$$

이를 평면에 그래프로 그려 보면,

$$y = 2x + a,\ y = x + b,\ y = c$$

이때, 다음 관계식이 성립한다면

$$b - a \le c - b$$

3개의 직선 모두 함수의 그래프를 그리는 데 사용할 수 있다. 이 2개의 x 값들이 함수 $f(x)$가 꺾이는 점들이다. 이를 기반으로 이차다항식 $f(x)$를 2개의 일차항으로 인수분해할 수 있다.

$$f(x) = a \odot (x \oplus (b - a)) \odot (x \oplus (c - a))$$

따라서 2개의 꺾인 점의 x좌표는 $f(x) = 0$의 근이다. 즉, 이차다항식은 열대 선형함수들의 열대곱으로 유일하게 나타낼 수 있다.

일반적인 일변수 x에 대한 삼차다항식을 고려해 보자.

$$f(x) = a \odot x^3 \oplus b \odot x^2 \oplus c \odot x \oplus d$$

이 함수의 그래프를 (x, y) 평면에 그리면 다음과 같은 4개의 직선이 됨을 알 수 있다.

$$y = 3x + a, y = 2x + b, y = x + c, y = d$$

$f(x)$의 값은 위의 4개의 직선 중의 어느 하나 위에 있는 점 (x, y)의 가장 작은 y값이 된다. 즉, $f(x)$의 그래프는 4개의 직선들의 아래 부분이 된다. 만약

$$b - a \le c - b \le d - c$$

라면 4개의 직선 모두 함수의 그래프를 그리는 데 사용된다. 이러한 3개의 x값들은 함수 $f(x)$의 그래프의 선형이 깨지는 점이 되고, 삼차다항식은 3개의 일차항으로 인수분해 된다:

$$f(x) = a \odot (x \oplus (b - a)) \odot (x \oplus (c - b)) \odot (x \oplus (d - c)).$$

그래프의 3개의 꺾인 점은 이 삼차다항식의 근이라고 부를 수 있다. 이렇듯, 삼차다항식은 열대 선형함수들의 열대곱으로 유일하게 나타낼 수 있다.

다음, $n-1$차다항식을 열대 선형함수들의 열대곱으로 유일하게 나타낼 수 있다고 가정하자.

$$f(x) = a_{n-1} \odot x^{n-1} \oplus \cdots \oplus a_1 \odot x \oplus a_0$$

즉, $f(x) = a_{n-1} \odot (x \oplus (a_{n-2} - a_{n-1})) \odot \cdots \odot (x \oplus (a_1 - a_2)) \odot (x \oplus (a_0 - a_1))$로, $a_i(i = 0, 1, \cdots, n-1)$가 유일하게 결정된다고 가정하자.

그렇다면, 이를 기반으로 n차다항식을 열대 선형함수들의 열대곱으로 유일하게 나타낼 수 있음을 증명하자. 새로 추가되는 항 $a_n \odot x^n$을 고려할 때, 맨 앞의 계수를 a_n으로 바꾸고 항 $x \oplus (a_{n-1} - a_n)$를 곱하면, 같은 열대 선형함수들의 열대곱 형태를 유지하면서 n차다항식 $f(x)$를 표현하는 것이 가능하다. 즉, 모든 차수에 대해 열대다항식 $f(x)$는 열대 선형함수들의 열대곱으로 유일하게 나타내는 것이 가능하다. 따라서 모든 차수의 열대다항식에 대해 대수학의 기본 정리가 성립한다. □

3 최단행렬 알고리즘

방향성이 있고 가중치가 부여된(weighted directed) 그래프 G를 잡자. 꺾인 점 n개에 대해 1, 2, $\cdots$, n이라고 이름을 붙이자. 양쪽 점이 i, j인 모서리의 이름은 ij이고 그 거리는 d_{ij}라 한다. 이때 그래프 G를 인접 행렬로 나타낸 것을 D_G라 한다.

$$D_G^{\odot n-1} = D_G \odot D_G \odot \cdots \odot D_G \tag{3}$$

명제 3.1: 방향성이 있고 가중치가 부여된 그래프 G와 D_G에 대해 ${D_G}^{\odot n-1}$의 (i,j)항 값은 i에서 j로 가는 최단거리이다.

증명. 점 i에서 최대 r개의 모서리를 지나 점 j로 가는 최단거리를 $d_{ij}^{(r)}$라고 정의하자. i에서 j로 가는 최단경로는 최단경로라는 정의에 의해 G의 각 모서리를 많아야 1번씩 지나며, 어떠한 최단경로도 $n-1$개보다 많은 모서리를 지나지 않는다. 따라서 점 i에서 점 j로 가는 최단거리는 $d_{ij}^{(r)}$와 같다.

또한 $r \geq 2$에 대해 이러한 최단거리의 경로에 대한 점화식을 얻는다.

$$d_{ij}^{(r)} = \min\{d_{ik}^{(r-1)} + d_{kj} \ : \ k = 1, 2, \cdots, n\} \tag{4}$$

열대 연산을 사용하여 위 식을 아래와 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} d_{ij}^{(r)} &= d_{i1}^{(r-1)} \odot d_{1j} \oplus d_{i2}^{(r-1)} \odot d_{i2} \oplus \cdots \oplus d_{in}^{(r-1)} \odot d_{nj} \\ &= (d_{i1}^{(r-1)}, d_{i2}^{(r-1)}, \cdots, d_{in}^{(r-1)}) \odot (d_{1j}, d_{2j}, \cdots, d_{nj})^T \end{aligned}$$

이제, r에 대한 수학적 귀납법을 사용하자. $d_{ij}^{(r)}$은 $n \times n$행렬의 i행 j열이다. 따라서 이 귀납식의 오른쪽 항은 $D_G^{\odot n-1}$의 i행 j열 원소의 열대곱이다. 그러므로 명제가 증명되었다. □

위의 알고리즘은 가중치가 주어진 양방향그래프에서 최단경로를 찾는 알고리즘으로 $Floyd\ Warshall$ 알고리즘이라고 알려져 있다. 또한 우리에게 있어서 이 알고리즘을 시행하는 것은 행렬의 곱셈($matrix\ multiplication$)을 하는 것을 의미한다.

$$D_G^{\odot r} \ = \ D_G^{\odot r-1} \odot D_G, \qquad r = 2, \cdots, n-1$$

예 3.2: G를 $n = 4$개의 꼭짓점$(node)$을 갖는 양방향 완전그래프라 하자.

$$D_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

이 행렬의 열대 제곱과 세제곱은 다음과 같다.

$$D_G^{\odot 2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad and \quad D_G^{\odot 3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$D_G^{\odot 3}$의 원소들은 그래프 G에서의 최단경로들의 길이를 의미한다.

열대계산$(tropical\ computation)$은 다음과 같이 일반적인 산수에서의 행렬의 곱셈을 반영한다. ϵ을 아주 작은 양의 실수를 나타내는 미정계수로 정의하자. 또한 $n \times n$ 행렬 $A_G(\epsilon)$의 i행 j열 원소가 단항식 $\epsilon^{d_{ij}}$이 되도록 정의하자. 예를 들어

$$A_G(\epsilon) = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon^1 & \epsilon^3 & \epsilon^7 \\ \epsilon^2 & 1 & \epsilon^1 & \epsilon^3 \\ \epsilon^4 & \epsilon^5 & 1 & \epsilon^1 \\ \epsilon^6 & \epsilon^3 & \epsilon^1 & 1 \end{pmatrix}$$

이라 하자. 일반적인 산술을 하여 이 행렬의 세제곱을 구하면 다음과 같다.

$$A_G(\epsilon)^3 = \begin{pmatrix} 1 + 3\epsilon^3 + \cdots & 3\epsilon + \epsilon^4 + \cdots & 3\epsilon^2 + 3\epsilon^3 + \cdots & \epsilon^3 + 6\epsilon^4 + \cdots \\ 3\epsilon^2 + 4\epsilon^5 + \cdots & 1 + 3\epsilon^3 + \cdots & 3\epsilon + \epsilon^3 + \cdots & 3\epsilon^2 + 3\epsilon^3 + \cdots \\ 3\epsilon^4 + 2\epsilon^6 + \cdots & 3\epsilon^4 + 6\epsilon^5 + \cdots & 1 + 3\epsilon^2 + \cdots & 3\epsilon + \epsilon^3 \cdots \\ 6\epsilon^5 + 3\epsilon^6 \cdots & 3\epsilon^3 + \epsilon^5 + \cdots & 3\epsilon + \epsilon^3 + \cdots & 1 + 3\epsilon^2 + \cdots \end{pmatrix}$$

$A_G(\epsilon)^3$의 i행 j열 원소는 ϵ에 대한 다항식으로 꼭짓점 i에서 j까지 가는데 많아야 3개의 모서리를 지나는 모든 경로들의 길이를 대표한다. 이 다항식에서 가장 차수가 낮은 항의 지수는 행렬의 열대 세제곱인 $D_G^{\odot 3}$의 (i, j)의 원소이다.

이것은 매우 일반적인 현상으로, 다음과 같이 요약할 수 있다.

$$\text{tropical} \quad = \quad \lim_{\epsilon \to 0} \log_\epsilon(\text{classical}(\epsilon)) \tag{5}$$

이렇게 기존의 산술을 열대적인 산술로 바꾸는 것을 열대화$(tropicalization)$라고 한다.

$D = (d_{ij})$는 대각선 성분이 0이며 나머지 성분은 양수인 대칭 $n \times n$ 행렬이다. 우리는 삼각부등식 $d_{ik} \leq d_{ij} + d_{jk}$가 모든 첨자 i, j, k에 대해 성립할 경우 D가 거리함수라고 한다.

도움정리 3.1: D가 거리함수일 필요충분조건은 $D \odot D = D$이다.

증명. $D \odot D$의 i행 j열 원소는 다음과 같다.

$$d_{i1} \odot d_{j1} \oplus \cdots \oplus d_{in} \odot d_{nj} = \min\{d_{ik} + d_{kj} : 1 \leq k \leq n\}.$$

문제 조건에 의해 우리는 $d_{ii} = d_{ii} \odot d_{ij} = d_{ij} \odot d_{jj} = d_{jj}$임을 알 수 있으며, 이것이 d_{ij}와 같을 필요충분 조건은 삼각부등식 $d_{ik} \leq d_{ij} + d_{jk}$가 모든 k에 대해 성립하는 것이다. $\square$

이제 우리는 추가적인 2개의 예시를 통하여 열대 산술 방법이 이산수학의 알고리즘들과 어떻게 자연스럽게 관련되는 지에 대해 알아볼 것이다. 첫번째 예제는 동적 프로그래밍이 정수 선형 프로그래밍($integer\ linear\ programming$)에 접근하는 것에 관련되어 있다. 정수 선형 프로그래밍 문제는 다음과 같다. $A=(a_{ij})$는 $d\times n$ 행렬로 a_{ij}는 음이 아닌 정수, $w=(w_1,\cdots,w_n)$은 실수 원소를 가지는 행벡터, $b=(b_1,\cdots,b_d)^T$는 음이 아닌 정수를 원소로 갖는 열벡터로 정의하자. 우리의 과제는 다음의 문제를 해결하는 음이 아닌 정수를 원소로 갖는 열벡터 $u=(u_1,\cdots,u_n)^T$를 찾는 것이다:

$$u\in\mathbb{N}^n \text{ 이고 } Au=b\text{를 만족하는 최소의 } w\cdot u \tag{6}$$

우리는 행렬 A의 모든 열들의 합과 같은 α와 $b_1+\cdots+b_d=m\alpha$인 것을 가정할 것이다. 이 가정은 $u_1+\cdots+u_n=m$을 만족하는 모든 해 $u\in\mathbb{N}^n$을 보장해주기 때문에 매우 편리하다.

우리는 이제 위의 문제를 다음과 같은 열대 산술을 이용하여 풀 수 있다. $x_1,\cdots,x_d$가 미정계수들이라고 하고 다음의 표현에 대해 생각해 보자.

$$w_1\odot x_1^{a_{11}}\odot x_2^{a_{21}}\odot\cdots\odot x_d^{a_{d1}}\oplus\cdots\oplus w_n\odot x_1^{a_{1n}}\odot x_2^{a_{2n}}\odot\cdots\odot x_d^{a_{dn}} \tag{7}$$

명제 3.3: 위 문제 *(6)*의 최적화 값은 열대다항식 *(7)*의 m제곱에 있는 단항식 $x_1^{b_1}x_2^{b_2}\cdots x_d^{b_d}$의 계수이다.

이 명제 3.3의 증명은 그다지 어렵지 않으며 명제 3.1의 증명과 비슷하다. 열대다항식의 m제곱을 취하는 과정은 어떤 적당한 그래프의 최단경로를 구하는 과정과 비슷하다. 바로 이것이 동적 프로그래밍이 정수 선형 프로그래밍으로 접근하는 것을 보여준다. 이러한 접근방식이 A의 정수들이 유한하다는 가정 아래 정수 선형 프로그래밍이 다항함수 시간이 걸리는 알고리즘이라는 것을 알려준다.

예 3.4: $d=2$, $n=5$, 그리고 식 *(6)*에서

$$A=\begin{pmatrix}4&3&2&1&0\\0&1&2&3&4\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix},\quad w=(2,5,11,7,3)$$

인 경우를 생각해 보자. 여기서 우리는 $\alpha=4$, $m=3$을 얻는다. 행렬 A와 벡터 w는 *(7)*의 열대다항식에 의해 다음과 같이 나타내어진다.

$$f \;=\; 2x_1^4\oplus 5x_1^3x_2\oplus 11x_1^2x_2^2\oplus 7x_1x_2^3\oplus 3x_2^4$$

이 다항식의 열대 세제곱은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}f\odot f\odot f=6x_1^{12}&\oplus 9x_1^{11}x_2\oplus 12x_1^{10}x_2^3\oplus 11x_1^9x_2^3\oplus 7x_1^8x_2^4\\&\oplus 10x_1^7x_2^5\oplus 13x_1^6x_2^6\oplus 12x_1^5x_2^7\oplus 8x_1^4x_2^8\\&\oplus 11x_1^3x_2^9\oplus 17x_1^2x_2^{10}\oplus 13x_1x_2^{11}\oplus 9x_2^{12}\end{aligned}$$

이 열대다항식에서 $x_1^5x_2^7$의 계수 12가 최적화 값이다. 따라서 이 정수 선형 프로그래밍 문제의 최적화 값은 $u=(1,0,0,1,1)^T$이다.

마지막 예는 $n \times n$ 행렬 $X = (x_{ij})$의 행렬식($determinant$)과 관계가 있다. 열대 산술에는 뺄셈이 없으므로 열대 행렬식은 열대 permanent이다, 즉, $\{1, 2, \cdots, n\}$ 위에서 정의된 $n!$개의 순열을 취하여 얻은 대각 곱셈들의 합이다.

$$\mathrm{tropdet}(X) := \bigoplus_{\pi \in S_n} x_{1\pi(1)} \odot x_{1\pi(2)} \odot \cdots \odot x_{n\pi(n)} \tag{8}$$

여기서 S_n은 $\{1, 2, \cdots, n\}$의 대칭군이다. 열대 행렬식을 구하는 것은 조합의 최적화에 대한 기존의 고전적인 할당문제를 푸는 것과 같다. n개의 직업과 n명의 노동자가 있는 한 회사를 생각해보자. 각각의 직업은 정확히 한명의 노동자를 필요로 한다. 직업 i를 노동자 j에게 할당하는 방법을 x_{ij}라고 하자. 이 회사는 가장 싼 할당방법 $\pi \in S_n$을 찾기를 원한다. 최선의 최소 비용은 다음과 같다.

$$\min \left\{ x_{1\pi(1)} + x_{2\pi(2)} + \cdots + x_{n\pi(n)} \ : \ \pi \in S_n \right\}$$

이 수는 정확하게 행렬 $Q = (x_{ij})$의 열대 행렬식과 같다.

명제 3.5: 열대 행렬식을 푸는 것은 할당 문제를 푸는 것과 같다.

4 평면곡선

열대다항식 $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$는 유한개의 선형 함수의 최솟값을 제공한다. 이 다항식의 최솟값이 적어도 두 개 이상 겹치는 모든 점들을 **초곡면**(*hypersurface*, $V(p)$)이라고 하자. 즉, 초곡면에서는 p가 직선 형태를 띄지 않는다.

예를 들어 $n = 1$이라 하고 p를 (1)에서의 다항식으로 놓자. (2)의 가정이 지켜진다면

$$V(p) = \{b - a, c - b, d - c\}.$$

따라서 초곡면 $V(p)$는 다항식의 해의 모임이라고 할 수 있다.

다양한 범위에서 고려되는 열대다항식의 예로 (8)에서 언급된 행렬식 함수 $p = \mathrm{tropdet}$이 있다. 이 식의 초곡면은 열대적으로 특이적 성질을 갖고 있는 $n \times n$ 행렬로 이루어져 있다. $n \times n$ 정사각형 행렬이 열대적으로 특이적 성질을 갖고 있다는 것은 n명의 사람에게 n개의 일을 배분할 때 드는 비용이 최소가 되도록 만드는 문제를 해결하기 위한 최선의 방법이 유일하지 않고 적어도 두 가지 이상 존재한다는 것이다.

이 절에서 변수를 두 개 가지는 다항식의 기하학에 대해 공부할 것이다.

$$p(x, y) = \bigoplus_{(i,j)} c_{ij} \odot x^i \odot y^j.$$

이에 대응하는 열대 초곡면 $V(p)$는 열대평면곡선이다. 다음 명제는 열대곡선의 두드러진 특징들을 요약해준다.

명제 4.1: $V(p)$ 곡선은 한정되어 있는 그래프로 $\mathbb{R}^2$ 평면에 그려진다. 이 곡선은 직선과 선분으로 이루어져 있는데 모든 선들의 기울기는 유리수 값을 가진다. 또한 이 그래프는 각각의 마디에서 평형조건을 충족한다.

마디에서 평형조건을 만족한다는 것은 그 마디에서 나온 선들의 기울기가 유리수이어야 하고 그 선들의 벡터의 합이 0인 것을 얘기한다.

이제부터 볼 것은 평면에 그려지는 '**직선**' 이다. 이것은 다음과 같이 다항식에서 정의된다.

$$p(x,y) \;=\; a \odot x \;\oplus\; b \odot y \;\oplus\; c, \quad a,b,c \in \mathbb{R}$$

이때 열대곡선 $V(p)$는 위 함수가 선형이 되지 않는 점 (x,y)로 이루어져 있다.

$$p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \min(a+x, b+y, c)$$

이 곡선은 평면 위의 한 점 $(c-a, c-b)$에서 북쪽, 남서쪽, 동쪽으로 뻗어나가는 3개의 반직선으로 이루어져 있다.

대부분의 경우 열대평면에서 두 직선은 단 한 점에서 만난다. 이는 Figure 2에 나타나 있다. 직선들이 특별한 위치관계에 있을 때, 집합론적인 교집합은 반직선이고, 이 경우에 안정적인 교집합은 유일한 교점을 갖게 된다. p는 x와 y로 표현되는 어떤 열대다

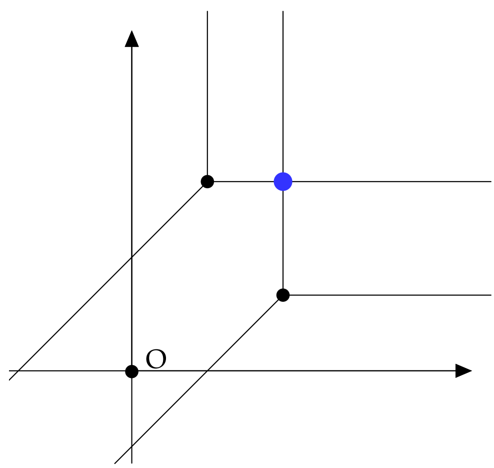


Figure 2. Two tropical lines in tropical planes meet at one point.; 열대평면에 있는 두 직선은 한 점에서 만난다.

항식이라 하자. 그리고 p의 항을 $\gamma \odot x^i \odot y^j$라 하자. 표준적인 산술 방법으로 이 항은 $(x,y) \mapsto \gamma + ix + jy$인 직선 함수를 표현한다. 이때 열대다항함수 $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$는 이러한 직선 함수들의 최솟값을 나타낸다. p의 그래프는 오목하고 부분적으로 직선 형태이다. 이 그래프는 평면 $\mathbb{R}^2$ 위에 덮여있는 텐트처럼 보인다. 열대곡선 $V(p)$는 그래프가 평평하지 않은 점을 평면 $\mathbb{R}^2$ 위에 사영한 것이다.

다음의 예를 통해 평범한 이차다항식에 대해 고려해보자.

$$p(x,y) \;=\; a \odot x^2 \;\oplus\; b \odot xy \;\oplus\; c \odot y^2 \;\oplus\; d \odot y \;\oplus\; e \;\oplus\; f \odot x$$

이때 계수 $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$가 다음 조건을 만족한다고 가정하자:

$$2b < a + c, \;\; 2d < a + f, \;\; 2e < c + f.$$

그러면 $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$의 그래프는 $\mathbb{R}^3$에서 6개의 평면의 아래쪽에 감싸져 있다. 이는 Figure 3에 나타나 있다. $V(p)$는 이 그래프의 모서리 부분에 대응하는 직선 함수로 이루어져

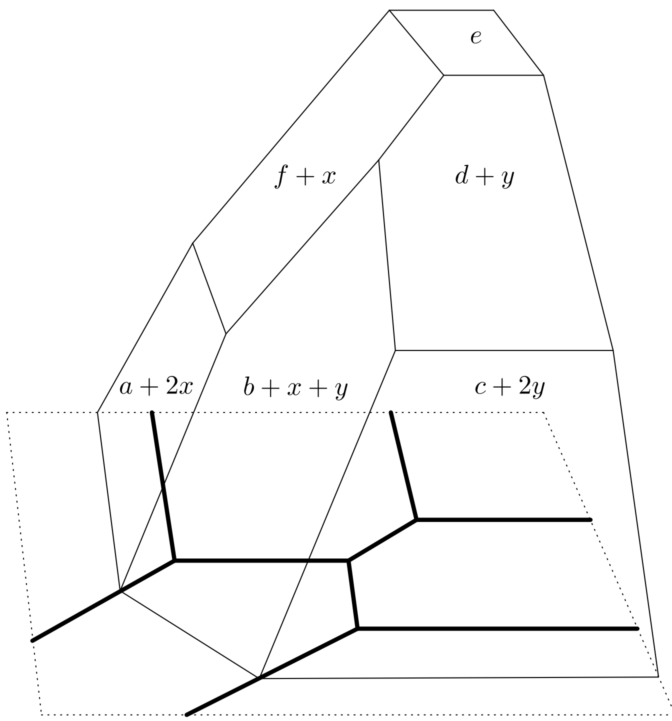


Figure 3. Tropical plane curve defined by tropical quadratic polynomial and its graph; 이차다항식에 의해 정의된 평면곡선과 그래프

있다. $V(p)$의 형태가 이차 열대곡선이다. 이 곡선은 4개의 꼭지점을 갖고 있고 3개의 선분과 6개의 반직선(2개는 동쪽, 2개는 북쪽, 2개는 남서쪽)으로 이루어져 있다.

만약 p가 열대다항식이라면 $V(p)$곡선은 뉴턴 다각형 'Newt(p)'의 분할곡선이다. 만약 분할되는 뉴턴 다각형이 '*unimodular triangulation*'이고 각각의 격자가 넓이가 $1/2$인 단위 삼각형으로 이루어져 있다면 $V(p)$를 매끈한 열대곡선이라고 부른다.

열대곡선 $V(p)$의 반직선은 뉴턴 다각형의 모서리와 수직한다. 예를 들어 만약 p가 사차다항식이라고 한다면 Newt(p)는 꼭지점이 $(0,0), (0,2), (2,0), (2,2)$인 정사각형 모양으로 이루어져 있고 $V(p)$는 각각의 모서리에 대해 두개의 반직선이 수직으로 뻗어나간다. Figure 4에 두가지 형태의 분할이 소개되어 있다.

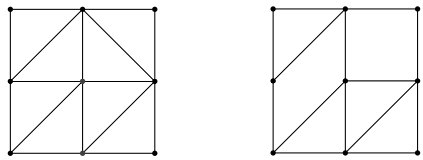


Figure 4. Two subdivisions of Newton polygon for double tropical quadratic curve; 이중 이차곡선의 뉴턴다각형의 두 가지 분할

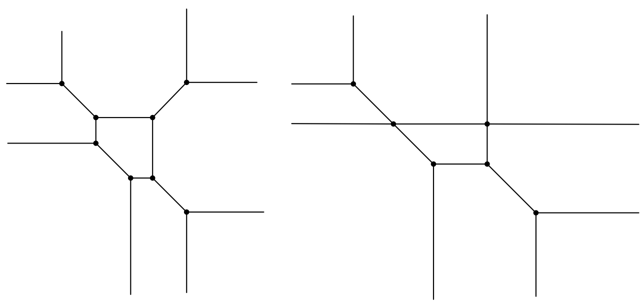


Figure 5. Two tropical quadratic curves: Left curve is a smooth curve.; 두 개의 열대 이중 이차곡선: 왼쪽 곡선은 매끄러운 곡선이다.

이에 대응되는 열대곡선은 Figure 5에 소개되어 있다. 왼쪽에 있는 곡선은 매끈하고 구멍을 하나 갖고 있다. 이 구멍은 Newt(p)에 내부에 있는 격자점 하나와 대응된다. 이것이 열대타원곡선의 예 중 하나이다. 오른쪽에 있는 곡선은 매끈하지 못하다.

만약 우리가 열대곡선을 평면에 그린다면 우리는 곡선들의 교차하는 점들의 수가 일반적인 대수곡선의 교차하는 점들의 수와 일치한다는 사실을 발견할 수 있다. 특히, 우리는 다음과 같은 사실들을 관측할 수 있다.

1. 일반적인 두 직선은 한 점에서 만난다. (Figure 2 참조)

2. 일반적인 두 점은 유일한 직선을 결정한다.

3. 직선과 이차곡선은 두 점에서 만난다.

4. 두 개의 이차곡선은 네 점에서 만난다. (Figure 6 참조)

5. 다섯 개의 일반적인 점은 유일한 이차곡선을 결정한다.

베쥬정리(Bézout's Theorem)로 알려진 대수기하학에서의 결과가 열대 대수기하학에도 유지되는 것을 알 수 있다. 이 정리를 주장하기 위하여 우리는 다수의 사실들을 소개해야

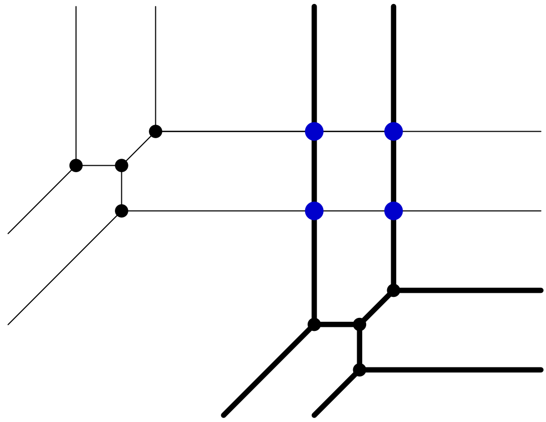


Figure 6. Bèzout's Theorem: Two quadratic curves meet at four points.; 베쥬정리: 두 이차 곡선은 네 점에서 만난다.

한다. 첫 번째로, 열대곡선의 모든 모서리는 다수의 양의 정수가 붙어있는것에 부속되어 있다. 내부 모서리의 임의의 점$(x,\ y)$는 항 $\gamma \odot x^i \odot y^j$의 최솟값에 도달한 값으로 간주된다. 이런 항들의 합은 어떤 범위에 있는 한 다항식이고, 다항식의 0이 아닌 해들의 개수는 의문시 되는 변들의 격자 길이와 같게 된다. 다음으로, 우리는 서로 다른 유리수 기울기를 가지는 임의의 두 직선에 대해 고려해보아야 한다. 그들 각각의 최초 방향 벡터를 $(u_1,\ u_2) \in \mathbb{Z}^2$와 $(v_1,\ v_2) \in \mathbb{Z}^2$라 하자. 그러면 두 직선의 유일한 교점에서 교점의 중복도는 바로 행렬식 $|u_1v_2 - u_2v_1|$이다.

이제 뉴턴 다각형이 $(0,0),\ (0,d)$, 그리고 $(d,0)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형인 열대곡선에 대해 보도록 하자. 이때 이 곡선은 '차수가 d인 곡선'이다. '차수가 d인 곡선'은 d개의 반직선을 갖고 있는데, 이 반직선들은 뉴턴 삼각형의 3개의 모서리와 수직하다.

C와 D가 $\mathbb{R}^2$ 위의 교차하는 2개의 열대곡선이라고 가정하자. 이때 모든 교점은 C와 D에 있는 유일한 변의 상대적 내부에 있다. 그 교점의 중복도는 변들의 중복도들과 교차 중복도 $|u_1v_2 - u_2v_1|$의 곱이 된다.

정리 4.1 (Bézout)**:** 곡선 C와 D가 각각 차수가 $c,\ d$인 $\mathbb{R}^2$ 위의 열대곡선이라 하자. 만약 두 곡선이 횡단하면서 만날 때, 위와 같이 중복도를 고려하면 교점의 개수는 $c \cdot d$와 같다.

고전적인 대수기하와 같이, 베쥬정리(Bézout Theorem)에서 '횡단하면서 만난다'라는 제한을 없애는 것이 가능하다. 실제로, 고전적인 대수기하와는 다른 중요한 현상때문에 상황은 더욱 좋아진다. 다시 말하자면, 교차들은 계수들의 완전한 매개변수공간을 계속해서 횡단하는 것이 가능하다.

이것을 차수가 각각 $c,\ d$인 $\mathbb{R}^2$ 위 두 곡선 C와 D의 교점을 이용해 설명해보자. C와

D의 교점이 직교하지 않거나, 유한하지 않다고 가정해보자. 가까이에 있는 임의의 곡선 C_ϵ, D_ϵ을 고르자. 이때, 이 두 곡선은 유한한 여러 개의 점에서 수직하게 만난다. 그러면, 정리 4.1의 정확한 셈에 의하면 교집합 $C_\epsilon \cap D_\epsilon$은 농도가 $c \cdot d$인 다중집합이다.

정리 4.2 (Stable Intersection Principle)**:** 교점 $C_\epsilon \cap D_\epsilon$의 배열의 극한은 변동들의 선택과는 독립적이다. 이것은 교집합 $C \cap D$에 포함된 $c \cdot d$개의 점들의 잘 정의된 다중집합이다.

ϵ의 극한 값이 0이라고 하자. 중복도는 점들이 충돌할 때 증가한다. 극한은 $\mathbb{R}^2$ 위의 중복도를 가진 점들의 유한 배열이다. 여기에서 중복도들의 합은 $c \cdot d$이다. 우리는 이 극한을 곡선 C와 D의 안정적 교차라고 부르고 이 점들의 다중집합은 다음과 같이 표기한다.

$$C \cap_{\text{st}} D = \lim_{\epsilon \to 0} (C_\epsilon \cap D_\epsilon).$$

그래서 베쥬정리(Bézout Theorem)의 기술을 다음과 같이 강화할 수 있다.

따름정리 4.3: $\mathbb{R}^2$의 차수가 c, d인 임의의 두 곡선들은 잘 정의된 $c \cdot d$개의 점들의 다중집합에서 안정적으로 교차한다.

안정적 교차 원리는 Figure 7, Figure 8에 설명되어 있다. Figure 7에서 일반적인 위치에서 특별한 위치로 움직이는 열대 직선과 열대 이차곡선의 교차를 볼 수 있다. 오른쪽 그림에서 두 곡선의 집합적인 교차는 무한집합이지만 안정적 교차는 잘 정의되어진다. 안정적 교차는 정확하게 두 점 A, B를 의미한다.

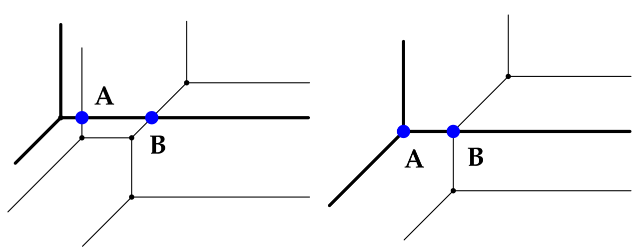


Figure 7. Stable intersection of line and quadratic curve; 직선과 이차곡선의 안정적 교차

Figure 8은 더욱 더 극적인 상황을 보여준다. 이 그림에서 이차곡선은 자기 자신과 안정적으로 교차된다. 이차곡선을 정의하는 이차다항식을 조금 움직이면 원래의 이차곡선들의 교차하는 4점 근방에 교차점들이 놓여진다는 것을 알 수 있다. 이로부터 이차곡선의 자기 자신과의 안정적 교차는 정확히 4개의 점으로 이루어진다는 것을 알 수 있다.

우리는 일반적인 데카르트 좌표계 상에서 임의의 5개의 점이 주어질 경우 이 5개의 점을 동시에 지나는 이차곡선이 존재하며, 유일하다는 것을 알고 있다. 이 사실은 열대기하의 좌표평면에서도 성립한다. 즉, 열대 좌표평면에서도 5개의 점이 주어질 경우 이를 동시에

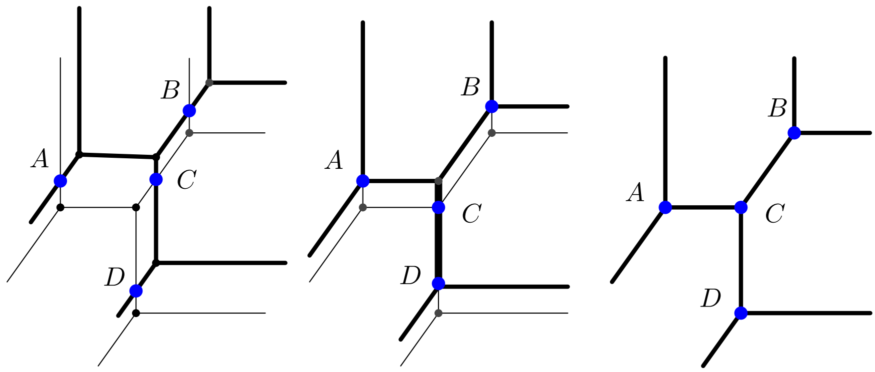
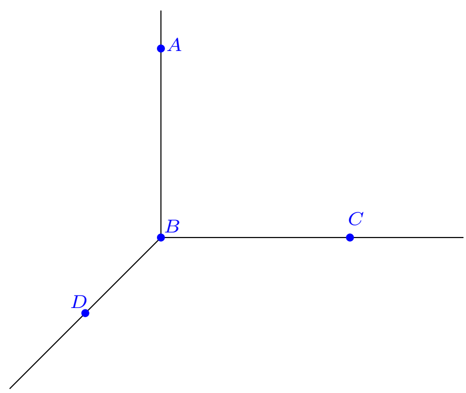


Figure 8. Stable self intersection of a quadratic curve; 이차곡선의 자기 자신과의 안정적 교차

지나는 이차곡선이 존재하며, 유일하다. 열대 좌표평면에서의 이차곡선의 기본적인 성질에 대해 알아보자.

도움정리 4.4: 열대 좌표평면 위의 임의의 두 점을 지나는 하나의 유일한 열대직선이 존재한다.

증명. 이 증명은 다음 그림으로 대신 할 수 있다.



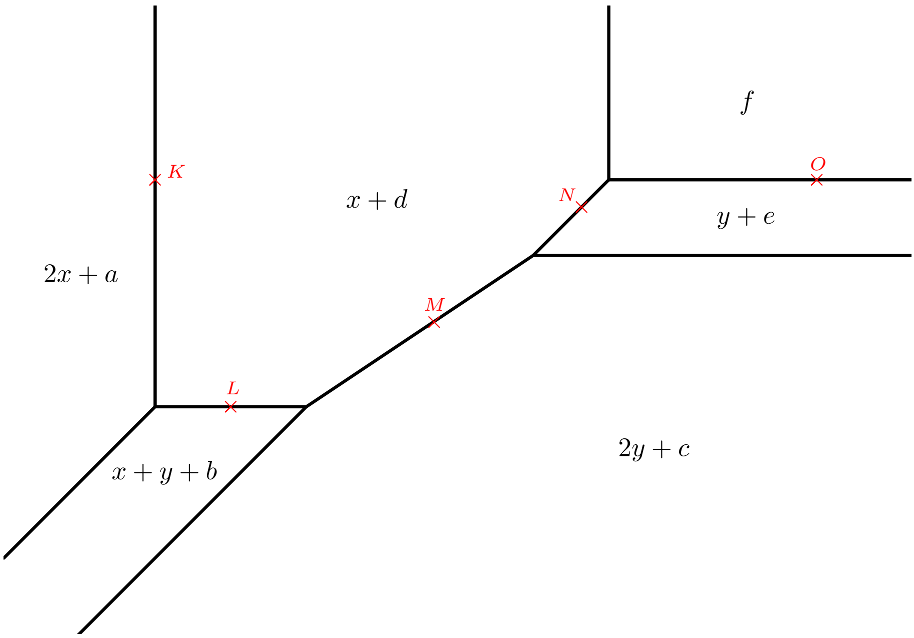
□

정리 4.5: 열대 좌표평면 위의 일반적인 5개의 점을 지나는 열대 이차곡선은 유일하게 존재한다.

증명. 다음과 같이 일반적인 열대 이차곡선을 잡자.

$$
\begin{aligned}
f_2(x,y) &= a \odot x^2 \oplus b \odot x \odot y \oplus c \odot y^2 \oplus d \odot x \oplus e \odot y \oplus f \\
&= \min(2x+a,\ x+y+b,\ 2y+c,\ x+d,\ y+e,\ f) = 0.
\end{aligned}
$$

한편, 열대 좌표평면에서 열대 이차곡선은 다음과 같은 개형을 가진다.



일반성을 잃지 않고, 위와 같이 5개의 점을 잡을 수 있다. 이때, 점 K와 L, L과 M, M과 N, N과 O가 각각 열대직선을 하나씩 결정한다. 위에서 얻은 조건식 $f(x,y) = \min(2x+a,\ x+y+b,\ 2y+c,\ x+d,\ y+e,\ f)$의 각 식은 위 그림의 6개 영역을 각각 하나씩 대표한다. 위와 같은 경우에 대해 우리는 5개의 점 각각에서 다음과 같은 식을 구할 수 있다.

$$x = d-a, \quad y = d-b, \quad 2y-x = d-c, \quad y-x = d-f, \quad y = e-f$$

열대 이차곡선의 정의로부터 하나의 식

$$f_2(x,y) = a \odot x^2 \oplus b \odot x \odot y \oplus c \odot y^2 \oplus d \odot x \oplus e \odot y \oplus f = 0$$

을 얻을 수 있으며, 열대 이차곡선의 미지 계수가 6개이므로 5개의 식을 더 필요로 한다. 열대 이차곡선이 지나는 점이 한 개 결정될 때마다 식이 한 개 결정되므로 열대 이차곡선 하나를 결정하기 위해서는 5개의 점만 결정되면 충분하다. (즉, a, b, c, d, e가 결정되면 나머지 f는 자동으로 결정되므로 5개의 점만 주어지면 된다.) 따라서 하나의 유일한 열대 이차곡선을 결정하기 위해서는 5개의 점이 주어지면 된다. □

열대기하에서 직선은 다음과 같이 표현된다:

$$f(x,y) = a \odot x \oplus b \odot y \oplus c = 0$$

이때, 미지계수가 3개이고, 직선의 정의에서 하나의 식이 주어져 있으므로 방정식의 해를 유일하게 결정하기 위해서는 2개의 식이 추가적으로 필요하다. 직선 위의 점이 하나 결정될

때마다 하나의 식이 추가적으로 주어지므로 열대 직선을 유일하게 결정하기 위해서는 두 개의 점만 주어지면 충분하다.

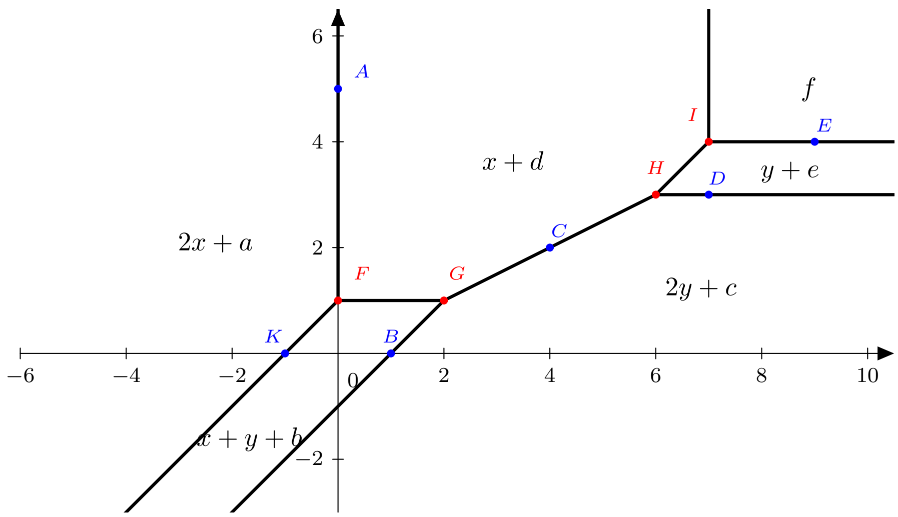
예 4.2: 우리는 $\mathbb{R}^2$에서 5개의 일반적인 점이 주어질 경우 이들을 모두 지나는 하나의 열대 이차곡선이 유일하게 결정됨을 알고 있다. 이때, $(0,5)$, $(1,0)$, $(4,2)$, $(7,3)$ 그리고 $(9,4)$를 지나는 열대 이차곡선의 식을 구하고 평면 $\mathbb{R}^2$에 나타내면 다음과 같다. 각 영역에 표시된 식은 그 영역에서 최소가 되는 식들이다. 영역간의 경계에서는 두 값이 일치해야 하므로, 우리는 다음과 같은 관계식을 얻는다:

$$f-d=7,\ f-e=4,\ e-c=3,\ d-b=1,\ d-a=0,\ d-c=0$$

따라서, 열대 이차곡선의 계수인 $a,\ b,\cdots,f$는 다음과 같다:

$$a=1,\ b=0,\ c=1,\ d=1,\ e=4,\ f=8$$

따라서, 우리는 위와 같이 열대 좌표평면 상의 특정한 5개의 점이 주어진 경우에 이 점들을 동시에 지나는 열대 이차곡선이 유일하게 존재함을 확인할 수 있다.



정리 4.6: 열대 좌표평면 상에서 9개의 일반적인 점을 동시에 지나는 열대 삼차곡선이 유일하게 결정된다.

증명. 일반적인 열대 삼차곡선의 식을 다음과 같이 잡을 수 있다.

$$f_3(x,y)=a_1x^3 \oplus a_2x^2 \odot y \oplus a_3x \odot y^2 \oplus a_4y^3 \oplus a_5x^2 \oplus a_6x \odot y \oplus a_7y^2 \oplus a_8x \oplus a_9y \oplus a_{10}=0$$

미지의 계수가 10개이고, 현재 한 개의 식이 주어져 있는 상황이므로, 9개의 식이 추가적으로 필요하다. 한 점이 주어질 때마다 하나의 식이 생기므로, 열대 삼차곡선 하나를 결정하기 위해서는 9개의 점이 주어져야 한다. 즉, 하나의 유일한 열대 삼차곡선 하나를 결정하기 위해서는 9개의 점만 주어지면 충분하다. □

정리 4.7: 열대 좌표평면 상에서 유일한 하나의 n차 곡선을 결정하기 위해 필요한 점의 개수 $P(n)$은 다음과 같다.

$$P(n) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$$

증명. 1. 열대 이차곡선 하나를 유일하게 결정하기 위해 필요한 점의 개수는 5개이다.

2. 열대 삼차곡선 하나를 유일하게 결정하기 위해 필요한 점의 개수는 9개이다.

이를 토대로 열대 n차곡선 하나를 유일하게 결정하기 위해 필요한 점의 개수를 $P(n)$이라 하면, 다음을 유추할 수 있다.

$$P(n) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$$

이제, 수학적 귀납법을 이용하여 우리가 유추한 식이 옳음을 보이자.

1. 열대 이차곡선 하나를 유일하게 결정하기 위해 필요한 점의 개수는

$$P(2) = \frac{3 \cdot 4}{2} - 1 = 5$$

개이다.

2. 열대 $n-1$차곡선 하나를 유일하게 결정하기 위해 필요한 점의 개수를

$$P(n-1) = \frac{n(n+1)}{2} - 1$$

라고 가정하자.

3. 일반적인 열대 n차곡선의 식을 다음과 같이 잡을 수 있다.

$$f_n(x,y) = \bigoplus_{i=0}^{n} \bigoplus_{j=0}^{i} a_{i,j} x^j \odot y^{i-j} = \bigoplus_{i=0}^{n} a_i x^i \odot y^{n-i} \oplus f_{n-1}(x,y)$$

2에서 f_{n-1}를 유일하게 결정하기 위해 필요한 점의 개수가 $P(n-1)$이었으며, 앞에 $n+1$개의 미지 계수가 추가되었으므로 $P(n)$을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$P(n) = P(n-1) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} - 1 + (n+1) = \frac{n(n+1)+2n}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2} - 1$$

$$\therefore P(n) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$$

□

감사의 글 보다 좋은 논문을 위해 성심어린 가르침과 충고를 해주신 심사위원들께 감사의 마음을 전합니다.

References

1. François Louis BACCELLI, Guy COHEN, Geert Jan OLSDER, and Jean- Pierre QUADRAT, *Synchronization and linearity*, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1992. An algebra for discrete event systems.

2. I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, and A. V. Zelevinsky, *Discriminants, resultants and multidimensional determinants*, Modern Birkhäuser Classics. Birkh¨auser Boston Inc., Boston, MA, 2008. Reprint of the 1994 edition.
3. Ilia Itenberg, Gregory Mikhalkin, and Eugenii Shustin, *Tropical Algebraic geometry*, Birkhauser, 2009.
4. Diane Maclagan and Bernd Sturmfels *Introduction to Tropical Geometry*, Graduate Studies in Mathematics 161, Americal Mathematical Society, 2015.
5. Jean-Eric Pin, Tropical semirings, In *Idempotency* (Bristol, 1994), volume 11 of Publ. Newton Inst., 50–69. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.
6. Imre Simon, Recognizable sets with multiplicities in the tropical semiring, *In Mathematical foundations of computer science*, 1988 (Carlsbad, 1988), volume 324 of Lecture Notes in Comput. Sci., 107–120, Springer, Berlin, 1988.
7. David Speyer and Bernd Sturmfels, Tropical Mathematics, *Mathematics Magazine* 82(3) (2009), 163–173.