

데이터플로우 기법이 적용된 OMP 알고리즘의 HDL 구현

I. 서론

압축센싱은 낮은 속도의 ADC를 사용할 수 있으며, 산재된 신호를 복원하는데 효과적인 것으로 연구되어왔다. 신호의 산재한 특성은 생체 신호, 의료영상, 레이더 신호등에서 발견되며 하드웨어로 구현하려는 많은 시도가 있었다^[1-2]. MP(Matching Pursuit) 알고리즘은 반복적으로 현재의 신호 추정치와 가장 상관도가 큰 측정행렬의 열을 추출하는 방식으로, 연산복잡도가 낮아, 산재된 신호 복원과 구현에 널리 사용되어왔다. 그러나 MP를 이용한 신호 복원은 신호의 산재한 정도가 매우 큰 경우에 효과적이며, 긴 연산 시간이 필요하다는 제약들이 있다. 이러한 문제를 극복하기 위해 OMP(Orthogonal Matching Pursuit)가 제안되었다^[3]. MP의 경우 마지막 단계에서만 Least Square가 수행되는 것이 비해, OMP는 매 반복문마다 Least Square 단계가 포함되면서, 반복문의 횟수가 크게 줄어든 알고리즘이다^[5]. Least Square 때문에 반복문 당 복잡도는 증가하였지만, 연산시간은 크게 감소하였다. OMP 알고리즘의 연산 복잡도가 증가되는 이유는 내적기(행렬 곱셈), 비교기 그리고 신호복원을 위한 역행렬기가 사용되기 때문이다. 그러므로 OMP를 구현하기 위해서, OMP의 큰 연산 복잡도를 어떻게 다룰 것인지 결정하는 것이 중요한 문제가 된다.

1장에서는 OMP 알고리즘을 구성하는 세부 연산장치들을 소개하며, 2장에서는 신호 복원 모듈에 사용되는 역행렬방식과 대입방식의 연산 복잡도를 비교한다. 3장에서는 복원 모듈의 연산시간을 절감하기 위한 파이프라인 방식의 누적 장치를 묘사하며, 4장에서는 제안하는 데이터플로우 구조의 효과에 대해 알아본다. 실험에서는 제안된 구조의 동작을 확인하고, 성능을 분석한다.



서근수
광주과학기술원
전기전자컴퓨터공학부



윤의현
광주과학기술원
전기전자컴퓨터공학부



이민재
광주과학기술원
전기전자컴퓨터공학부



II. 본론

1. OMP 알고리즘

압축센싱 문제 중에서 수신하고자하는 신호의 열(column)의 개수가 2개 이상인 경우를 MMV문제라고 한다. 더 높은 차원으로 확장된 형태의 MMV문제는 1차원의 SMV보다 산재된 신호를 발견하는데 더 효과적인 것으로 연구되어 왔다^[4].

$Y \in R^{M \times L}$ 는 관측행렬로 수신단에 잡음(n)을 추가하여 식 (1)과같이 모델링할 수 있다.

$$Y = \Phi X + n \quad (1)$$

$X \in R^{N \times L}$ 는 송신된 신호로 반송파 주파수가 알려지지 않은 산재된 신호(sparsed signal)이다. $\Phi \in R^{M \times N}$ 는 측정행렬이라고 하며, 광대역의 수신대역을 균등 분할하여 생성된 슬라이스들에 대해서 각각 다른 이득 및 위상정보를 갖는다.

<표 1>은 대입방식이 적용된 OMP 알고리즘 나타낸다. 최초로 관측행렬 Y를 입력받은 이후에 산재된 위협 신호를 모두 발견하는 조건이 될 때까지 반복문을 수행한다. OMP는 크게 최적화(Optimization) 문제와 최소자승법(Least Square) 문제로 구분할 수 있다.

최적화 문제는 Residue와 상관성이 가장 큰 밴드 위치(support)를 검색하는 단계로 OMP 반복문마다 새로운 support를 추출하는 기능을 하며, <표 1>의 1번부터 4번

단계에 해당한다. 최소자승법 문제는 수신데이터(Y)와 계산으로 추정하는 데이터(\hat{Y})간 오차(r)를 줄여가며, 근사하는 이론으로 <표 1>의 6번부터 9번에 해당한다.

OMP 연산을 구성하는 세부 알고리즘은 다음과 같다. 단계 1은 식 (1)의 양 변에 Φ^T 를 곱하는 연산으로, 식의 좌변은 상관행렬 W(correlation matrix)로 표현된다. 이때 사용되는 측정행렬은 OMP 반복문에서 고정되지만, 추정치가 실제와 유사해짐에 따라 측정오차 r은 반복문마다 작은 값으로 갱신된다.

$$W = \Phi^T r_{i-1} \quad (2)$$

첫 번째 OMP 반복문에서 r_0 는 관측행렬 Y가 되며, 이후에는 이전 OMP 반복문에서 계산되는 측정오차(r_i)로 대체된다.

단계 2와 3은 상관행렬 W를 간소화하는 모듈로 l_1 norm 방식으로 계산된다. 일반적인 l_p norm을 계산하는 방식은 식 (3)과 같은데, l_1 norm(p=1)은 l_2 norm(p=2)과 달리 루트 연산이 발생하지 않기 때문에 계산이 간편하다.

$$\|x_p\| = \sqrt[p]{\sum_i |x_i|^p} \quad (3)$$

복소수 형인 상관행렬은 각각의 원소에 절댓값이 취해진 후, 단일 열벡터 W_V 로 축소된다.

단계 4는 전체 수신대역과 일치하는 슬라이스 중에서 최대 상관을 가지는 위치를 검색하는 함수이다.

$$\operatorname{argmax} W_V(k) \quad (4)$$

식 (4)에서, 최댓값을 검색하기 위해 비교해야 할 슬라이스의 개수를 k라고 했을 때, 인접한 두 개의 원소끼리 크기를 비교하여 하나가 살아남는 토너먼트 방식으로 최댓값을 발견한다. k가 $2^m < k \leq 2^n$ 의 범위에 존재할 때, n bit의 index가 각각의 데이터에 삽입되며, 최댓값을 출력하기까지 n번의 비교 단계가 수행된다.

단계 5는 식 (5)와 (6)과 같이 묘사된다. 전체 측정행렬 Φ 중에서 단계 4로부터 발생한 최댓값의 위치와 이것과 일치하는 열만을 선택적으로 수집한다. 구성행렬 $\tilde{\Phi}_i \in R^{M \times K}$ 는 이전 결과($\tilde{\Phi}_{i-1}$)에 현재 발견되는 열(Φ_{A_i})

<표 1> 대입방식의 OMP 알고리즘

| |
|---|
| 입력 : $Y \in R^{M \times L}$, $\Phi \in R^{M \times N}$, $\tilde{\Phi} \in R^{M \times K}$, $r_0 = Y$ |
| 출력 : $X \in R^{N \times L}$ |
| 발견된 Support 개수 : K |
| Step .1 Make correlation matrix $W = \Phi^T r_{i-1}$ |
| Step .2 Absolute $W = W_{COMP} \rightarrow W \in R^{N \times L}$ |
| Step .3 Compress matrix to vector $ W \rightarrow W_V \in R^{N \times 1}$ |
| Step .4 Find index corresponding to maximum value in the row elements, $\operatorname{argmax} W_V$ |
| Step .5 Update sub-measurement matrix and index set $\tilde{\Phi}_i = [\tilde{\Phi}_{i-1} \Phi_{\lambda_i}]$, $A_i = A_{i-1} \cup \lambda_i$ |
| Step .6 Compose symmetric matrix and sub-correlation matrix \tilde{W} |
| Step .7 LD decomposition $C \rightarrow L, D$ |
| Step .8 Forward/Backward Substitution $L, D \rightarrow r \rightarrow \tilde{X}$ |
| Step .9 $r_i = Y - \tilde{Y}$, and repeat 1) until stop criteria |



을 누적하여 구성된다.

$$A_i = A_{i-1} \sqcup \lambda_i \quad (5)$$

$$\tilde{\Phi}_i = [\tilde{\Phi}_{i-1}, \Phi_{A_i}] \quad (6)$$

결과적으로, 우리의 문제를 주어진 식보다 미지수가 더 많은 underdetermined system에서 수학적 해석이 가능한 overdetermined system으로 변환한다.

단계 7은 행렬 L(lower)과 D(diagonal)를 계산하는 모듈로, 이번 논문에서는 기존의 Cholesky(LD) 분해에서 제공된 연산이 없는 변형된 형태의 Cholesky(LD) 분해를 이용하여 구현하였다^[5]. 변형된 Cholesky 분해는 L과 D로 대칭행렬 C를 분해할 수 있으며, 다음의 식 (7)과 (8)같이 표현된다. 입력 행렬 C가 복소수 형이기 때문에, 일반 전치(transpose)연산이 아닌 쥘레(conjugation) 연산이 포함된 허미션전치(hermitian transpose)가 수행된다.

$$C = LDL^H$$

$$L_{i,j} = \frac{1}{D_{j,j}} [C_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} (L_{i,k} \overline{L_{j,k}} D_{k,k})], \quad i > j \quad (7)$$

$$L_{i,j} = 1, \quad i = j$$

$$D_{i,j} = C_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} (L_{i,k} \overline{L_{j,k}} D_{k,k}), \quad i = j \quad (8)$$

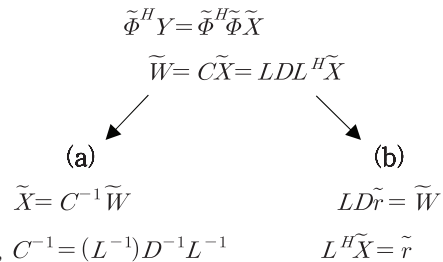
단계 8번에서는 전/후진 대입(Forward/Backward substitution)을 이용하여, 탐지하고자 하는 신호 \tilde{X} 를 계산한다. 기존의 연구에서는 신호 \tilde{X} 를 발견하기 위해서, C^{-1} 를 계산했지만^[5], Cholesky 역행렬에서 수행되는 LD 역, 행렬 곱 과정에서 시간 및 하드웨어 소요가 크다는 문제가 있다. 이에 이번 논문에서는 전/후진 대입 방식으로 신호 \tilde{X} 를 복원한다.

단계 9번에서는 다음 연산에 필요한 측정오차 r (residue)을 계산한다. 측정오차는 최소자승법에 따라, 실제 수신데이터(Y)와 계산으로 추정하는 수신데이터 ($\tilde{Y} = \tilde{\Phi} \tilde{X}$) 간 오차로 나타나며, OMP가 수행되면서, 이 값은 점차 줄어드는 경향으로 나타난다.

$$r_i = Y - \tilde{Y} = Y - \tilde{\Phi} \tilde{X} \quad (9)$$

2. 신호 복원 방식의 비교

본 논문에서 제시된 전/후진대입 방법은 기존에 사용하는 의사역행렬을 이용한 신호 복원 방법에 비해 연산 시간 및 복잡도가 낮은 장점이 있다.



<표 2>에서는 각각의 신호 복원 연산에서 사용되는 곱셈기의 개수를 비교한다. 연산 복잡도를 비교하기 위해 가장 비중이 큰 곱셈기의 개수를 나타내었다. 연산 복잡도에서 차이가 크게 발생하는 이유는 대입방식과 달리, 역행렬 방식에서는 행렬 곱셈과정이 두 차례 포함되기 때문이다. 본 실험에서 사용된 파라미터(K=12(최대), M=32, L=16)를 적용하면, 곱셈기는 역행렬방식에서 15K 개, 대입방식에서 3.7K 개가 사용된다. 같은 신호 \tilde{X} 를 얻기 위한 연산임에도 불구하고, 복잡도(곱셈기)는 4.06배 만큼 차이가 나게 된다.

3. 파이프라인 구조의 누적(Σ) 연산 장치

신호 복원에 사용되는 LD 분해 및 대입방법은 이전 결과를 사용하여 현재 결과를 얻는 메모리가 있는 누적시스템이다. 따라서 연속된 데이터를 한 개 주기 동안 출력하기 어렵다. 식 (10)에서 파이프라인이 적용된 LD분해의 동작을 소개한다^[5]. 예를 들어 LD 분해의 4번째 행(i=4)

<표 2> Cholesky 역행렬방식과 대입방식에서 사용되는 곱셈기의 개수

| (a) 역행렬방식 | | (b) 대입방식 | |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 1. L, D | $\frac{K^3 - K}{3}$ | 1. L, D | $\frac{K^3 - K}{3}$ |
| 2. L^{-1}, D^{-1} | $\frac{K^3 - K}{6}$ | 2. 전진대입 \tilde{r} | $(K-1)KL$ |
| 3. 행렬곱, C^{-1} | $2K^3$ | 3. 후진대입 \tilde{X} | $\frac{(K-1)KL}{2}$ |
| 4. 행렬곱, \tilde{X} | $K^2M + KML$ | | |

을 계산하는 경우, D_{44} 를 얻기 위해서 바로 이전 원소 L_{43} 을 계산한 후, 각각 $d_{44}=C_{44}$, $d_{44}=d_{44}-L_{41}L_{41}D_{11}$, $d_{44}=d_{44}-L_{42}L_{42}D_{22}$ 에서 그리고 $D_{44}=d_{44}-L_{43}L_{43}D_{33}$ 에서 1개 씩 총 4개의 주기를 소비한다. 그러나 <표 3>에서처럼 각각의 열(column)마다 별도의 연산장치를 가지고 계산을 수행하면, L_{43} 과 동시에 마지막의 d_{44} 를 미리 계산하기 때문에 마지막 4T에서만 1개 주기를 소비한다. 결과적으로 LD분해의 모든 원소들은 $j=1$ 에서 초기값 C_{ij} 가 모든 개별 장치에 입력되고, 매 주기마다 해당하는 원소가 출력된다.

$$L_{41} = \frac{C_{41}}{D_{11}} \quad (10.a)$$

$$L_{42} = \frac{1}{D_{22}}(C_{42} - L_{41}L_{21}D_{11}) \quad (10.b)$$

$$L_{43} = \frac{1}{D_{33}}((C_{43} - L_{41}L_{31}D_{11}) - L_{42}L_{32}D_{22}) \quad (10.c)$$

$$D_{44} = (((C_{44} - L_{41}L_{41}D_{11}) - L_{42}L_{42}D_{22}) - L_{43}L_{43}D_{33}) \quad (10.d)$$

파이프라인에 따른 시간절감과 복잡도 증가는 <표 4>와 같다. 첫 번째 열($j=1$)을 제외한 나머지 열에서 독립적으로 연산장치를 사용하기 때문에 연산 복잡도는 $K-1$ 배 증가하지만, LD분해 원소 한 개를 구하기 위해서 연산 주기가 $K-1$ 개 씩 소비되었던 것을 1개 주기로 줄였기 때문에 시간이 절감되는 효과가 있다.

한편, 전/후진대입의 출력인 r 과 \tilde{X} 은 다음과 같은 방식 (11), (12)로 유도되며, 메모리가 있는 누적연산을 가지는 공통점이 있어, 위에서 제시된 LD 분해와 유사한 파이프라인 구조로 설계될 수 있다.

<표 3> 파이프라인 구조의 LD 분해의 예($i=4$)

| | 1T($k=0$) | 2T($k=1$) | 3T($k=2$) | 4T($k=3$) |
|----------|-------------------|---|---|---------------------------------|
| L_{41} | $\frac{C}{D}$ | | | |
| L_{42} | $l_{42} = C_{42}$ | $\frac{1}{D_{22}}(l_{42} - L_{41}L_{21}D_{11})$ | | |
| L_{43} | $l_{43} = C_{43}$ | $l_{43} = (l_{43} - L_{41}L_{31}D_{11})$ | $\frac{1}{D_{33}}(l_{43} - L_{42}L_{32}D_{22})$ | |
| D_{44} | $d_{44} = C_{44}$ | $d_{44} = (d_{44} - L_{41}L_{41}D_{11})$ | $d_{44} = (d_{44} - L_{42}L_{42}D_{22})$ | $(d_{44} - L_{43}L_{43}D_{33})$ |

<표 4> 파이프라인 구조로 구성된 LD분해의 연산복잡도와 시간소비

| | 기존 | 파이프라인 |
|------|-------------------|--------------------|
| 복잡도 | 1 | $K-1$ |
| 연산시간 | $\frac{K^3-K}{6}$ | $\frac{K(K+1)}{2}$ |

$$\tilde{r}_i = \frac{\tilde{W}_i - \sum_{k=1}^{i-1} (L_{i,k}D_{k,k}\tilde{r}_k)}{D_{i,i}} \quad (11)$$

$$\tilde{X}_i = \tilde{r}_i - \sum_{k=1}^{M-i} (L'_{i,M-k+1}\tilde{X}_{M-k+1}) \quad (12)$$

식 (11),(12)는 1차원 열벡터 기준이며, MMV 환경에서는 같은 장치를 L 배만큼 병렬로 두어 구성한다.

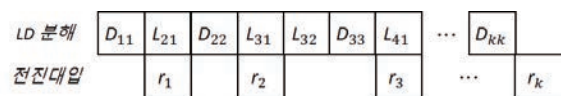
4. 데이터플로우 기술이 적용된 신호 복원 장치

본 논문에서 제안하는 하드웨어 구조는 위에서 소개된 파이프라인구조의 LD분해와, 전진대입 모듈 간 데이터플로우(Dataflow)를 적용하는 방식이다. 데이터플로우란 일종의 파이프라인인데, 단일 연산에서 복수의 장치를 사용하여 연산시간을 줄이는 파이프라인 이론에서 확장하여, 다른 종류의 연산과 유기적으로 파이프라인되는 것을 말한다.

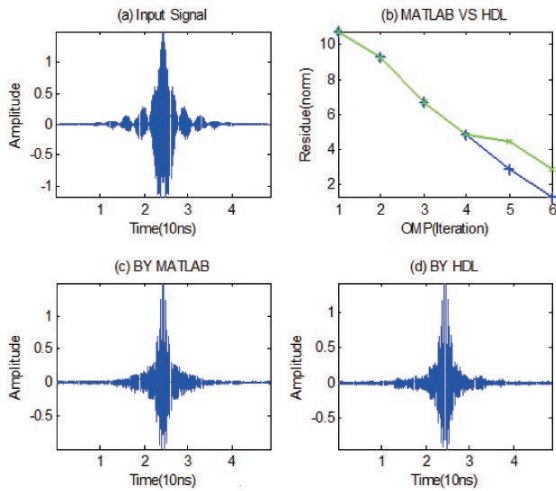
<그림 1>은 데이터플로우를 설명하는 그림이다. LD분해로부터 D_{11} 이 출력되고, 다음 원소인 $L_{21} = \frac{C_{21}}{D_{11}}$ 이 계산되는 동시에, 전진대입의 $r_1 = \frac{\tilde{W}_1}{D_{11}}$ 이 계산될 수 있다. 전진대입 $r_2 = \frac{\tilde{W}_2 - L_{21}D_{11}r_1}{D_{22}}$ 는 분모에서 D_{22} 가 필요하기 때문에 LD분해 두 번째 행($i=2$)가 모두 계산되고 다음 한 주기 동안에 계산된다. 일반적으로 각 행의 모든 LD분해가 종료되고 다음 한 개 주기에 전진대입 원소 하나가 출력된다. 이 논문에서 제시하는 데이터플로우 기술로부터 발생하는 연산시간 절감의 효과는 식 (13)과 같다.

$$\frac{K(K+1)}{2} + K \Rightarrow \frac{K(K+1)}{2} + 1 \quad (13)$$

모든 LD분해가 종료되고 전진대입이 시작하는 경우 전진대입을 위한 연산시간에 K 개의 주기가 소요되지만, LD분해가 수행되고 있는 도중에 전진대입이 계산되면, LD분해가 종료되고 다음 1개 주기에 모든 전진대입이 종



<그림 1> LD 분해와 전진대입 간 적용된 Dataflow 기술



〈그림 2〉 데이터플로우 기술이 적용된 OMP 알고리즘의 동작

료된다. 한편 후진대입은 파이프라인은 적용할 수 있지만, 이론상 전진대입의 마지막 원소인 \tilde{r}_K 이 계산된 후 후진대입이 시작될 수 있어, 데이터플로우를 적용할 수 없다.

5. 실험 및 결과

본 실험에서는 제안된 구조로 설계된 OMP 알고리즘의 동작을 검증한다. 광대역에 존재하는 미지의 신호 최대 3개를 수신하며, 이때, 신호의 위치와 크기를 출력한다. MMV모델로 확장되면서, 연산 데이터는 32bit 고정소수 점 복소수(실수 16 bit, 허수 16 bit)로 처리되었다.

〈그림 2〉는 무작위의 반송파위치에서 송신중인 신호를 탐지한 결과를 보여준다. 〈그림 2(b)〉에서 Residue는 MATLAB(파란)과 HDL(녹색)에서 OMP 반복문이 진행될 때마다 줄어드는 것을 확인할 수 있으며, 〈그림 2(c)〉와 〈그림 2(d)〉는 각각 MATLAB과 HDL에서 복원한 신호를 나타낸다.

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{x}_i)^2 \quad (14)$$

식 (14)은 MSE(Mean Square Error)라고 하며, 데이터간 오차를 나타낸다. 입력신호와 MATLAB 복원신호간 MSE는 0.1104, 입력신호와 HDL 복원신호간 MSE는 0.1099 이다. 한편, MATLAB과 HDL 사이에 MSE는 0.00071로 디지털 연산을 위한 양자화(Quantization)에

도 불구하고 MATLAB과 거의 유사하게 관찰되었다.

VI. 결론

압축센싱은 광대역의 수신대역에도 불구하고, 나이퀴스트보다 훨씬 낮은 속도의 ADC를 사용하여, 송신신호의 위치(support)와 해당하는 신호를 복원할 수 있는 획기적인 통신이론이다. 이러한 압축센싱에는 많은 이론들이 있지만, 연산 복잡도가 낮아, 구현에 용이한 OMP가 특히 많이 사용되고 있다.

본 논문에서는 단일 차원 SMV 모델에서 확장된, MMV 모델을 다루었으며, 차원이 확장되면서 연산 데이터가 실수에서 복소수로 처리할 수 있음을 보였다. 또한 신호 복원 모듈에 파이프라인 및 데이터플로우 기술을 접목하여 연산 시간을 절감할 수 있는 구조를 제안하였다.

본 실험을 통해서 우리는 제한된 길이의 디지털 연산에도 불구하고, 제안된 구조의 OMP알고리즘을 높은 정확성을 가지고 신호를 계산할 수 있음을 보였다.

참고 문헌

- [1] A. M. R. Dixon, E. G. Allstot, A. Y. Chen, D. Gangopadhyay, and D. J. Allstot, "Compressed sensing reconstruction: Comparative study with applications to ECG bio-signals," in Proc. IEEE Int. Symp. Circuits Syst. (ISCAS), May 2011, pp. 805–808.
- [2] D. Yang, H. Li, G. D. Peterson, and A. Fathy, "Compressed sensing based UWB receiver: Hardware compressing and FPGA reconstruction," in Proc. 43rd Annu. Conf. Inf. Sci. Syst. (CISS), Mar. 2009, pp. 198–201.
- [3] J. Tropp and A. Gilbert, "Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit," IEEE Transactions on Information Theory, vol. 53, no. 12, p. 4655, 2007.
- [4] Shane F. Cotter, Bhaskar D. Rao and Kjersti Engan, "Sparse Solutions to Linear Inverse Problems With Multiple Measurement Vectors," IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 53, NO. 7, July 2005



[5] Hassan Rabah, "FPGA Implementation of Orthogonal Matching Pursuit for Compressive sensing Reconstruction," IEEE Transaction on Very Large Scale Integration(VLSI) system, Vol. 23, No 10, October 2015



서근수

- 2014년 충북대학교 전기전자컴퓨터공학부 학사 졸업
- 2015년~현재 광주과학기술원 전기전자컴퓨터공학부 석사과정

<관심분야>
압축센싱, 디지털회로설계



이민재

- 1998년 서울대학교 전기공학과 학사 졸업.
- 2000년 서울대학교 전기공학과 석사 졸업.
- 2008년 University of California 전기공학과 박사 졸업
- 2000년~2003년 Silicon Image Inc
- 2005년 Marvell Semiconductor Inc
- 2007년 삼성종합기술원 : Consultant
- 2008년~2012년 Agilent Technologies, R&D 연구원
- 2012년~현재 광주과학기술원 전기전자컴퓨터공학부 조교수

<관심분야>
ADC, DAC, PLL, RF, 디지털회로설계 등



윤의현

- 2016년 아주대학교 전자공학부 학사 졸업
- 2016년~현재 광주과학기술원 전기전자컴퓨터공학부 석사과정

<관심분야>
압축센싱, 디지털회로설계