대한수학교육학회지 <학교수학> 제 18 권 제 3 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 18, No. 3, 625 ~ 645. Sep 2016

이분모분수의 덧셈과 뺄셈 교육 재고
- 단위 추론 및 재귀적 분할을 중심으로 -

이 지 영* · 방 정 숙**

본 연구는 이분모분수의 덧셈 및 뺄셈과 관련하여 단위 추론의 측면에서 강조해야 할 핵심 아이디어를 밝히고 제4차 교육과정에서부터 2009 개정 교육과정에 의한 초등학교 교과서에서 단위와 관련된 아이디어가 어떻게 제시되어 있는지를 분석하였다. 연구 결과 이분모분수의 덧셈과 뺄셈의 핵심 아이디어는 세 가지 수준의 단위를 유연하게 활용하는 과정에서 고정된 전체 단위, 새로운 공통 단위의 필요성, 재귀적 분할 등을 강조해야 한다는 것이다. 초등학교 수학 교과서 분석 결과, 전체 단위가 고정되어야 한다는 사실을 매우 암묵적으로 다루고, 통분의 필요성을 이전에 학습한 동분모분수의 덧셈과정과 연결하여 제시하였으며, 재귀적 분할 방법보다는 수치적으로 통분하여 모델을 알고리즘과 유기적으로 연결하는 데 어려움이 있는 것으로 드러났다. 이에 대한 논의를 바탕으로 초등학교 수학교과서의 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 관련 내용 구성 및 지도 방향에 시사점을 제공하고자 한다.

Ⅰ. 서 론

초등학교 수학에서 이분모분수의 덧셈과 뺄셈은 단위와 관련하여 다양한 추론을 할 수 있는 중요한 주제이다. 이분모분수의 덧셈과 뺄셈에서 새로운 공통 단위의 필요성이 명시적으로 드러나고 공통 단위를 만드는 과정에서 다양한 수준의 단위로 이루어져 있는 양을 경험할 수 있다. 물론 학생들은 자연수 또는 동분모분수의 덧셈과 뺄셈에서 이미 공통 단위를 사용하고 있다. 그러나 자연수 상황(예, 2+3)에서는 공통단위가 1로 모두 같고, 동분모분수 상황(예, $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}$)에서는 공통 단위로 단위분수(예, $\frac{1}{5}$)를 쉽게 찾을 수 있기 때문에 학생들이 새로운 공통 단위를 찾는 활동에 직접 참여한다고 볼 수는 없다. 이분모분수의 크기 비교에서도 특정한 상황을 제외하고는 시각적 모델을 이용하여 직관적인 비교가 가능한 경우가 많기 때문에 학생들의 입장에서는 새로운 공통 단위가 필요하다는 것을 이해하기 어려울 수 있다.

변희현(2009)은 이러한 공통 단위를 통해 자연수, 유리수뿐만 아니라 실수까지 덧셈과 뺄셈을 통합적으로 이해할 수 있다고 강조하면서 교과서에 공통 단위를 다루는 내용을 적극적으로 반영할 필요가 있다고 주장하였다. 이지영(2015)은 분수 학습에서 다양한 수준의 단위를 유연하게 사용하고 상황을 재구조화할 수 있는 단위 추론(Quantitative reasoning with unit)[1]의 중요성을 논

* 팔달초등학교, ez038@naver.com (제1 저자)
** 한국교원대학교, jeongsuk@knue.ac.kr (교신저자)
1) 단위 추론은 "단위량에 초점을 두는 특정한 종류의 양적 추론"을 일컫는다(이지영, 2015, p. 3).

하면서 교과서에 이를 체계적이고 의도적으로 제시하여 지도할 것을 강조하였다.

그러나 현행 교과서의 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 단원에서 이러한 중요성을 인지하고 다양한 단위의 구조를 의도적으로 다루고 있는지는 의문이다. 오히려 계산 절차를 익히고 적용하는 것에 초점을 두어 분수의 덧셈과 뺄셈에 대한 인지적 오류를 불러 오기도 한다(김미영, 백석윤, 2009). 따라서 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 단원에서 단위 추론과 관련하여 무엇을 강조하고 어떻게 지도할 것인지에 대한 탐색이 필요하다.

한편, 이분모분수의 덧셈과 뺄셈이 단위 추론과 관련하여 교수학적으로 중요한 주제인 것에 비해 이에 대한 연구는 부족한 편이다. 국내에서 분수의 덧셈과 뺄셈에 관한 연구가 소수 진행된 바 있지만(예, 김미영, 백석윤, 2010; 방정숙, 이지영, 2009; 최근배, 2015), 분수의 덧셈과 뺄셈을 단위 추론과 관련하여 연구한 경우는 찾기 힘들다. 국외에서는 분수의 덧셈과 뺄셈에서 학생들이 단위를 어떻게 사용하고 이해하는지 구체적으로 분석한 연구가 있지만(예, Izsák, Tillema, & Tunç-Pekkan, 2008; Steffe, 2003; Steffe & Olive, 2010), 소수 학생들의 사고 과정에 초점을 둔 경우이므로 이분모분수의 덧셈과 뺄셈의 지도 방향을 전반적으로 탐색하기 위해서는 새로운 연구가 필요하다.

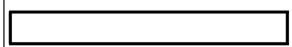
따라서 본 연구에서는 먼저 이분모분수의 덧셈과 뺄셈에서 단위 추론과 관련하여 강조해야 할 사항을 살펴본다. 다음으로 제4차부터 2009 개정 교육과정에 의한 교과서를 분석하여 이분모분수의 덧셈과 뺄셈에서 단위를 어떻게 제시하고 다루는지 분석한다. 이러한 결과를 통해 이분모분수의 덧셈과 뺄셈에 관한 지도 방향 및 2015 개정 교육과정에 의한 교과서 개발에 구체적인 시사점을 제공하고자 한다.

II. 단위 추론 측면에서 살펴본 이분모분수의 덧셈 및 뺄셈과 관련된 핵심 아이디어

이분모분수의 덧셈과 뺄셈은 교수학적 의도와 학습자의 수준 등을 고려하여 다양한 방법으로 지도할 수 있다. 그러나 이분모분수의 덧셈과 뺄셈의 계산 절차를 익히기만 하는 것보다는 분수의 덧셈과 뺄셈의 의미와 계산 원리를 이해하는데 더욱 초점을 두어 이를 알고리즘과 연결하여야 한다(교육부, 2015a). 본 연구에서는 이러한 방법으로 세 가지 수준의 단위를 이해하고 이를 유연하게 활용해야 한다는 점을 강조한다.

이분모분수의 덧셈과 뺄셈에서는 <표 II-1>과 같이 세 가지 수준의 단위가 나타난다(Steffe, 2003; Steffe & Olive, 2010).

<표 II-1> 단위의 구조

단위의 구조	통분을 할 때 '$\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$'를 나타내는 과정	
단위		1
단위의 단위		$\frac{1}{3}$이 3개인 1
단위의 단위의 단위		$\frac{1}{12}$이 4개인 $\frac{1}{3}$이 3개인 1

먼저 첫 번째 수준[2]의 단위인 1이다. 분수량을 표현하기 위해서는 먼저 그 양이 가리키는 대상의 단위(referent unit) 또는 전체 단위가 필요

2) 분할 과정에서 나타나는 단위의 수준을 서로 구분하기 위해 편의상 첫 번째, 두 번째, 세 번째 수준으로 표현하였다.

하다. $\frac{2}{3}$는 전체 단위(1)를 등분할하여 표현할 수 있는데 이때 단위의 구조는 단위의 단위($\frac{1}{3}$이 3개인 1)로 복잡해진다. 처음에 있던 전체 단위(1)가 이제는 두 번째 수준의 단위($\frac{1}{3}$)로도 표현될 수 있는 양($\frac{1}{3}$이 3개)이 된다. 이분모분수의 덧셈과 뺄셈에서 필요한 공통 단위는 단위의 단위 구조를 단위의 단위의 단위($\frac{1}{12}$이 4개인 $\frac{1}{3}$이 3개인 1)로 더욱 복잡하게 구성하면 만들 수 있다. 두 번째 수준의 단위($\frac{1}{3}$)가 세 번째 수준의 단위로도 표현될 수 있는 양($\frac{1}{12}$이 4개)이 되므로 처음에 있던 전체 단위(1)는 세 가지 수준의 단위를 모두 포함하고 있는 양이 된다.

이러한 세 가지 수준의 단위 구조와 관련하여 이분모분수의 덧셈과 뺄셈의 핵심 아이디어를 다음의 3가지로 정리할 수 있다.

첫째, 덧셈 및 뺄셈은 곱셈 및 나눗셈과 다르게 연산에 관여하는 세 가지 양(예를 들어, 덧셈에서는 피가수, 가수, 합)이 가리키는 대상의 단위가 모두 같다. 즉 <표 II-1>에서 제시한 첫 번째 수준의 단위가 모두 같다. Schwartz(1988)는 양적인 상황에서 연산의 의미가 더욱 복잡해지는 것을 설명하면서 덧셈과 뺄셈은 세 가지 양의 지시대상이 그대로 유지되는 연산(referent preserving composition)으로, 곱셈과 나눗셈은 세 가지 양의 지시대상이 변하는 연산(referent transforming composition)으로 구분하여 제시하였다. Izsák 외(2008) 역시 분수의 덧셈에서 고정된 전체(fixed whole)를 유지하는 것을 강조한 바 있다.

덧셈과 뺄셈에서 고정된 단위의 중요성은 이분모분수의 덧셈과 뺄셈에서 명시적으로 드러난다. 자연수의 덧셈과 뺄셈에서는 세 가지 양의 단위가 1개나 1m 등과 같이 개별 단위로 같으므로 세기 과정을 거쳐 결과를 구할 수 있다(변희현, 2009). 동분모분수의 덧셈과 뺄셈 역시 전체 단위를 연속량뿐만 아니라 이산량으로 생각하더라도 전체 단위의 크기는 모두 동일하다. 예를 들어 ‘빨간 구슬이 전체 구슬 7개 중에 2개이고, 노란 구슬이 전체 구슬 7개 중에 3개일 때 빨간 구슬과 노란 구슬을 더하면 전체 구슬의 얼마인가’와 같은 상황에서 빨간 구슬과 노란 구슬은 전체 구슬의 각 부분으로 해석할 수 있고 전체 단위는 구슬 7개로 동일하므로 $\frac{5}{7}$로 나타낼 수 있다. 그러나 위의 상황을 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 상황으로 그대로 가져온다면 ‘빨간 구슬이 전체 구슬 3개 중에 2개이고, 노란 구슬이 전체 구슬 4개 중에 3개일 때 빨간 구슬과 노란 구슬을 더하면 전체 구슬의 얼마인가?’와 같은 상황이 되는데 이러한 상황은 이분모분수의 덧셈 상황이라고 볼 수 없다. 빨간 구슬이 전체 구슬 3개 중에 2개라는 것과 노란 구슬이 전체 구슬 4개 중에 3개라는 표현에서 이미 빨간 구슬과 노란 구슬의 전체 단위가 각각 구슬 3개와 구슬 4개로 서로 다르다는 것을 알 수 있다. 이를 굳이 덧셈 상황으로 해석하자면 전체 구슬이 7개가 되고 그 중 빨간 구슬과 노란 구슬의 합은 5개가 되므로 총 7개 중에 5개라는 결과를 이끌 수 있다. 이는 분수의 덧셈과정에서 나타내는 학생들의 대표적인 오개념인 $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{2+3}{3+4}=\frac{5}{7}$ 상황이라고 볼 수 있다. 분수의 크기를 비교할 때에는 상대적인 크기나 관계를 비교할 수도 있으므로 전체 단위가 변하는 것이 오개념이라고 볼 수 없으나 분수의 덧셈과 뺄셈에서는 전체 단위가 서로 다른 분수를 더하는 것이 타당하지 않다는 것을 이해할 필요가 있다.

이분모분수의 덧셈과 뺄셈에서 고정된 단위와 관련된 학생들의 어려움은 김미영과 백석윤(2010)의 연구에서 찾아볼 수 있다. 연구자들은 학생들에게 분수의 덧셈과 뺄셈을 수식으로 제

시하고 이를 그림이나 표로 나타내어 보도록 하였고 이를 통해 장애의 유형을 “부분의 전체를 다르게 나타낸 경우”, “문제를 만들지 않고 그림으로 나타내는 경우” 등으로 다양하게 구분하였다(pp. 248-249). 이를 <표 II-2>와 같이 정리해보면, 이러한 유형의 인지적 장애는 분수의 전체 단위가 변하지 않고 그대로 유지되어야 한다는 것을 인식하지 못하는 데에서 비롯된다는 것을 알 수 있다.

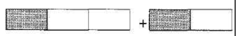
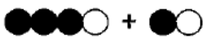
따라서 이분모분수의 덧셈과 뺄셈에서는 먼저 연산의 의미와 관련하여 분모가 다른 분수를 더하고 빼는 의미가 무엇인지를 생각해보게 하고 이때 각 분수의 전체 단위가 변하지 않고 그대로 유지되는 것이 매우 중요하다는 것을 인식할 수 있도록 고정된 전체 단위를 보다 명시적으로 지도할 필요가 있다.

둘째, 이분모분수의 덧셈 및 뺄셈에서 결과를 하나의 양으로 표현하기 위해서는 새로운 단위가 필요하다. 변희현(2009)은 이를 “두 양을 동시에 정확하게 측정할 수 있는 단위[인] 공통단위”로 제시한 바 있다(p. 309). 자연수의 덧셈과 뺄셈인 경우에는 세기 단위로 통일되어 있으므로 단위를 통일해야 한다는 상황이 크게 중요하지 않다. 동분모분수의 덧셈과 뺄셈 역시 분모끼리 더하지 않는다는 것을 아는 것이 중요하지만 역시 같은 단위로 제시되어 있으므로 단위 자체를 변경할 필요가 거의 없다. 그러나 $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$과 같은 이분모분수의 덧셈과 뺄셈의 경우에는 각 분수 양에서 두 번째 수준의 단위인 $\frac{1}{3}$과 $\frac{1}{4}$의 크기가 각각 다르기 때문에 어느 하나의 단위분수를 사용하여 결과값을 표현할 수 없다. $\frac{2}{3}$는 $\frac{1}{3}$을 2번 반복하여 측정할 수 있고, $\frac{3}{4}$은 $\frac{1}{4}$을 3번 반복하여 측정할 수 있지만 $\frac{2}{3}$와 $\frac{3}{4}$의 합은 위에 제시된 단위구조만 가지고는 측정할 수 없다. 그러므로 $\frac{2}{3}$와 $\frac{3}{4}$을 공통적으로 분할할 수 있는 새로운 단위이면서 세 번째 수준의 단위인 $\frac{1}{12}$이 필요하다. 이는 우리가 흔히 말하는 통분의 필요성을 이해하는 것과 연결된다.

따라서 이분모분수의 덧셈과 뺄셈에서 두 번째 수준의 단위의 크기가 다르기 때문에 통분이 필요하고 통분은 세 번째 수준의 단위를 찾는 과정이라는 것을 활동을 통해 안내할 필요가 있다.

셋째, 재귀적 분할 과정을 거쳐 세 번째 수준의 단위를 찾을 수 있고 이는 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 알고리즘과 연결된다. 이분모분수의 덧셈과 뺄셈에서 통분은 동치분수를 만드는 과정과 연결하여 설명할 수 있는데 크게 세 가지로 구분할 수 있다. 곱셈의 항등원을 곱하는 방법(방법 1), 분수의 성질[3]을 이용하는 방법(방법 2), 재귀적 분할을 하는 방법(방법 3)이다. 이러한 방법을 상황이나 모델을 사용하지 않고 수식으로만 지도하면 그 의미나 중요성에 큰 차이가 없어 보일 수 있다. 따라서 각각의 방법을 구체적으로 살펴보고 그 차이점을 탐색할 필요가 있다.

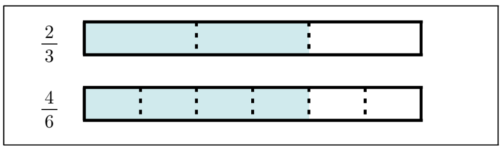
<표 II-2> 김미영, 백석윤(2010)에 제시된 분수의 덧셈과 뺄셈의 장애 유형(pp. 248-249)

상황	연속량		이산량	
	$\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$을 표현	$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$을 표현	$\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$을 표현	$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$을 표현
일부의 장애 유형				비둘기 3마리 중에 1마리, 참새 2마리 중에 1마리를 더하는 상황

3) 분수의 분모와 분자에 0이 아닌 같은 수를 곱하거나, 0이 아닌 같은 수로 나누어도 분수의 크기는 같다.

방법 1은 Barnett-Clarke 외(2010)의 연구에서 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 방법 중 하나로 제시한 것으로 곱셈의 항등원을 이용하여 동치분수를 만드는 방법이다. 과정을 수식으로 나타내면 $\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\times 1=\frac{2}{3}\times\frac{2}{2}=\frac{4}{6}$와 같고, 대부분 수식으로 표현하여 나타낼 가능성이 크다. 곱셈의 항등원인 $\frac{2}{2}$를 연산자로 보고 분자만큼 늘리는 과정(×2)을 거쳐 $\frac{2}{3}\times 2=\frac{4}{3}$를 만들고 분모만큼 줄이는 과정(÷2)을 거쳐 $\frac{4}{3}\div 2=\frac{4}{6}$를 만들 수 있다. 이 방법의 장점은 대수적 성질을 이용하여 동치분수의 의미를 이해할 수 있다는 것이다. 그러나 분수의 곱셈 및 나눗셈이 선행되어야 가능하므로 현행 교육과정에서 분수 연산을 지도하는 순서와는 맞지 않다.

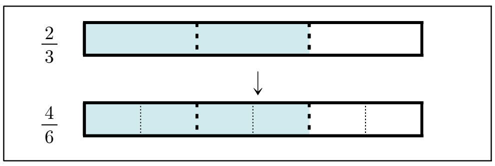
방법 2는 분수의 성질을 이용하여 동치분수를 만드는 방법으로 대부분 교과서에서 많이 활용하고 있다. $\frac{2}{3}$의 분모와 분자에 같은 수인 2를 곱하여 나온 분수 $\frac{4}{6}$는 처음 $\frac{2}{3}$와 그 크기가 같다. 이를 수식으로 나타내면 $\frac{2}{3}=\frac{2\times 2}{3\times 2}=\frac{4}{6}$이다. $\frac{2}{3}$와 $\frac{4}{6}$의 크기가 같다는 것은 [그림 II-1]과 같이 띠 모델을 이용하여 시각적으로 확인할 수 있다.



[그림 II-1] 분수의 성질을 이용한 동치분수 만들기

이 방법의 장점은 분수의 성질을 알면 쉽게 동치분수를 구할 수 있다는 것이고 $\frac{2}{3}$와 $\frac{4}{6}$의 크기가 같음을 모델을 이용하여 직관적으로 이해할 수 있다는 것이다. 그러나 분수의 성질을 먼저 제시하고 모델을 이용하여 두 분수의 크기가 같다는 것을 확인하는 방법은 분수의 성질에 대한 도구적 이해는 가능하지만 분수의 성질이 왜 성립하는지를 이해하는 데 한계가 있을 수 있다. 또한, 학생들이 직접 그림을 그려서 두 양을 표현한다면 단위 1을 같게 그리기 어렵기 때문에 두 양을 같은 양으로 그리기 어렵고 이로 인해 두 양이 같다는 것을 이해하기 어려울 수도 있다. 이보다 더 큰 문제는 분수의 성질을 먼저 제시하여 분수의 분모와 분자에 0이 아닌 같은 수를 곱하는 활동에만 치우치다 보면 동치분수를 만들기 위해 곱하는 활동이 분할 과정이 아니라 양이 늘어나는 자연수의 배 개념으로 생각할 우려가 있다는 것이다. $\frac{2}{3}$는 전체 단위를 3등분하여 나온 단위 분수가 2개 있는 양이고 분모와 분자에 각각 2를 곱하는 과정($\frac{2\times 2}{3\times 2}$)은 전체 단위의 크기는 변하지 않고 조각을 더 잘게 분할하는 과정으로, 나뉜 조각의 개수는 늘어나지만 조각의 크기는 줄어드는 상황이다. 따라서 방법 2는 이러한 분할 과정을 설명하는 데 어려움이 있을 수 있다.

방법 3은 재귀적 분할을 통해 동치분수를 만드는 방법으로 [그림 II-2]와 같이 $\frac{2}{3}$를 먼저 표현하고 각각의 $\frac{1}{3}$을 다시 2등분하여 $\frac{4}{6}$를 만드는 것이다. $\frac{2}{3}$라는 하나의 대상을 다시 재분할하여 나타낸 것이므로 $\frac{4}{6}$로 표현하여도 그 양은 변하지 않는다는 것을 쉽게 확인할 수 있다.



[그림 II-2] 재귀적 분할을 이용한 동치분수 만들기

재귀적 분할(recursive partitioning)은 Steffe(2003, 2004)가 제시한 용어로 부분의 부분의 크기를 전체를 기준으로 해석하기 위해 각 부분을 다시 부분으로 분할하는 과정이다. 이 방법의 장점은 하나의 양을 $\frac{2}{3}$이면서 $\frac{4}{6}$로도 표현할 수 있다는 것이다. [그림 II-1]과 비교하면 $\frac{4}{6}$를 나타내는 모델의 눈금을 표현한 방법이 서로 다르다는 것을 알 수 있다. [그림 II-1]은 전체 단위를 6등분한 과정을 나타낸다면 [그림 II-2]는 전체 단위를 3등분한 다음, 다시 각각의 단위 구간을 2등분한 과정이 눈금의 굵기로 구분하여 제시되어 있다. 이러한 과정을 통해 학생들은 세 가지 수준의 단위를 이해하고 이를 융통적으로 사용하는 경험을 할 수 있다(Izsák et al., 2008). 또한 이 방법은 $\frac{2\times2}{3\times2}$가 분모에 2배하고 분자에 2배를 하여 전체 단위가 2배가 되고 부분의 크기도 2배가 되는 상황이 아니라 분할하고 또 다시 분할하는 과정이라는 것이 잘 나타난다. 이 과정은 분모가 2등분되면 분자도 똑같이 2등분되는 과정을 설명하여 알고리즘과도 연결할 수 있다.

단점은 알고리즘과 연결하기 위해서는 곱셈의 교환법칙[4], 분할을 곱셈으로 표현하는 이유 등을 이해해야 하며 세 가지 수준의 단위 사이의 관계를 이해하고 이를 유연하게 사용하는 것 자체가 어렵다는 것이다.

그러나 방법 3은 연산의 의미와 알고리즘에 대해 개념적으로 이해하는 데 도움이 되며 세 가지 수준의 단위는 추후 학습할 분수의 곱셈, 나눗셈에서 중요한 역할을 하므로(Steffe & Olive, 2010), 이분모분수의 덧셈과 뺄셈에서 충분히 경험할 기회를 제공해야 한다.

III. 이분모분수의 덧셈과 뺄셈에 관한 교과서 분석

1. 분석의 개요

본 장에서는 이분모분수의 덧셈과 뺄셈에서 단위의 구조를 어떻게 제시하고 지도하는지를 살펴보기 위해 제4차 수학과 교육과정에 의한 교과서에서부터 현행 2009 개정 수학과 교육과정에 의한 교과서를 분석하였다(문교부, 1987a, 1991a; 교육부, 1997a, 2015b; 교육인적자원부, 2002a; 교육과학기술부, 2013a)[5]. 또한 이분모분수의 덧셈과 뺄셈의 지도 과정은 교과서만 가지고 파악하기에 어려움이 있으므로 그 의도를 설명하고 있는 교사용 지도서를 같이 분석하였다(문교부, 1987b, 1991b; 교육부, 1997b, 2015c; 교육인적자원부, 2002b; 교육과학기술부, 2013b). 공통적으로 이분모분수의 덧셈과 뺄셈은 5학년 1학기에서 다루며, 이분모분수의 덧셈과 뺄셈을 지도하기 이전에 4학년에서 동분모분수의 덧셈과 뺄셈을 하고 5학년에서 동치분수, 약분 및 통분, 분수의 크기 비교를 다루고 있다. 재귀적 분할 과정이 동치분수, 약분 및 통분, 분수의 크기 비교에서 다루어질 가능성이 있으므로 해당 단원을 먼저 살펴보고, 다음으로 이분모분수의 덧셈과 뺄셈을 어떻게 지도하고 있는지 살펴본다.

교과서 분석의 초점은 다음 3가지로 구성된다. 먼저, 교과서에 제시된 구체적 상황과 각 분수가

---

4) $\frac{2\times2}{3\times2}$인 경우에 분모를 예를 들어 설명하면 전체 단위를 3등분하여 나온 각각의 부분이 다시 2등분된 과정이므로 조각의 개수는 각 부분에 2개씩 3개가 있는 상황이므로 2×3이 된다.

5) 본 연구는 이분모분수의 덧셈과 뺄셈을 단위 추론 측면에서 살펴보는 것이 목적이다. 이에 교과서에 제시된 활동을 어떻게 지도하도록 안내하는지 구체적으로 분석할 필요가 있었다. 이런 측면에서 교사용 지도서를 참고하기에 용이한 제4차 수학과 교육과정에 의한 교과서부터 살펴보았다. 편의상 각 수학과 교육과정에 의한 교과서 및 교사용 지도서는 4차 교과서, 4차 교사용 지도서와 같이 간략하게 제시하였다.

가리키는 대상의 단위가 무엇인지를 살펴본다. 동치분수, 약분 및 통분, 분수의 크기 비교, 이분모분수의 덧셈과 뺄셈을 어떤 상황에서 다루고 있는지 탐색한다. 또한 2장에서 살펴본 바와 같이 이분모분수의 덧셈과 뺄셈에서 첫 번째 수준의 단위가 변하지 않고 고정되어 있다는 것을 아는 것이 중요하므로 이와 관련하여 교과서에 어떻게 제시되어 있는지를 살펴본다.

둘째, 교과서 및 교사용지도서에서 두 번째 수준의 단위와 세 번째 수준의 단위를 어떻게 다루고 있는지 모델과 분할 과정을 중심으로 살펴본다. 분수를 나타내는 모델은 영역 모델, 길이 모델, 집합 모델 등으로 구분할 수 있는데(Reys et al., 2009), 영역 모델은 어떤 도형을 사용하는가에 따라 직사각형 모델, 원 모델, 다각형 모델 등으로 구분된다. 길이 모델은 대부분 분수 막대, 띠 모델, 수직선 등으로 사용하고 있다. 집합 모델은 이산량을 나타내는 모델이다. 분할 과정은 분수를 각각 등분할하는 것에 그쳤는지, 분할한 부분을 다시 분할하는 재귀적 분할 방법을 사용하는지 구분하여 분석한다.

마지막으로 교과서와 교사용 지도서에서 모델과 분할 활동을 통해 알고리즘을 어떻게 도출하고 형식화하는지 살펴본다.

2. 동치분수, 약분 및 통분, 분수의 크기 비교

제4차~2009 개정 교육과정에서는 공통적으로 이분모분수의 덧셈을 학습하기 이전 단원에서 동치분수를 만드는 과정을 통해 분수의 성질을 다루고, 이를 바탕으로 약분과 통분을 한 후에 마지막으로 분수의 크기 비교를 한다. 따라서 위의 3가지 주제에서 구체적 상황, 전체 단위, 모델 및 분할, 형식화를 어떻게 제시하고 있는지 분석할 필요가 있다.

가. 동치분수

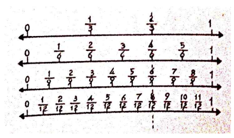
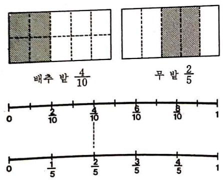
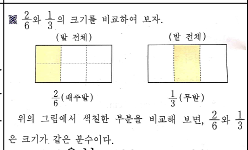
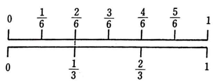
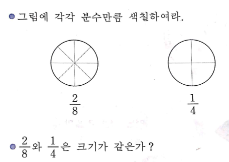
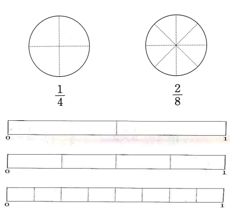
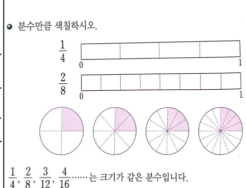
<표 III-1>은 제4차 교육과정에서 2009 개정 교육과정까지 교과서 및 교사용 지도서에서 동치분수를 어떻게 제시하고 있는지 정리한 것이다. 분석의 3가지 초점에 따라 분석하면 다음과 같다.

첫째, 동치분수를 도입하는 구체적 상황은 5차 교과서부터 제시하고 있다. 2007 개정 교과서를 제외하고는 모두 동치인 두 대상의 크기나 양을 비교하는 상황(예, 밭의 두 부분의 크기 비교, 두 학생이 먹은 피자 양의 비교)으로 등분할 할 수 있는 전체(예, 밭 전체, 피자 한 판)를 단위로 제시한다. 2009 개정 교과서에서도 낚싯줄에 아래에서부터 전체 길이의 $\frac{1}{3}$이 되는 곳을 제시하고 있으나 하나의 대상이 아니라 여러 대상을 제시하여 서로 비교하는 상황을 제시한다.

이와 다르게 2007 개정 교과서는 전체 단위를 이산량의 집합으로 제시한다. 구체적으로 하나의 대상인 남학생의 수(4명)를 전체 학생(8명)을 기준으로 하여 여러 가지 분수 표현으로 나타내도록 하고 있다. 이는 하나의 대상을 정해진 전체에 대해 여러 가지 분수로 표현하는 것이므로 첫 번째 수준의 단위 역시 동일한 대상으로 같다. 이러한 경우에는 첫 번째 수준의 단위가 변하지 않고 고정되어 있다는 것을 자연스럽게 설명할 수 있다. 반면에 2009 개정 교과서에서는 두 대상의 크기를 비교하는 과정에서 두 대상의 전체 단위가 같다는 것을 강조하기 위해서 '크기가 같은 대나무 통', '길이가 같고 눈금이 여러 개 있는 낚싯줄'과 같이 복잡하고 어렵게 제시되어 있다. 두 분수가 가리키는 대상이 서로 다르지만 단위는 같은 크기라는 것을 의도적으로 제시하고 있다고 볼 수 있으나 지도서에서는 이러한 내용을 명시적으로 다루고 있지는 않다.

둘째, 대부분 모델을 이용하여 상황을 제시하

<표 III-1> 제4차 ~ 2009 개정 교과서 및 교사용 지도서의 동치분수 관련 내용 분석

	구체적 상황	전체 단위	모델 및 분할		알고리즘 도출 및 형식화
4차 (1987)	구체적인 상황 제시하지 않음	수 1	교과서에는 모델이 따로 제시되어 있지 않고 바로 동치분수 만드는 방법(예, $\frac{2\times2}{3\times2}=\frac{4}{6}$)을 제시함. 지도서에 수직선을 이용하여 $\frac{2}{3}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{8}{12}$을 각각 등분할하여 크기를 시각적으로 비교해보게 함.	 (문교부, 1987b, p.118)	교과서에 동치분수를 만드는 과정(분수의 분모와 분자에 0이 아닌 같은 수로 곱하거나 나누어도 값이 변하지 않음)을 직접적으로 제시하고 지도서에 이 분수의 크기를 수직선에 대응시켜 크기가 같은 분수임을 확인함.
5차 (1991)	배추와 무를 심은 밭의 크기 비교	명주네 밭 전체	교과서에 등분할 및 분수만큼의 양이 표현된 직사각형 모델을 제시하고, 지도서에 직사각형 모델과 수직선 모델을 같이 제시하여 $\frac{4}{10}$와 $\frac{2}{5}$를 각각 등분할하여 크기를 시각적으로 비교해보게 함.	 (문교부, 1991b, p. 70)	모델을 이용하여 $\frac{4}{10}$와 $\frac{2}{5}$가 같은 크기의 분수임을 시각적으로 확인한 후에 분모와 분자를 같은 수로 나누어서 $\frac{4}{10}=\frac{4\div2}{10\div2}=\frac{2}{5}$임을 확인함. 이때, 분모와 분자를 각각 0이 아닌 같은 수로 나누어 보는 활동만 다룸.
6차 (1997)	배추와 무를 심은 밭의 크기 비교	밭 전체	5차와 거의 유사함. 교과서에 등분할 및 분수만큼의 양이 표현된 직사각형 모델을 제시하고, 지도서에 직사각형 모델과 수직선 모델을 같이 제시하여 $\frac{2}{6}$와 $\frac{1}{3}$을 각각 등분할하여 크기를 시각적으로 비교해보게 함.	 (교육부, 1997a, p. 30)  (교육부, 1997b, p. 80)	모델을 이용하여 $\frac{2}{6}$와 $\frac{1}{3}$이 같은 크기의 분수임을 시각적으로 확인한 후에 분모와 분자를 같은 수로 나누어서 $\frac{2}{6}=\frac{2\div2}{6\div2}=\frac{1}{3}$임을 확인함. 이때, 분모와 분자를 각각 0이 아닌 같은 수로 나누어 보는 활동만 다룸.
7차 (2002)	두 학생이 먹은 피자 양의 비교	피자 한 판	교과서에서 등분할 되어 있는 원 모델을 제시하고 $\frac{2}{8}$와 $\frac{1}{4}$을 각각 색칠하도록 함(하나는 8등분, 다른 하나는 4등분 되어 있음). 분수 각각을 등분할하여 나타내고 색칠한 크기가 서로 같음을 시각적으로 확인함.	 (교육인적자원부, 2002a, p. 34)	$\frac{1\times2}{4\times2}=\frac{2}{8}$, $\frac{2\div2}{8\div2}=\frac{1}{4}$과 같이 분모와 분자에 각각 같은 수를 곱하거나 나누어도 크기가 같다는 것을 확인함. $\frac{1}{2}$, $\frac{12}{24}$와 크기가 같은 분수를 만들기 위해서 분모와 분자에 각각 2, 3, 4를 곱하거나 나누어보고 각각의 분수를 등분할 되어 있는 그림(직사각형 모델)에 색칠하여 시각적으로 비교해보도록 함.
2007 개정 (2013)	남학생이 전체의 얼마인지 여러 가지 분수로 나타내기	전체 학생 8명	생각열기에서 제시한 상황은 8명의 학생 중 남학생이 전체의 얼마인지 여러 가지 분수로 나타내는 것임. $\frac{1}{4}$과 $\frac{2}{8}$의 크기를 비교해보기 위해 등분할되어 있는 원 모델에 색칠하도록 함. 띠 모델에 $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{8}$만큼 색칠해서 크기가 서로 같음을 직관적으로 확인함.	 (교육과학기술부, 2013a, p. 19)	$\frac{1}{3}$, $\frac{18}{24}$과 크기가 같도록 다양하게 등분할 되어 있는 띠 모델에 직접 색칠하도록 하고 분수로 나타내도록 함. 크기가 같은 분수를 만드는 방법으로 분수의 분모와 분자에 0이 아닌 같은 수를 곱하거나 나눈다는 것을 이끌어 냄.
2009 개정 (2015)	두 대나무통에 모은 물의 양 비교/낚싯줄에 아래에서부터 전체 길이의 $\frac{1}{3}$	크기가 같은 대나무통/길이가 같고 눈금이 여러 개 있는 낚싯줄	$\frac{1}{4}$과 $\frac{2}{8}$의 크기를 등분할되어 있는 띠 모델에 직접 색칠해보고 투명종이를 이용하여 직접 비교하도록 함. 원 모델, 띠 모델에 다른 사례인 크기가 같은 분수를 색칠하여 표현해보게 함.	 (교육부, 2015b, pp. 72-73)	$\frac{1}{3}$, $\frac{6}{12}$과 크기가 같도록 다양하게 등분할되어 있는 들이모델, 수직선에 직접 색칠하도록 하고 분수로 나타내도록 함. 크기가 같은 분수를 만드는 방법으로 분수의 분모와 분자에 0이 아닌 같은 수를 곱하거나 나눈다는 것을 이끌어 냄.

고 있으나 이미 등분할 되어 있는 그림을 이용한다. 특히 2007 개정 교과서를 제외하고는 재귀적 분할을 고려했다기보다는 각각의 분수를 등분할 하는 것에 초점을 두었다고 볼 수 있다. 2009 개정 교과서로 올수록 매우 다양한 모델을 활용하고 있으나 모델의 활용은 모두 공통적으로 이미 등분할 되어 있는 그림에 각각의 분수를 나타내고 그 크기를 시각적으로 비교하는 정도로만 활용하였다. 구체적으로 4차 교과서에서는 상황이나 시각적 모델을 통해 분수의 성질을 설명하기 보다는 직접 분수의 성질을 제시하여 동치분수를 만들게 한다. 다만 교사용 지도서에서 수직선을 이용하여 분수의 성질을 이용하여 구한 또 다른 분수가 처음 분수와 양이 서로 같다는 것을 시각적으로 확인하는 과정이 나타난다. 5, 6차 교과서는 거의 비슷하게 제시되어 있는데 교과서에 등분할되어 있는 직사각형 모델에 분수 양만큼 색칠되어 있다. 교사용 지도서에서는 또 다른 모델인 수직선을 이용하여 해당 분수의 크기가 같다는 것을 위치적으로 다시 확인하게 한다. 그러나 두 가지 모델 모두 각각을 재귀적 분할을 통해 얻기보다는 각각의 분수를 따로 표시하여 봄으로써 그 양이 같다는 것을 시각적으로 확인하는 것에 그친다. 7차 교과서부터는 학생들이 분수 양만큼 직접 색칠하는 활동으로 바뀌었으나 모델은 여전히 모두 등분할 되어 있다. 또한 단위의 다양한 수준을 구분할 수 있는 눈금의 굵기에 차이를 두지 않고 모두 같은 굵기의 눈금으로 등분할하고 있다.

셋째, 모두 공통적으로 모델이나 분할 활동을 통해 알고리즘을 도출하는 과정은 거의 드러나지 않는다. 모델은 두 분수의 양이 같다는 것을 시각적으로 확인하는 정도로만 사용한다. 오히려 크기가 같은 두 분수의 특징을 살펴보게 하고 분모와 분자에 0이 아닌 같은 수를 곱하면 된다는 것에 주목하게 하고 있다. 예를 들어 7차 교사용 지도서에서 “똑같은 부분들을 2배로 만들면 색칠한 부분들도 2배가 되고, 똑같은 부분의 개수가 반으로 줄면 색칠한 부분의 개수도 반으로 준다는 사실을 발견하고, 이 때의 두 분수는 같은 크기를 나타내는 두 가지 다른 이름임을 이해하게 한다.(교육인적자원부, 2002b, p. 124)”라고 제시한 부분을 보면 수들 사이의 관계만 가지고 분모가 2배가 되고 분자가 2배가 된다는 것을 강조하고 있다는 것을 알 수 있다. 사실 분모와 분자에 같은 수를 곱하는 과정은 자연수의 배 개념보다는 재분할과정이다. 전체 단위가 변하지 않은 상태에서 등분할된 조각의 크기가 줄고 조각의 개수가 늘어나는 과정을 설명할 수 있어야 한다.

2007 개정 교과서는 앞에서 설명한 바와 같이 하나의 대상을 여러 가지 분수로 표현하는 상황으로 시작하였으나 본 차시 활동이나 모델의 사용 등은 이전 교과서와 마찬가지로 시각적으로 확인하는 용도로만 사용한다. 다만 활동에 대한 설명에서 분할 과정에 약간의 차이가 있음을 알 수 있는데 크기가 같은 분수를 이해하는 차시에서 활동 1과 활동 2를 구분하여 설명하고 있다. 교사용 지도서를 살펴보면 “활동 1은 똑같은 크기의 원을 각각 4등분, 8등분한 그림에 분수만큼을 색칠하는 것을 통하여 크기가 같은 분수의 예를 보여주기 위한 것이다(교육과학기술부, 2013b, p. 123)”라고 설명한 것을 보아 활동 1은 각각의 분수만큼 등분할하여 나타낸 양이 서로 같다는 것을 시각적으로 확인하는 과정이라는 것을 알 수 있다. 그러나 활동 2에 대한 설명에서는 “활동 2는 활동 1과 달리 크기가 똑같은 수 막대를 반으로, 또 그것의 반으로, 다시 반으로 나눈 그림에 각각 분수만큼을 색칠하는 것을 통하여 크기가 같은 분수는 서로 어떤 관계가 있음을 은연중에 알게 하려는 것이다(교육과학기술부, 2013b, p. 123)”라고 하면서 각 단위 구

간을 재분할(subdivision)하는 과정으로 설명하고 있다[6]. 크기가 같은 분수를 만드는 다음 차시에 제시된 활동은 위의 두 가지 활동과는 또 다르다. “활동 1에서는 수 막대를 3등분, 6등분, 9등분, 12등분한 그림을 주고 각 그림에 $\frac{1}{3}$만큼 색칠을 하고 그것을 다른 분수로 나타내게 하는 활동을 통하여 $\frac{1}{3}$과 크기가 같은 분수를 만드는 방법을 알게 하며, 나아가 분수의 분모와 분자에 똑같은 수를 곱하여 크기가 같은 분수를 만드는 방법을 찾게 하려는 것이다(교육과학기술부, 2013b, p. 124)”라고 하면서 분수의 성질에 초점을 두어 설명한다. 그러나 단위의 여러 가지 구조를 드러내는 눈금의 굵기 차이 등을 통해 서로 다른 수준의 단위를 구분하지 않았다는 점, 재분할 과정을 통해 분수의 성질을 도출하지 않았다는 점에서 아쉬움이 남는다.

2009 개정 교사용 지도서에서는 $\frac{1}{3}$과 크기가 같은 분수의 특징을 찾아 다음과 같이 부분과 전체의 관계를 이용하여 이야기해 보도록 한다. “$\frac{1}{3}$은 전체가 3이고 부분이 1입니다. $\frac{2}{6}$는 전체가 6이고 부분이 2입니다. $\frac{3}{9}$은 전체가 9이고 부분이 3입니다(교육부, 2015c, p. 195).”라고 한 뒤에 $\frac{1}{3}=\frac{1\times2}{3\times2}=\frac{1\times3}{3\times3}$의 원리를 이끌어 낸다. 이는 앞에서 설명한 바와 같이 등분할 된 조각의 개수 사이의 관계에만 초점을 두는 것으로 학생들의 오류를 불러일으킬 소지가 있다.

나. 약분 및 통분

<표 III-2>는 제4차 교육과정에서 2009 개정 교육과정까지 교과서 및 교사용 지도서에서 약분과 통분을 어떻게 제시하고 있는지 정리한 것이다. 분석의 3가지 초점에 따라 분석하면 다음과 같다.

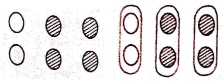
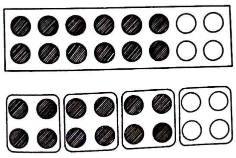
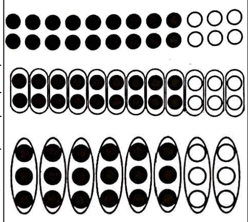
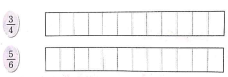
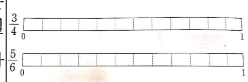
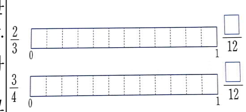
첫째, 구체적인 상황 및 전체 단위와 관련하여 4차~6차 교과서에서는 약분과 통분이 필요한 구체적인 상황을 따로 제시하지 않다가 7차~2009 개정 교과서에서 약분은 대부분 하나의 분수를 제시하고, 통분은 두 분수의 크기를 비교하는 상황으로 제시하고 있다.

둘째, 모델의 사용에서도 4차~6차 교과서와 7차~2009 개정 교과서를 구분할 수 있는데 먼저 4차~6차 교과서에서는 교과서 상에 약분과 통분 관련하여 모델이 직접적으로 제시되지 않았다. 그러나 지도서에는 약분과 관련하여 집합 모델을 활용하여 묶음을 다르게 하여 동치분수로 표현하는 과정을 설명한다. 7차~2009 개정 교과서에서는 약분과 관련된 이러한 집합모델에 대한 설명이 사라지고 교과서나 지도서에 특별한 모델을 제시하기 보다는 수치적으로 설명하고 있다. 오히려 통분 과정에서 띠 모델을 제시하고 있는데 교과서에 제시된 띠 모델은 이미 두 분모의 곱으로 공통분할 되어 있으며, 단위의 수준을 구분하여 표시하지 않고 있다. 구체적으로 2009 개정 교과서에서 $\frac{2}{3}$와 $\frac{3}{4}$의 크기를 비교하기 위해서 두 분수를 통분하는데 이때 중요한 것은 $\frac{2}{3}$와 $\frac{3}{4}$을 비교하는 것이 목적이므로 $\frac{2}{3}$와 $\frac{3}{4}$이라는 것을 드러내면서 동시에 $\frac{8}{12}$과 $\frac{9}{12}$인 수를 서로 비교할 수 있어야 한다. 그러나 교과서에 제시된 내용을 살펴보면 $\frac{8}{12}$과 $\frac{9}{12}$인 두 분수만 비교하는 상황으로 여겨질 수 있다.

셋째, 알고리즘 도출 및 형식화와 관련하여 공통적으로 모델은 두 분수의 크기가 같은 것을

6) 재분할은 전체 단위를 분할하여 만들어진 각각의 부분을 다시 분할하는 과정이라는 점에서 재귀적 분할과 유사하다. 그러나 재귀적 분할(Steffe, 2003)은 재분할 과정과 더불어 세 가지 수준의 단위에 대한 이해까지 포함하는 활동이라는 점에서 차이가 있다.

<표 III-2> 제4차 ~ 2009 개정 교과서 및 교사용 지도서의 약분 및 통분 관련 내용 분석

	구체적 상황	전체 단위	모델 및 분할		알고리즘 도출 및 형식화
4차 (1987)	구체적인 상황 제시하지 않음	수 1	교과서에는 모델이 따로 제시되어 있지 않고 바로 약분과 통분하는 방법을 제시함. 지도서에 약분을 다루는 차시에서만 집합 모델을 활용하여 $\frac{4}{6}$를 묶음에 의해 $\frac{2}{3}$와 같은 기약분수로 나타내는 과정을 설명함.	 $\frac{4}{6}$ → $\frac{2}{3}$ (문교부, 1987b, pp.120-121)	분모와 분자를 그들의 공약수로 나누어 약분하는 방법과 두 분수의 분모의 곱을 하거나 두 분수의 분모의 최소공배수를 통해 통분하는 방법을 직접적으로 제시함.
5차 (1991)	구체적인 상황 제시하지 않음	수 1	교과서에는 모델이 따로 제시되어 있지 않고 바로 약분과 통분하는 방법을 제시함. 지도서에 약분을 다루는 차시에서만 집합 모델을 활용하여 $\frac{12}{16}$를 묶음에 의해 $\frac{6}{8}$, $\frac{3}{4}$과 같이 약분하여 나타내는 과정을 설명함.	 (문교부, 1991b, p. 73)	분모와 분자를 그들의 공약수로 나누어 약분하는 방법과 두 분수의 분모의 곱을 하거나 두 분수의 분모의 최소공배수를 통해 통분하는 방법을 직접적으로 제시함.
6차 (1997)	구체적인 상황 제시하지 않음	수 1	교과서에는 모델이 따로 제시되어 있지 않고 바로 약분과 통분하는 방법을 제시함. 지도서에 약분을 다루는 차시에서만 집합 모델을 활용하여 $\frac{18}{24}$을 묶음에 의해 $\frac{9}{12}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{3}{4}$과 같이 약분하여 나타내는 과정을 설명함.	 (교육부, 1997b, p. 83)	분모와 분자를 그들의 공약수로 나누어 약분하는 방법과 두 분수의 분모의 곱을 하거나 두 분수의 분모의 최소공배수를 통해 통분하는 방법을 직접적으로 제시함.
7차 (2002)	약분: 600명중 400명 통분: 우유와 주스의 양 비교	약분: 600명 통분: 1L	약분과 관련하여 특별한 모델을 사용하지 않음. 통분과 관련하여 모양이 서로 다른 그릇에 들어 있는 두 양을 비교하는 상황으로 시각적으로 비교할 수 없으므로 통분이 필요함을 설명함. 그러나 띠 모델에 나타낼 때에는 이미 $\frac{3}{4}$과 $\frac{5}{6}$가 12등분으로 공통분할 되어 있고 각각을 색칠해 보는 활동을 하여 $\frac{5}{6}$가 더 크다는 것을 확인함.	 (교육인적자원부, 2002a, p. 40)	약분은 약분하는 방법을 직접적으로 제시하였고 통분은 동치분수를 나열하여 분모가 같은 분수끼리 연결하도록 하고 이를 통해 통분하여 크기를 비교할 수 있음을 이끌어 냄.
2007 개정 (2013)	약분: 구체적인 상황 없음 통분: 우유와 주스의 양 비교	약분: 수 1 통분: 1L	약분과 관련하여 특별한 모델을 사용하지 않음. 통분과 관련하여 모양이 같은 그릇에 들어 있는 두 양을 비교하는 상황으로 제시함. 띠 모델에 나타낼 때에는 이미 $\frac{3}{4}$과 $\frac{5}{6}$가 12등분으로 공통분할 되어 있고 각각을 색칠해보는 활동을 하여 $\frac{5}{6}$가 더 크다는 것을 확인함.	 (교육과학기술부, 2013a, p. 24)	약분은 약분하는 방법을 직접적으로 제시하였고 통분은 동치분수를 나열하여 분모가 같은 분수끼리 연결하도록 하고 이를 통해 통분하여 크기를 비교할 수 있음을 이끌어 냄.
2009 개정 (2015)	약분: 나뭇잎 전체 길이의 $\frac{12}{16}$ 통분: 이동한 거리 비교	약분: 나뭇잎 전체 길이 통분: 전체 거리	약분과 관련하여 특별한 모델을 사용하지 않음. 통분과 관련하여 이동한 거리를 비교하는 상황으로 제시함. 띠 모델에 나타낼 때에는 이미 $\frac{2}{3}$와 $\frac{3}{4}$이 12등분으로 공통분할 되어 있고 각각을 색칠해보는 활동을 하여 $\frac{3}{4}$이 더 크다는 것을 확인함.	 (교육부, 2015b, p. 79)	약분은 약분하는 방법을 직접적으로 제시하였고 통분은 동치분수를 나열하여 분모가 같은 분수끼리 연결하도록 하고 이를 통해 통분하여 크기를 비교할 수 있음을 이끌어 냄.

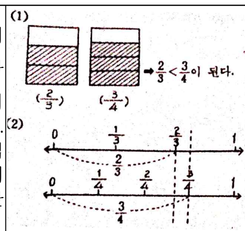
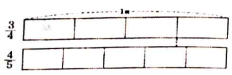
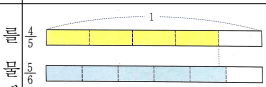
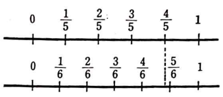
시각적으로 확인하는 정도로만 활용하고 모델을 분할하는 과정에서 알고리즘을 도출하지는 않는다. 대부분 수식으로 약분이나 통분 과정을 설명한다.

다. 분수의 크기 비교

<표 III-3>은 제4차 교육과정에서 2009 개정 교육과정까지 교과서 및 교사용 지도서에서 분수의 크기 비교를 어떻게 제시하고 있는지 정리한 것이다. 분석의 3가지 초점에 따라 분석하면 다음과 같다.

첫째, 구체적인 상황 및 전체 단위와 관련하여 4차 교과서를 제외하고 모두 두 분수의 양을 비

<표 Ⅲ-3> 제4차 ~ 2009 개정 교과서 및 교사용 지도서의 분수의 크기 비교 관련 내용 분석

	구체적 상황	전체 단위	모델 및 분할		알고리즘 도출 및 형식화
4차 (1987)	구체적인 상황 제시하지 않음	수 1	교과서에는 상황이 따로 제시되어 있지 않고 $\frac{2}{3}$와 $\frac{3}{4}$의 크기를 비교하도록 함. 크기를 비교하는 두 가지 방법으로 등분할과 통분을 제시함. 등분할 방법은 모델을 사용하지만(직사각형 모델은 교과서와 지도서에 제시하고, 수직선 모델은 지도서에만 제시), 통분 방법은 수식으로 제시함.	 (문교부, 1987b, pp.128)	두 분모의 최소공배수를 이용하여 통분하는 방법을 직접 제시함. 모델을 통해 형식화로 연결하지는 않음.
5차 (1991)	두 테이프의 길이 비교	1m	4차와 마찬가지로 $\frac{3}{4}$과 $\frac{4}{5}$의 크기를 비교하는 두 가지 방법으로 구체물의 길이를 직접 비교하고 통분을 제시함. 구체물을 이용하는 것은 모델을 사용하지만 통분 방법은 수식으로 제시함.	 (문교부, 1991b, p. 80)	두 분모의 최소공배수를 이용하여 통분하는 방법을 직접 제시함. 모델을 통해 형식화로 연결하지는 않음.
6차 (1997)	두 끈의 길이 비교	1m	5차와 마찬가지로 $\frac{4}{5}$와 $\frac{5}{6}$의 크기를 비교하는 두 가지 방법으로 구체물의 길이를 직접 비교하고 통분을 제시함. 구체물을 이용하는 것은 모델을 사용하지만(띠 모델은 교과서와 지도서에 제시하고, 수직선 모델은 지도서에만 제시), 통분 방법은 수식으로 제시함.	 (교육부, 1997a, p. 39)  (교육부, 1997b, p. 89)	두 분모의 최소공배수를 이용하여 통분하는 방법을 직접 제시함. 모델을 통해 형식화로 연결하지는 않음.
7차 (2002)	두 빵의 양 비교	빵 하나	모델이 따로 제시되지 않고 4-가에서 공부한 내용을 바탕으로 바로 통분하도록 함.	모델 제시하지 않음	분자의 크기를 비교하면 된다는 것을 도출하여 분자끼리 비교하는 것으로 형식화함. 모델과 연결하지는 않음. $(\frac{3}{8}, \frac{1}{6}) \rightarrow \frac{3}{8} \times \frac{1}{6} \rightarrow 18>8 \rightarrow \frac{3}{8} > \frac{1}{6}$
2007 개정 (2013)	과자와 빵 중 밀가루의 양 비교	밀가루 한 컵	7차와 마찬가지로 모델을 제시하지 않고 앞에서 학습한 내용을 바탕으로 함. 분수의 크기를 비교하려면 어떻게 해야 하는지 학생에게 묻고 있지만 교과서 및 교사용지도서에서는 통분 방법만 다룸.	모델 제시하지 않음	두 분모의 곱이나 최소공배수를 이용하여 통분하는 방법을 직접 제시함. 모델을 통해 형식화로 연결하지는 않음.
2009 개정 (2015)	물통에 들어있는 물의 양 비교	물통에 들어가는 전체 양	직관적 비교가 불가능한 상황을 제시하여 통분의 필요성을 제시함. 두 분수의 크기를 비교하는 방법을 학생에게 발문하고 그에 대한 해결방법으로 그림, 통분을 제시하지만 실제 교과서에서는 통분만 다룸.	모델 제시하지 않음	두 분모의 곱이나 최소공배수를 이용하여 통분하는 방법을 직접 제시함. 모델을 통해 형식화로 연결하지는 않음.

교하는 상황을 제시하고 있다. 전체 단위는 모두 등분할 할 수 있는 연속량 전체로 제시하고 있다.

둘째, 모델 및 분할과 관련하여 4차~6차 교과서에서는 분수의 크기를 비교하는 두 가지 방법으로 하나는 시각적 모델로 직접 비교하는 등분할 방법을 제시하고 다른 하나는 통분 방법을 수식으로 제시하고 있다. 이에 따라 모델은 각각의 분수를 세 가지 수준의 단위로 제시한다기보다는 두 가지 수준의 단위만 사용하여 통분을 하지 않고도 시각적으로 양을 비교하는 용도로 사용하고 있다. 7차~2009 개정 교과서에서는 모델을 따로 제시하지 않고 분수의 크기를 비교하는 방법도 바로 통분 방법으로 수식적으로 설명하고 있다. 구체적으로 7차 교사용 지도서에서 "분모가 같은 두 분수의 크기 비교는 분자의 크기를 비교하면 된다는 것을 4-가 단계에서 공부했다. 분모가 다른 두 분수의 크기는 어떻게 비교할 수 있는지 말하여 보게 한다. 이미 크기가 같은 분수에서와 통분의 도입 장면에서 경험한 상황이므로 공통분모를 찾아 통분해야 한다는 것을 알고 있을 것이다(교육인적자원부, 2002b, p. 133)."라고 설명하면서 앞에서 학습한 내용을 적용하여 바로 분수의 크기를 비교하도록 한다. 2007 개정 교사용 지도서에서도 "여기서는 이미 알고 있는 사실인 분모가 다른 두 분수의 크기를 비교하려면 통분이 필요하고 통분을 하려면 공통분모를 찾아야 함을 상기시키고 이를 통하여 두 분수의 크기를 비교하는 방법을 찾게 한다(교육과학기술부, 2013b, p. 132)."고 제시하면서 앞에서 학습한 통분 방법을 바로 이용하게 하고 있다. 2009 개정 교사용 지도서에서는 이전의 교사용 지도서와는 다르게 통분의 필요성을 "마지막 임무는 어느 물통에 물이 더 많이 들어 있는지 알아맞히는 것이었습니다. 두 물통에는 같은 양의 물이 들어가는데 모양이 다릅니다(교육부, 2015c, p. 206)."라고 설명하면서 스토리텔링에서 상황적으로 제시하였지만 마찬가지로 직관적으로 비교되지 않는 상황에서 통분이 필요하다는 것을 이끌고 그대로 수식으로 통분 과정을 설명한다.

셋째, 알고리즘과 관련하여 대부분 수식으로 두 분모의 곱이나 최소공배수를 공통분모로 하여 통분함으로써 크기를 비교하는 방법을 형식화하고 있다. 구체적으로 제4차 교과서에서는 교사용 지도서의 참고사항에 "통분은 대소 비교를 위한 수단으로 그치는 것이 아니고 분모가 같다는 것은 셀 수 있는 단위(단위분수)가 같다는 뜻이므로 가감산이 자유로와진다는 것도 이해하도록 해야 한다(문교부, 1987b, p.129)"라고 제시하면서 이분모분수의 덧셈과 뺄셈에서 기초적인 활동이 된다는 것을 암시하고 있다.

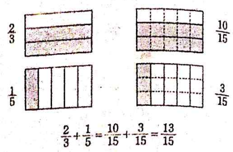
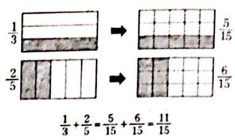
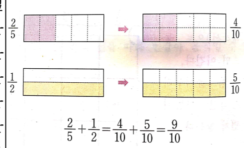
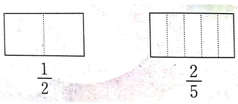
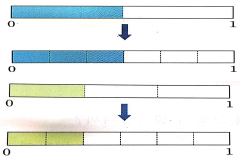
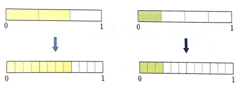
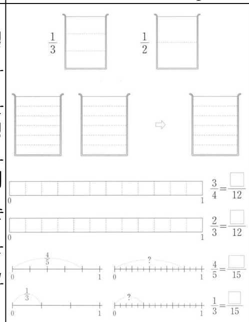
3. 이분모분수의 덧셈과 뺄셈

<표 III-4>는 제4차 교육과정에서 2009 개정 교육과정까지 이분모분수의 덧셈과 뺄셈을 어떻게 제시하고 있는지 정리한 것이다. 분석의 3가지 초점에 따라 분석하면 다음과 같다.

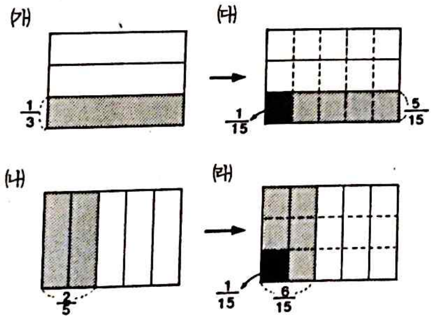
첫째, 구체적인 상황 및 전체 단위와 관련하여 4차 교과서를 제외하고 구체적인 상황을 제시하고 있다. 두 분수의 양이 가리키는 대상의 단위와 관련하여 2009 개정 교과서는 다른 교과서와 차이가 있는데 구체적으로 이전의 교과서에서는 같은 전체의 두 부분을 서로 더하는 상황으로 제시한 반면, 2009 개정 교과서는 계량컵 1컵으로 단위의 크기를 통일하고 두 분수를 더하는 상황으로 제시하고 있다. 이는 분수의 덧셈과 뺄셈에서 지시하는 대상의 단위 크기가 서로 변하지 않고 같아야 한다는 것을 다루기에 매우 좋은 소재이나 이에 초점을 두어 설명하고 있지는 않다.

둘째, 모델 및 분할과 관련하여 모두 모델을

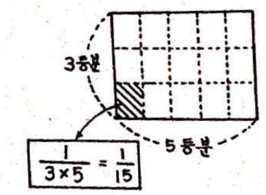
<표 III-4> 제4차 ~ 2009 개정 교과서 및 교사용 지도서의 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 관련 내용 분석

	구체적 상황	전체 단위	모델 및 분할		알고리즘 도출 및 형식화
4차 (1987)	덧셈 상황이 제시되지 않음.	수1 (직사각형 전체)	교과서에 이미 공통분할 되어 있고 색칠된 직사각형 모델이 제시되어 있음. 지도서에서 통분의 필요성을 설명하고 있음. 공통분할을 통해 단위분수를 찾아낼 것을 강조함. 단위분수의 크기를 결정하고 단위분수가 몇 개 있는 상황인지 알아봄.	 (문교부, 1987b, pp.138)	모델은 단위분수의 개수를 통해 분수의 덧셈 결과를 알아보는 것이 초점이고 분수의 성질을 이용하여 동치분수를 구하는 방법으로 알고리즘을 설명함. 이후 차시에서 뺄셈 이외에는 그림을 제시하지 않고 수식으로 해결함.
5차 (1991)	채송화와 봉숭아를 심은 부분	꽃밭 전체	공통분할 되어 있고 색칠된 직사각형 모델이 제시되어 있음. 지도서에서 통분의 필요성은 4학년 때 분모가 같은 분수의 덧셈을 배웠기 때문에 동분모로 고치게 한다고 함. 이때 공통분할을 통해 단위분수를 찾아낼 것을 강조하고 있으며 단위분수의 크기를 결정하고 단위분수가 몇 개 있는 상황인지 알아봄.	 (문교부, 1991b, p. 116)	모델은 단위분수의 개수를 통해 분수의 덧셈 결과를 알아보는 것이 초점이고 두 분모의 최소공배수와 분수의 성질을 이용하여 동치분수를 구하는 방법으로 알고리즘을 설명함. 이후 차시에서 뺄셈 이외에는 그림을 제시하지 않고 수식으로 해결
6차 (1997)	채송화와 봉선화를 심은 부분	꽃밭 전체	공통분할 되어 있는 직사각형 모델이 제시되어 있음. 지도서에서 통분의 필요성은 4학년 때 분모가 같은 분수의 덧셈을 배웠기 때문에 동분모로 고치게 한다고 함. 이때 공통분할을 통해 단위분수를 찾아낼 것을 강조하고 있으며 단위분수의 크기를 결정하고 단위분수가 몇 개 있는 상황인지 알아봄.	 (교육부, 1997a, p. 86)	모델은 단위분수의 개수를 통해 분수의 덧셈 결과를 알아보는 것이 초점이고 두 분모의 최소공배수, 두 분수의 곱과 분수의 성질을 이용하여 동치분수를 구하는 방법으로 알고리즘을 설명함. 최소공배수, 두 분모의 곱을 모두 허용하지만 최소공배수가 더 간단하다는 것을 알게 함.
7차 (2002)	채송화와 봉선화를 심은 부분	꽃밭 전체	각각 분모만큼 등분할 된 모델을 제시하고 $\frac{1}{2}$과 $\frac{2}{5}$만큼 색칠하도록 함. 직관적으로 답이 얼마가 되는지 어림해보고 정확한 답을 이야기할 수 없으므로 통분이 필요하다는 것을 이끌어 냄.	 (교육인적자원부, 2002a, p. 66)	정작 분수의 덧셈과 뺄셈에서 통분을 하는 과정을 모델로 나타내지 않고, 두 분수를 통분하는 상황으로만 모델을 사용함. 그림은 두 분수를 더하거나 뺄 수 없다는 것을 알아내는 정도로만 사용하고 있음.
2007 개정 (2013)	채송화와 봉선화를 심은 부분	꽃밭 전체	7차와 마찬가지로 학생들에게 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$이 얼마일지 생각해보고 합을 말한 후에 정확한 답을 이야기할 수 없다는 것을 알게 함. 띠 모델에 점선의 굵기를 다르게 하여 단위의 수준을 나타냄. 그러나 재귀적 분할 과정을 설명하지는 않음(분수의 뺄셈도 같은 방법).	 (교육과학기술부, 2013a, p. 35)  (교육과학기술부, 2013a, p. 38)	모델을 이용하여 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$를 도출하지만, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1\times3}{2\times3}+\frac{1\times2}{3\times2}=\frac{5}{6}$와 연결하지는 않음. 위의 과정은 $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$을 제시하여 공통분모를 두 분모의 곱으로 하거나, 두 분모의 최소공배수로 통분하는 과정을 식으로 지도함.
2009 개정 (2015)	밀가루 $\frac{1}{3}$컵과 $\frac{1}{2}$컵을 더하는 상황	밀가루 1컵	각 분모만큼 등분할 되어 있는 그림에 $\frac{1}{3}$과 $\frac{1}{2}$을 색칠해보게 한 후 합을 어림해보게 함. 통분의 필요성을 다루지 않고 바로 통분을 하는 과정으로 넘어감. 전체를 두 분모의 곱으로 공통분할 되어 있는 직사각형에 $\frac{2}{6}$와 $\frac{3}{6}$을 더함. 이 때 단위의 수준을 구분하는 눈금 차이 없음. 이것은 $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$보다는 $\frac{2}{6}+\frac{3}{6}$을 한 것이라고 볼 수 있음.	 (교육부, 2015b, pp. 102-109)	모델을 이용하여 $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{5}{6}$를 도출하지만, $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1\times2}{3\times2}+\frac{1\times3}{2\times3}=\frac{5}{6}$와 연결하지는 않음. 위의 과정은 $\frac{3}{4}+\frac{1}{6}$을 제시하여 공통분모를 두 분모의 곱으로 하거나, 두 분모의 최소공배수로 통분하는 과정을 식으로 지도함.

통해 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 과정을 설명하고 있다. 특히 4차~6차 교과서는 두 방향으로 등분할 할 수 있는 직사각형 모델을 사용하고 있다. 유사하게 도출하고 있는 이 과정을 가장 구체적으로 설명하고 있는 5차 교사용지도서를 중심으로 살펴보면 다음과 같다(문교부, 1991b, p. 116).

> 분모가 다른 진분수의 덧셈을 연속량의 등분할의 조작을 통하여 계산 원리를 이해하게 한다.
>
> 
>
>
> 4학년 때 분모가 같은 분수의 덧셈을 배웠기 때문에 분모가 다른 진분수의 덧셈도 분모가 같은 분수로 고쳐 계산하게 하여 그 계산 원리를 알게 한다. 즉, $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$의 덧셈을 앞의 그림을 통하여 그 계산 과정을 알아보게 한다.
> 앞의 연속량의 조작에서 (가)는 3등분 하고, (나)는 5등분 하여 각각 $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$에 해당하는 빗금을 치게 한다. 그리고 직사각형 (다), (라)와 같이 각각 15등분 되게 하여 빗금친 작은 직사각형인 단위 분수(■)의 개수를 세어 그 분수의 크기를 나타내게 한다. 즉, (다)에서는 $\frac{1}{15}$이 5, (라)에서는 $\frac{1}{15}$이 6임을 확인하여 알게 한다.
> 이와 같은 조작을 통하여 그림 (가)와 (다), (나)와 (라)는 서로 넓이가 같음을 알고 $\frac{1}{3}$과 $\frac{5}{15}$는 $\frac{1}{3}=\frac{5}{15}$, $\frac{2}{5}$와 $\frac{6}{15}$은 $\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$이 됨을 알게 한다.

우선 이분모분수의 덧셈에서 통분을 하는 이유를 4학년에서 동분모분수의 덧셈을 배웠기 때문이라고 제시하고 있다. 그리고 직사각형 모델을 사용하는데 직사각형 모델의 세로를 3등분하여 $\frac{1}{3}$을 나타내고 다른 직사각형에 가로를 5등분하여 $\frac{2}{5}$를 나타낸다. 이제 통분을 하기 위해서 직사각형 (다), (라)와 같이 각각 15등분되게 한다고 하였는데 각각을 다시 5등분, 3등분하는 과정으로 설명하지 않으며 (가) 직사각형이 (다) 직사각형으로 변한 것이 아니라 (가) 직사각형과 (다) 직사각형의 크기를 서로 비교하게 하고 있다. 왜 두 분모의 곱을 하는지는 4차 교사용 지도서에 보다 구체적으로 제시되는데 다음과 같다(문교부, 1987b, p. 138).

> 따라서 단위가 되는 부분의 크기를 같게 해서 부분의 개수의 셈이 뜻이 있도록 하는 것이 바로 통분이라 하겠다.
>
> 
>

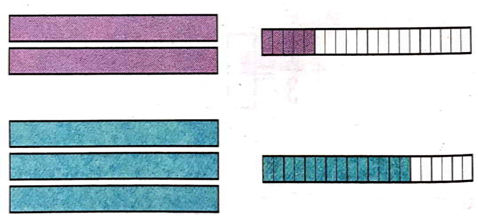
위의 방법은 두 분모를 곱하는 이유를 설명할 수 있는 좋은 예라고 볼 수 있다. 그러나 단위분수의 크기를 찾고 단위분수의 개수를 세어 통분하는 과정을 거치기 때문에 분자에도 같은 수를 곱하는 과정을 설명하지는 않고 있다.

6차의 특징은 진분수의 덧셈과 뺄셈은 직사각형 모델을 이용하여 4, 5차와 비슷하게 다루고 있으나 대분수의 덧셈과 뺄셈은 띠 모델을 이용하고 있다는 점이다. 또한 등분할을 표시하는 점선의 굵기를 다르게 제시하여 단위의 수준을 구분하는 것을 시도하고 있다.

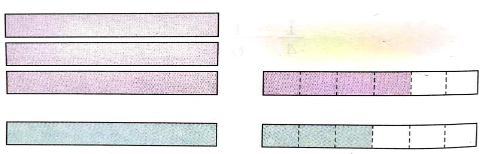
교사용 지도서에도 "$2\frac{1}{4}$과 $3\frac{7}{10}$의 합을 구하기 위해서 그림을 어떻게 해야 하는지 말하게 한다.

그림을 교과서의 그림처럼 분수 부분을 점선으로 나누는 것이 통분과 관련이 있음을 알게 한다. 즉, $2\frac{1}{4}$과 $3\frac{7}{10}$의 합을 알기 위해서 교과서의 그림처럼 점선으로 나누어야 하며 그것이 바로 통분하는 것과 같은 사실을 알게 한다(교육부, 1997b, p. 156).”와 같이 설명하면서 의도적으로 점선의 굵기를 다르게 하여 통분 과정을 설명하도록 하였다는 것을 알 수 있다.

그러나 [그림 III-1]의 (a)와 같이 대분수의 덧셈을 설명하는 과정에서는 점선의 굵기를 구분하여 제시하였으나 이후의 대분수의 뺄셈에서는 [그림 III-1]의 (b)와 같이 다시 똑같은 굵기의 점선으로 제시하고 있어 그 의도가 일관성있게 반영되지 못했다는 것을 알 수 있다.



(a) 대분수 덧셈 $2\frac{1}{4}+3\frac{7}{10}$에 제시된 모델
(교육부, 1997a, p. 88)



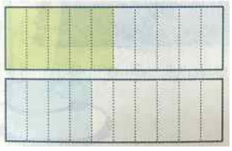
(b) 대분수 뺄셈 $3\frac{2}{3}-1\frac{1}{2}$에 제시된 모델
(교육부, 1997a, p. 94)

[그림 III-1] 6차 교과서 대분수의 덧셈과 뺄셈에 제시된 모델

진분수의 뺄셈은 교과서의 구성에서 진분수의 덧셈과 크게 차이가 나지 않은 것처럼 보이나 교사용 지도서에서 제시하고 있는 과정은 인지적으로 매우 다른 수준으로 접근하고 있다. $\frac{2}{3}$와 $\frac{1}{4}$을 그림으로 나타내게 한 다음 $\frac{2}{3}$와 $\frac{1}{4}$의 차를 구하기 위해서 그림을 똑같은 크기가 되도록 나눈다고 설명한다. 그리고 “3등분 된 것은 각각 4등분하고 4등분 된 것은 각각 3등분한다(교육부, 1997b, p. 161)”로 재분할 과정을 설명하고 있다. 이후에 똑같은 크기로 나눈다는 것이 통분하는 의미라고 설명하면서 통분은 수의 배가 아니라 재분할임을 강조한다.

7차부터 2009 개정 교과서를 살펴보면 직사각형 모델이 사라지고 띠 모델로 이분모분수의 덧셈 과정을 설명하고 있다. 이는 직사각형의 넓이를 지도하는 순서와 연관이 있다.

7차 교사용 지도서에서는 단원 도입에서 원으로 된 분수 모델인 $\frac{1}{3}$과 $\frac{1}{4}$을 더해 보는 활동에서 $\frac{1}{3}$을 둘 또는 셋으로 나누어도 크기가 변하지 않고 $\frac{1}{4}$을 둘 또는 넷으로 나누어도 크기가 변하지 않음을 보임으로써 단위 구간을 재분할하는 과정을 설명하고 있으나 실제 본 차시에서는 이러한 재귀적 분할 과정을 제시하지 않고 있다. 구체적으로 진분수의 덧셈 $\frac{1}{2}$과 $\frac{2}{5}$를 그림에 표현하고 결과를 어림해보는 활동을 통해서 통분의 필요성을 설명한다. 그러나 통분을 통한 공통분모의 필요성은 모델에서 두 번째 수준의 단위 크기가 다르기 때문이라고 설명하기 보다는 앞에서 학습한 내용과 연결하여 설명한다. 진분수의 덧셈에서 통분을 할 때에는 점선의 굵기를 구분하지 않은 반면, 진분수의 뺄셈에서는 점선의 굵기를 구분하지만 이를 설명하는 과정은 거의 비슷하다. 모델은 이분모분수의 덧셈과 뺄셈의 통분 과정을 나타내기 보다는 두 분수를 더하거나 뺄 수 없다는 것을 알아내는 정도로만 사용하고 있다([그림 III-2] 참고).



(a) 분수의 덧셈에서 $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$의 통분 모델
(교육인적자원부, 2002a, p. 66)

(b) 분수의 뺄셈에서 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$의 통분 모델
(교육인적자원부, 2002a, p. 72)

[그림 III-2] 7차 교과서 이분모분수의 덧셈과 뺄셈의 통분과정에서 제시된 모델

2007과 2009 개정에서도 7차와 비슷한 방법으로 모델과 분할 과정을 설명하고 있다. 모델에 점선의 굵기를 다르게 하여 표시한 경우가 간혹 있다고 하더라도 실제 지도 내용에서 이를 의도적으로 초점을 두어 설명하지는 않는다.

셋째, 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 과정을 모델이나 분할 과정을 통해 설명하고 있지만 이를 알고리즘으로 도출할 때에는 제한된 내용만 강조하고 있다. 구체적으로 2009 개정 교과서를 살펴보면 $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$을 하기 위해 들이 모델을 사용하여 $\frac{1}{3}$은 $\frac{2}{6}$로 $\frac{1}{2}$은 $\frac{3}{6}$으로 나타내고 $\frac{2}{6}+\frac{3}{6}$을 통해 $\frac{5}{6}$를 구한다. 이 과정은 모델을 사용하여 알고리즘($\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{5}{6}$)과 연결한 것이라고 볼 수 있다. 그러나 통분을 하는 과정 자체가 모델에 구체적으로 제시되었다고 볼 수 없고 이 때의 모델 사용은 통분이 이미 완료된 분수를 표현하는 정도에만 그쳤다고 볼 수 있다. 이분모분수의 덧셈에서 알고리즘으로 일반화할 수 있는 과정($\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1\times 2}{3\times 2}+\frac{1\times 3}{2\times 3}=\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{5}{6}$)은 모델이나 분할 과정과 연결하기 보다는 이전 단원에서 학습한 통분의 과정과 연결하여서만 설명하고 있다.

Ⅳ. 결론 및 논의

본 연구는 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 교육 방향을 탐색하기 위해서 단위 추론 및 재귀적 분할을 중심으로 이분모분수의 덧셈과 뺄셈에서 강조해야 할 사항을 살펴보았다. 또한 단위 추론을 중심으로 제4차 수학과 교육과정부터 2009 개정 수학과 교육과정에 의한 교과서 및 교사용 지도서를 분석하였다. 분석 결과를 바탕으로 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 교육에서 단위 추론과 관련하여 재고할 만한 사항들을 논의하면 다음과 같다.

첫째, 이분모분수의 덧셈과 뺄셈에서 단위 추론과 관련하여 가장 먼저 고려해야 할 사항은 연산에 관여하는 세 가지 양의 전체 단위가 변하지 않고 그대로 유지된다는 것을 명시적으로 지도해야 한다는 것이다. <표 III-4>를 보면 이분모분수의 덧셈과 뺄셈에서 대부분 하나의 전체 단위의 두 부분을 더하는 상황(예, 전체 꽃밭에서 채송화와 봉선화를 심은 부분의 합)으로 제시하고 있고 2009 개정 교과서에서만 $\frac{1}{3}$컵과 $\frac{1}{2}$컵을 더하는 상황으로 제시하고 있다. 전자의 상황에서는 전체-부분으로서의 분수를 사용한 것이고 각 부분의 전체가 같은 대상이므로 전체 단위가 동일하다는 사실을 알 수 있다. 후자의 상황에서는 측정으로서의 분수를 사용한 것이고 '컵'이라는 일정한 측정단위를 제시하여 전체 단위가 변하지 않고 유지된다는 것을 알 수 있다. 그러나 전체 단위는 문장제의 상황에서만 제시될 뿐, 이를 지도하는 과정에서 두 분수의 전체 단위가 무엇인지, 두 분수의 전체 단위가 같아야 하는 이유가 무엇인지를 명시적으로 지도하고 있지는 않다.

이분모분수의 덧셈과 뺄셈을 지도할 때 전체

단위가 변하지 않고 고정된다는 사실을 현재와 같은 방법으로 암묵적으로 다룰 경우에는 학생들의 심각한 오개념을 초래할 수 있다. 김미영과 백석윤(2010)의 연구에서 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 상황에서 두 분수의 전체 단위를 다르게 하여 인지적인 장애를 보인 학생들의 사례는 이에 대한 근거가 된다.

고정된 전체 단위를 명시적으로 지도하기 위한 방안 중 하나는 2009 개정 교과서의 상황과 같이 이분모분수의 덧셈과 뺄셈에서 측정으로서의 분수를 적극 활용하는 것이다. 측정으로서의 분수는 분수의 절대적인 크기를 나타내므로 전체 단위를 고정하는 데 유용하게 활용할 수 있다(이지영, 방정숙, 2014). 또는 4차~2007 개정 교과서의 상황과 같이 전체-부분으로서의 분수를 활용한다면 각 분수의 전체 단위가 무엇인지를 생각해보게 하여 두 분수의 전체 단위가 서로 다른 것은 분수의 덧셈 상황이 아니라는 것을 인식하게 할 수도 있다.

둘째, 통분의 필요성은 두 번째 수준의 단위와 관련하여 현재 수준의 단위를 이용하여서는 두 분수의 합을 하나의 양으로 표현할 수 없다는 것을 인식하는 방법으로 지도해야 한다. <표 III-4>를 보면 2007 개정 교과서에서 모델을 통해 어림해 보게 하고 이를 하나의 양으로 표현할 수 없다는 것을 알게 한다. 그러나 두 번째 수준의 단위의 크기에 초점을 두고 두 분수를 공통으로 측정할 수 있는 세 번째 수준의 단위가 필요하다는 것으로 연결하기 보다는 앞에서 동분모분수의 덧셈과 뺄셈을 학습하였기 때문에 동분모분수로 바꾸기 위해서 통분이 필요하다고 설명하고 있다. 이분모분수의 덧셈과 뺄셈의 계산 원리나 이유를 개념적으로 이해하기 위해서는 통분을 왜 해야 하는지를 학생들이 이해하기 쉽도록 설명할 필요가 있다. 따라서 모델을 통해 두 번째 수준의 단위 크기가 서로 다른 상황에서 인지적인 갈등을 느끼게 하고 세 번째 수준의 단위를 찾는 필요성을 부각하여 지도할 필요가 있다. 변희현(2009)은 이러한 과정이 자연수, 유리수, 실수 범위의 덧셈과 뺄셈을 통합하는 아이디어가 된다는 점을 강조한 바 있다.

셋째, 재귀적 분할을 통해 세 번째 수준의 단위를 찾고 이를 융통적으로 사용하는 경험을 충분히 제공하고 이를 알고리즘과 연결하여야 한다. 재귀적 분할이 갖는 교육적 의의는 다음과 같다. 먼저 학생들이 분수의 양을 재귀적으로 분할하는 과정에서 하나의 양을 세 가지 수준의 단위로 표현하고 이를 사용하는 가치로운 경험에 참여할 수 있도록 돕는다.

또한, 통분을 할 때 두 분수의 분모를 곱하는 것의 의미가 자연수의 배 개념처럼 크기가 늘어나는 것이 아니라 전체를 재분할하는 과정으로 나뉜 조각이 더 작은 조각으로 잘게 분할되는 것이라는 점을 인식하는 데 도움이 된다. <표 III-1>을 보면 현재 교과서에서는 동치분수를 만들 때 0이 아닌 같은 수를 곱하거나 나누는 과정을 강조하지만 그 과정이 어떤 의미를 갖는지는 다루지 않고 있다는 것을 알 수 있다. 따라서 동치분수를 학습할 때부터 부분을 각각 다시 재분할하는 과정을 거쳐 재귀적 분할에 참여할 수 있도록 지도할 필요가 있다.

재귀적 분할은 모델 및 분할 과정을 알고리즘과 연결하는 데 결정적인 역할을 하기도 한다. 많은 연구자들은 분수의 덧셈과 뺄셈을 하나의 계산 절차로만 다루고 이를 익히는 것에 치중하는 현재의 방법을 비판하고 있다(예, 김미영, 백석윤, 2010; 방정숙, 이지영, 2009). 재귀적 분할은 각각의 부분이 다시 다른 분수의 분모만큼 분할되는 과정에서 두 분모의 곱을 설명하고 분자에 다시 같은 수를 곱하는 과정을 모두 설명할 수 있다.

Steffe와 Olive(2010)는 재귀적 분할이 분수의 덧셈뿐만 아니라 분수의 곱셈 및 나눗셈에서도

결정적인 역할을 한다는 것을 밝힌 바 있다. 따라서 이분모분수의 덧셈과 뺄셈을 지도할 때에는 재귀적 분할 과정에 참여할 수 있도록 안내할 필요가 있으며 모델을 사용할 때에는 분할하는 점선의 굵기를 구분하여 다양한 수준의 단위를 표시할 필요가 있다. 이러한 과정에서 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 알고리즘과 유기적으로 연결할 수 있도록 도모해야 한다.

요약하면 분수의 덧셈과 뺄셈을 개념적으로 이해하기 위해서는 분수의 다양한 단위의 구조를 경험하고 이를 융통적으로 사용하는 과정이 핵심이다. 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 과정에서 단위는 고정되어 있으나 단위의 구조가 복잡해지는 과정을 이해할 필요가 있다. Izsák 외(2008)는 분수의 덧셈 수업 과정에서 교사와 학생이 단위 구간을 분할하는 과정에서 나타난 미묘한 차이가 학생이 학습하는 데 상당한 결과를 가져온다고 지적하였다. 이러한 양의 단위는 모든 덧셈적 구조에 내재되어 있으므로(Behr et al., 1994), 수의 범위에 따라 더욱 복잡해지는 단위의 구조를 강조하면 보다 체계적이고 일관성있는 이분모분수의 덧셈과 뺄셈을 지도할 수 있을 것이다. 이분모분수의 덧셈과 뺄셈에서 세 가지 수준의 단위의 구조에 대한 풍부한 경험은 전체 단위가 상황에 따라 변하는 분수의 곱셈과 나눗셈, 비율, 비례 추론에서 더욱 복잡한 단위 추론과 자연스럽게 연결될 수 있을 것이다.

위의 논의 및 시사점을 바탕으로 2015 개정 교육과정에 의한 교과서는 이분모분수의 덧셈과 뺄셈을 개념적으로 이해하는 데 도움이 되는 방향으로 개발되기를 기대한다.

참고문헌

교육과학기술부 (2013a). **수학 5-1**. 서울: 천재교육.

교육과학기술부 (2013b). **수학 지도서 5-1**. 서울: 천재교육.

교육부 (1997a). **수학 5-1**. 충남: 국정교과서 주식회사.

교육부 (1997b). **초등학교 교사용 지도서 수학 5-1**. 충남: 국정교과서 주식회사.

교육부 (2015a). **수학과 교육과정**(교육부 고시 제 2015-74호 별책 8).

교육부 (2015b). **수학 5-1**. 서울: 천재교육.

교육부 (2015c). **교사용 지도서 수학 5-1**. 서울: 천재교육.

교육인적자원부 (2002a). **수학 5-가**. 서울: 대한교과서 주식회사.

교육인적자원부 (2002b). **수학 5-가 교사용 지도서**. 서울: 대한교과서 주식회사.

김미영, 백석윤 (2010). 분수의 덧셈, 뺄셈에서 나타나는 인지적 장애 현상 분석. **한국초등수학교육학회지, 14**(2), 241-262.

문교부 (1987a). **산수 5-1**. 서울: 국정교과서 주식회사.

문교부 (1987b). **국민학교 교사용 지도서 산수 5-1**. 서울: 국정교과서 주식회사.

문교부 (1991a). **산수 5-1**. 서울: 국정교과서 주식회사.

문교부 (1991b). **국민학교 교사용 지도서 산수 5-1**. 서울: 국정교과서 주식회사.

방정숙, 이지영 (2009). 분수의 덧셈과 뺄셈에 관한 초등학교 수학과 교과용 도서 분석. **한국초등수학교육학회지, 13**(2), 285-304.

변희현 (2009). 측정의 관점에서 본 덧·뺄셈의 통합적 이해. **수학교육학연구, 19**(2), 307-319.

이지영 (2015). **초등학교 학생들의 단위 추론을 기반으로 한 분수 나눗셈의 학습경로 개발**. 한국교원대학교 박사학위논문.

이지영, 방정숙 (2014). 분수의 다양한 의미에서 단위에 대한 초등학교 6학년 학생들의 이해

실태 조사. **수학교육학연구, 24**(1), 83-102.

최근배 (2015). 한국과 미국(Harcourt Math)의 초등수학 교과서 비교 분석: 분수와 소수의 도입과 연산을 중심으로. **한국초등수학교육학회지, 19**(1), 17-37.

Barnett-Clarke, C., Fisher, W., Marks, R., & Ross, S. (2010). *Developing essential understanding of rational numbers for teaching mathematics in grades 3-5*. Reston, VA: NCTM.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1994). Units of quantity: A conceptual basis common to additive and multiplicative structures. In G. Harel, & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*(pp. 121-176). Albany, NY: State University of New York Press.

Izsák, A., Tillema, E., & Tunç-Pekkan, Z. (2008). Teaching and learning fraction addition on number lines. *Journal for Research in Mathematics education, 39*(1), 33-62.

Reys, R. E., Lindquist, M. M., Lamdin, D. V., & Smith, N. L. (2009). *Helping children learn mathematics* (9th ed.). NY: John Wiley & Sons. **초등교사를 위한 수학과교수법**. 박성선, 김민경, 방정숙, 권점례 역(2012). 서울: 경문사.

Schwartz, J. L. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp.41-52). Reston, VA: Erlbaum.

Steffe, L. P. (2003). Fractional commensurate, composition, and adding schemes learning trajectories of Jason and Laura: Grade 5. *Journal of Mathematical Behavior, 22*, 237-295.

Steffe, L. P. (2004). On the construction of learning trajectories of children: The case of commensurate fractions. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 129-162.

Steffe, L. P. & Olive, J. (2010). *Children's fractional knowledge*. New York: Springer.

Reconsideration of Teaching Addition and Subtraction of Fractions with Different Denominators: Focused on Quantitative Reasoning with Unit and Recursive Partitioning

Lee, Jiyoung (Paldal Elementary School)
Pang, JeongSuk (Korea National University of Education)

This study clarified the big ideas related to teaching addition and subtraction of fractions with different denominators based on quantitative reasoning with unit and recursive partitioning. An analysis of this study urged us to re-consider the content related to the addition and subtraction of fraction. As such, this study analyzed textbooks and teachers' manuals developed from the fourth national mathematics curriculum to the most recent 2009 curriculum. In addition and subtraction of fractions with different denominators, it must be emphasized the followings: three-levels unit structure, fixed whole unit, necessity of common measure and recursive partitioning. An analysis of this study showed that textbooks and teachers' manuals dealt with the fact of maintaining a fixed whole unit only as being implicit. The textbooks described the reason why we need to create a common denominator in connection with the addition of similar fractions. The textbooks displayed a common denominator numerically rather than using a recursive partitioning method. Given this, it is difficult for students to connect the models and algorithms. Building on these results, this study is expected to suggest specific implications which may be taken into account in developing new instructional materials in process.

* Key Words : Addition and subtraction of fractions with different denominators(이분모분수의 덧셈과 뺄셈), Quantitative reasoning with unit(단위 추론), Recursive partitioning(재귀적 분할), Analysis of textbooks(교과서분석)

논문접수 : 2016. 8. 10
논문수정 : 2016. 9. 9
심사완료 : 2016. 9. 9