대한수학교육학회지 <학교수학> 제 18 권 제 3 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 18, No. 3, 527 ~ 539. Sep 2016

"평행사변형은 사다리꼴이다."에서 '이다'[1] 에 대한 고찰

이 규 희* · 최 영 기**

"평행사변형은 사다리꼴이다."에서 '이다'는 애매하고 그 의미가 매우 풍부한 기호이다. 이 연구는 일상적 언어 '이다'가 문맥과 상황에 따라 다양하게 해석되는 의미원소임을 밝히고 수학에서 사용되는 '이다'의 의미를 구분하여 논의한다. 그리고 '동일성'의 관념에 주목하여, 수학적으로 '같음'을 나타내기 위해 사용되기도 하는 '이다'를 동치관계의 개념과 Van Hieles의 기하 사고 수준 이론으로 재해석하여 살펴본다. 수학적 기호로서 '이다'에 대한 분석 결과 '이다'는 수학적 아이디어를 의미 있게 생성하는 데 중요한 의의가 있다고 판단된다.

Ⅰ. 서 론

수학적 지식은 "p이면 q이다."와 같은 조건명제로 표현되는 경우가 많다. 예를 들어, 중학교 수학 2의 사각형의 단원에서 평행사변형의 정의와 성질 및 평행사변형이 되는 조건은 "p이면 q이다."의 문장구조로 기술된다. 이러한 수학 명제는 참 또는 거짓을 구분할 수 있는 문장이나 수식으로 정의되고, 참인 명제는 수학적 논리에 의해 그 의미가 확실하게 해석될 것으로 간주되는 인식론적 신념이 있다(Muis, 2004; Schoenfeld, 1988, 1989).

수학 교실에서는 "p이면 q이다."로 표현된 수학적 지식을 이해하기 위해 일반적으로 조건 p와 결론 q에 주목한다. "평행사변형은 사다리꼴이다."는 평행사변형과 사다리꼴의 정의에 의해 정당화되므로, 교사들은 이해가 부족한 학생들을 위해 조건 p에서 결론 q에 이르는 수학적 논리의 절차를 강조한다.

그러나 사각형의 정의로부터 정확한 결론에 도달하는 van Hieles 3수준(관계적/비형식적 연역 수준) 이상의 학생들 중에서도 사각형의 계층적 분류의 아이디어에 대해서는 부정적인 신념을 보이는 경우가 많다(Clements, Battista, 1992; De Villiers, 1987, 1994, 2010). 이에 De Villiers(1994)는 사각형의 계층적 분류에 대한 기능적 이해(functional understanding)와 더불어 일상적 언어의 적절한 해석이 중요함을 주장하였다. 평행사변형과 사다리꼴 및 '이다'는 독립적으로 여러 의미를 내포할 수 있으므로, "평행사변형은 사다리꼴이다."는 하나의 구조적인 체계 안에서 이해되어

* 서울대학교 대학원, narara292@snu.ac.kr (제1 저자)
** 서울대학교, yochoi@snu.ac.kr (교신저자)

1) 본고에서는 '이다'가 사용된 문장('이다-글월')의 문장 구조를 'p이면(는) q이다.'의 형식에 한하여 논의하였고, 한국어 '이다'와 영어의 'is(be)'를 같은 언어 기호로 간주하였다. 대부분 'is' 또는 'be'를 '이다'로 통일하여 사용하였으나, 의미원소로서 'be'의 용법을 제시한 부분에서는 본연의 의미를 전달하기 위하여 'be(is)'를 사용하였고, [그림 II-1]과 [그림 II-3]에서는 '이다'와 '동치관계'의 자연스러운 연결을 드러내기 위하여 'is'를 사용하였다.

야 하는 것이다.

특히 평행사변형과 사다리꼴을 결합하는 '이다'는 애매하고 그 의미가 매우 풍부한 기호이다. 러셀은 완전히 서로 다른 관념들을 표현하기 위해 같은 단어 '이다'가 사용된다고 설명하면서, 수학에서 사용되는 '이다'의 의미를 네 가지로 구분하였다(Russell, 1903, pp. 64-65). "p이면 q이다."에서 '주어-이름'인 조건 p와 '술어-이름'인 결론 q는 '이다'에 의해 특별한 관계의 측면에서 연결되므로, "p이면 q이다."를 수학적으로 판단하기 위해서는 주어와 술어를 종합하여 '이다'의 의미를 점검해야 한다.

이에 본고에서는 '이다'를 수학적 지식을 표현하는 하나의 기호로 인식하고, 다음과 같은 연구문제에 대해 탐색하고자 한다.

첫째, 일상적 언어 '이다'는 문맥과 상황에 따라 어떻게 해석될 수 있는가?
둘째, 러셀이 구분한 '이다'의 의미 분류에서 "평행사변형은 사다리꼴이다."를 해석하는 데 혼란을 일으키는 '이다'는 어떤 의미의 '이다'인가?
셋째, 수학적으로 '같음'을 나타내기 위해 사용되기도 하는 '이다'를 동치관계의 개념으로 재해석하면 어떤 결론에 도달할 수 있는가?
넷째, van Hieles의 기하 사고 수준 이론에 따라 '이다'의 언어적 이해 수준은 어떻게 구분될 수 있는가? 또 이러한 '이다'의 언어적 이해 수준의 구분은 어떤 의미가 있는가?

이러한 연구문제에 대한 논의를 통해 수학 교수학습 과정에서 사용되는 일상적 언어 '이다'의 다양한 의미를 살펴보고, 수학적 지식을 표현하는 '이다'가 상황 및 맥락에 따라 적절하게 해석되어야 함을 강조하고자 한다. 그리고 수학적으로 '같음'의 개념을 나타내기도 하는 '이다'를 통해 상대적으로 다양하고 유연하며 자유로운 수학적 지식의 본질을 드러내고자 한다. 마지막으로 '이다'의 언어적 이해 수준을 구분하여 수학적 개념의 발달과정과 수학적 아이디어의 의미생성에 대한 시사점을 얻고자 한다.

Ⅱ. 일상적 언어 '이다'의 애매성과 다의성

1. 의미원소로서의 '이다'

유클리드는 수학이 일상적 언어(상식, common sense), 공리 그리고 논리로 구성된다고 했다. 학교수학은 공리적 체계가 아니고 중학교 수학에서는 수학 명제의 논리적 구조 "p이면 q이다."를 다루지 않으므로, 중학생들은 "평행사변형은 사다리꼴이다."라는 문장을 일상적 언어와 암묵적으로 내면화된 개인의 논리적 구조로 해석할 수 있다. Clements, Battista(1992)와 De Villiers(1987, 1994, 2010)의 연구에서도 중학생들이 여러 가지 사각형의 포함관계를 의미 있게 학습하려면 van Hieles 3수준의 사고능력과 함께 언어적 의미의 정확한 해석능력이 필요함을 지적한 바 있다.

이 절에서는 일상적 언어의 관점에서 "평행사변형은 사다리꼴이다."라는 수학 명제를 '이다(-글월)'의 문장 구조로 분석하기 위해 먼저 '이다'에 대한 「조사」로서의 의미를 파악한다.

국립국어원 표준국어대사전에 기술되어 있는 '이다'의 「조사」로서의 첫 번째 의미는 "(체언 뒤에 붙어) 주어가 지시하는 대상의 속성이나 부류를 지정하는 뜻을 나타내는 서술격 조사"이다. 만약 '부류'의 의미로 "평행사변형은 사다리꼴이다."의 문장의 의미를 잘 이해했다면 평행사변형과 사다리꼴의 포함관계를 이해할 수 있다.

그런데 다음과 같은 순서로 교과서에 제시되어 있는 평행사변형과 사다리꼴의 정의 및 정리

의 ‘이다’는 상황 또는 문맥에 따라 대상의 속성일 수도 있고 부류일 수도 있으므로, 학생들은 ‘이다’의 의미 차이를 인지하기 어려울 수도 있다.

① 평행사변형은 두 쌍의 대변이 각각 평행한 사각형이다.
② 사다리꼴은 한 쌍의 대변이 평행한 사각형이다.
③ 평행사변형은 사다리꼴이다.

①과 ②에서 사용한 ‘이다’는 두 대상을 같은 자격으로 이어 주는 접속 조사로서 주어인 대상의 속성을 서술한다. 이는 수학적 정의이므로, ①과 ②의 ‘이다’ 기호에는 수학적 동치의 개념이 내포되어 있다. 따라서 ‘이다(is)’는 ‘같다(is equivalent to)’의 의미이다. 하지만 ③의 ‘이다’는 ‘같다’의 의미가 아니다. ③은 “평행사변형은 특별한(special) 사다리꼴이다.”와 같이 해석하여 평행사변형의 또 다른 ‘이름’이 사다리꼴이라고 생각해야 이해하기가 더 쉽다(De Villiers, 1994).

이처럼 평행사변형과 사다리꼴의 정의를 계층적 분류의 관점에서 제대로 이해했다고 하더라도 일상적 언어 ‘이다’를 잘못 해석하게 되면, “평행사변형은 사다리꼴이다.”라는 문장은 충분히 이해되기 어려울 수 있다.

게다가 일상적 언어인 ‘이다’는 의미원소(semantic primes/primitives)이다. 의미원소는 언어학 이론 Natural Semantic Metalanguage(이하 NSM) 모델에서 근간이 되는 개념으로 언어 구조 및 문법과 함께 의미론적 핵(semantic core)을 이루는 요소이다(Goddard, Wierzbicka, 2002, 2014). NSM의 창시자인 Wierzbicka는 모든 것들을 정의할 수 없기 때문에 정의되지 않는 기본 개념이 필요하다고 주장하였고, 이를 의미원소라고 명명하였다(1992). 의미원소는 인간 사고의 본유 언어(innate language)로서(1992, p.210), 언어 보편적이고 선천적으로 이해되는 개념이다. 이들은 더 간단하거나 쉬운 단어로 표현되지는 않으며 일반적으로 대화를 통해 자연스럽게 학습되는 특징이 있다(wikipedia).

한국어 ‘이다’에 대응하는 영어 ‘is(be)’는 NSM이 제시한 60여개 남짓의 의미원소 중 하나이다. 의미원소로서 ‘is(be)’는 맥락 및 구문론적 틀에서 이해 가능하므로, NSM은 ‘is(be)’를 비롯한 의미원소들을 사용되는 맥락과 구문으로 범주화하여 제시하고 있다. <표 II-1>은 NSM의 의미원소 도표에서 ‘is(be)’를 발췌한 것이다. ‘is(be)’는 누구나 알고 있다고 생각하여 설명 없이 사용하는 기본 어휘이지만, 상황에 따라 그 의미는 매우 달라짐을 알 수 있다.

<표 II-1> NSM이 제시한 의미원소 BE의 도표

(2015년 5월 기준)

BE의 분류	BE (SOMEWHERE)	THERE IS	BE (SOMEONE/ SOMETHING)	(SOMETHING) IS (SOMEONE'S)[2]
의미	location (장소, 위치)	existence (존재)	specification (상기, 상술)	possession/ have (소유)
맥락 및 구문	-someone is somewhere (in a place) -something is somewhere (in a place) -someone is with someone else	-there is something in this place -there is someone in this place -there are two/many kinds of …	-this someone is someone like me -this is something of one kind* -this is something big/small** -I know who this someone is	-this thing (knife, shirt, etc.) is mine -this thing is someone else's -whose (knife, shirt, etc.) is this?

2) 이 표현만 2014년도의 NSM 의미원소 도표의 표기이다. 2015년의 NSM 의미원소 도표에는 (BE) MINE/ SOMEONE'S로 표기되어 있다.

평행사변형과 사다리꼴의 정의와 정리에서의 'is(be)'는 NSM의 의미원소 도표에서 세 번째 분류인 specification(상기, 상술)에 속한다. 그렇지만 평행사변형과 사다리꼴의 정의에서의 'is'는 "this is something big/small"에 해당하는 상술인 반면 "평행사변형은 사다리꼴이다."에서의 'is'는 "this is something of one kind"에 해당하는 상술이다. 만약 학생들이 평행사변형과 사다리꼴의 정의 및 정리에서의 'is(be)'를 NSM의 의미원소 도표에서 범주화한 상술의 의미로만 해석하면, "평행사변형은 사다리꼴이다."라는 수학적 지식을 학생 개인의 것으로 내면화했다고 보기 어렵다.

수학교육에서 사용하는 일상적 언어 '이다'는 국어사전이나 NSM에 기술되어 있는 만큼 다양한 의미를 내포하고 있지는 않다. 그러나 일상적 언어 '이다'가 상황이나 맥락에 따라 다양한 의미로 해석이 가능한 것처럼, 수학에서의 '이다' 또한 한 가지 의미로만 해석되지 않는다. 따라서 교수학습 상황에서 "평행사변형은 사다리꼴이다."와 같은 수학적 지식을 효과적으로 의사소통하기 위해서는 평행사변형과 사다리꼴의 수학적 개념과 함께 일상적 언어 '이다'에 대한 충분한 이해가 필요하다. 그리고 '이다'는 더 간단한 단어로 설명되기 어려운 의미원소이므로, 교사는 의미가 다른 몇몇 '이다' 문장을 함께 제시하여 학생들이 '이다'의 여러 의미를 파악할 수 있도록 도울 필요가 있다.

2. 러셀의 의미 분류에 따른 '이다'

동사 'be'[3]는 여러 시대를 거쳐 첫째, 어떤 것이 실제로 있음을 뜻하는 존재적 용법, 둘째, '-처럼 보인다'와 대조되어 '실제로 -이다, -하다'를 의미하는 진리적 용법, 셋째, 주어와 술어를 연결시키는 계사적 용법으로 정착되었다(박희영, 1995, pp.15-16). 이외에도 동사 'be'의 폭넓은 용법과 애매성에 대한 논의는 서양철학에서 계속되어 왔다(강성훈, 2013). 이 장에서는 '이다'를 러셀의 관점으로 살펴본다.

러셀은 수학에서 사용되는 '이다' 동사를 다음과 같은 네 가지 의미로 구분하여 정리하였다(Russell, 1903, p. 64; 박희영, 1995, p. 17., 재인용)[4].

①존재의 '이다': $(\exists x)\ \mathrm{F}(x)$
②서술의 '이다': $\mathrm{F}(x)$
③동일성의 '이다': P=Q
④유개념 함축[5]의 '이다': $\mathrm{P}\subset\mathrm{Q}$

중학교 수학 2의 평행사변형에 관련된 수학 명제들은 러셀이 구분한 네 가지 의미의 '이다' 관점에서 서로 다른 관념들을 표현한다. 평행사변형에 관련된 정의와 정리들을 러셀의 '이다' 관점에서 해석하면 <표 II-2>와 같다.

특히 학교수학에서 혼란을 일으키는 '이다'는 러셀의 관점에 따른 '이다'의 의미 분류 중 ③

3) 이 글에서는 'be' 동사의 세 가지 용법으로 정리하였으나 원래 이는 'be' 동사에 대응하는 그리스어 'einai' 동사의 용법이다(박희영, 1995, p. 15.). 현대 철학자/논리학자들은 'be' 동사를 존재, 동일성, 계사, 함축의 네 가지 용법으로 구별하지만(강성훈, 2013), 서양철학에서는 'be' 동사와 함께 'einai' 동사에 내재한 애매성에 대한 논의가 풍부하므로(강성훈, 2013; 박희영, 1995), 'einai' 동사의 용법을 기술하였다.

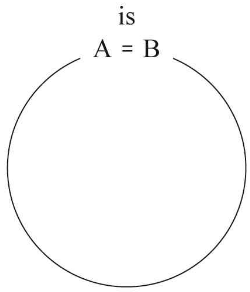
4) 러셀은 [The principles of mathematics]에서 'identity'의 개념을 설명하는 과정 중 "is는 대단히 애매하고, 다양한 의미를 혼동하지 않기 위해 엄청난 주의가 필요하다."라고 하였다. 그리고 'is'를 (1) the sense in which it asserts Being, as in "A is"; (2) the sense of identity; (3) the sense of predication, in "A is human"; (4) the sense of "A is a-man", which is very like identity로 구분하였다(pp.65-66).

5) 유개념(generic concept)은 종개념(specific concept)과 함께 설명되는 것으로 간단히 유(類)와 종(種)이라고도 한다. 어떤 개념의 외연이 다른 개념의 외연보다 클 때, 전자가 유개념으로 후자가 종개념으로 불린다. 예를 들면 동물과 함께 '생물'의 범위에 속하는 '식물'에서 '생물'이 유개념이고 '식물'은 종개념이다(철학사전, 2009).

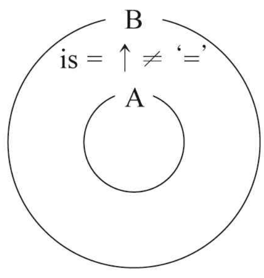
<표 II-2> 러셀의 관점에 따른 '이다'의 의미 분류

평행사변형과 관련된 수학 명제	러셀의 관점에 따른 해석	'이다'의 의미 분류
"이것은 평행사변형이다."	문장 전체를 $\mathrm{F}(x)$로 보았을 때, 'x(=평행사변형)'가 존재함을 의미하는 '이다'이다.	① '존재'
"두 대각선이 서로 다른 것을 이등분하는 것은 평행사변형의 성질이다."	명제의 조건은 '평행사변형(의 정의)'이고, 명제의 결론은 '두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다[6]'는 성질이므로 주어와 술어를 서술로 결합하는 '이다'이다.	② '서술'
"두 쌍의 대변의 길이가 각각 같은 사각형은 평행사변형이다."	'두 쌍의 대변의 길이가 각각 같은 사각형' P와 '두 쌍의 대변이 각각 평행한 사각형' Q가 수학적으로 동치이므로 동일성을 의미하는 '이다'이다.	③ '동일성'
"평행사변형은 사다리꼴이다."	'평행사변형'들의 집합 P는 '사다리꼴'들의 집합 Q에 포함된다. 즉, 평행사변형의 개념은 종개념으로서 유개념인 사다리꼴의 개념을 내포하고 있으므로 유개념 함축을 의미하는 '이다'이다.	④ '유개념 함축'

'동일성'과 ④'유개념 함축'이다. 평행사변형의 개념 A와 사다리꼴의 개념 B를 주어와 술어의 자리에 놓고 '이다' 기호로 결합했을 때 일상적 언어 '이다'를 ③'동일성'의 의미로 인식하는 상황은 [그림 II-1]과 같이 나타낼 수 있고, ④'유개념 함축'의 의미로 인식하는 상황은 [그림 II-2]와 같이 나타낼 수 있다. 중학교 수학 2에 제시된 평행사변형의 성질들은 평행사변형의 정의와 필요충분조건을 만족하므로, 평행사변형의 정의와 성질들은 [그림 II-1]과 같이 '동일성'의 관념으로 인식해도 무방하다. 하지만 "평행사변형은 사다리꼴이다."의 '이다'는 [그림 II-2]와 같은 '유개념 함축'의 관념으로 인식해야 한다.



[그림 II-1] 일상적 언어 '이다'의 일반적 인식



[그림 II-2] "평행사변형은 사다리꼴이다."의 '이다'

6) 한국말 '이다'와 '하다'는 동의어가 아니지만 'Be'동사와 그리스어 'einai'가 '있음'과 '-임', 그리고 '-함'으로 번역될 수 있으므로 기호 '한다'는 주어와 술어를 연결하는 기능적 의미에서 '이다'와 같은 기호로 생각할 수 있다. 일반적으로 평행사변형의 성질은 "평행사변형에서 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다."와 같이 기술되지만, '이다'의 '서술'의 의미를 드러내기 위하여 위와 같이 표기하였다.

평행사변형과 사다리꼴의 정의는 분류의 기준에 따라 바뀔 수도 있다. 따라서 평행사변형과 사다리꼴의 정의를 그대로 전달하고 암기하는 교수학습은 학생들에게 수학적 지식의 유용함과 가치를 전달하기 어렵다. 수학적 지식에 대한 부정적인 신념은 무의미하게 암기한 문장 하나에서도 암묵적으로 형성될 수 있다. 또한 수학적 사고는 "평행사변형은 사다리꼴이다."라는 지식 그 자체를 강조할 때 발달하는 것이 아니라 상황에 따라 유동적인 '이다' 문장 구조의 논리적 해석을 경험할 때 발달할 수 있다. 'be' 동사의 애매성과 풍부한 다의성이 그리스 철학의 형이상학적 사고에 대한 논의로 승화되었던 것처럼, 수학 교수학습 상황에서도 '이다' 기호에 대한 사고 과정을 통해 수학의 본질을 경험할 수도 있을 것이다.

Ⅲ. 수학적 언어로서의 '이다'

1. 동치관계에 의한 '이다'의 재해석

학교수학에서 '이다'를 '동일성'의 관념으로만 인식하는 상황에 대한 원인은 기호 '='에서도 찾을 수 있다. 즉, 학생들의 일상적 언어 '이다'는 학교수학에서 암묵적으로 '='의 의미로 인식되기 때문에 '이다'에 대한 '='의 과정 개념(procept)이 '이다'의 개념 정의(concept definition)에 부정적인 영향을 미치는 것이다.

등호는 초등수학에서 고등수학에 이르기까지 가장 많이 사용되는 수학적 기호로 일상적으로 '같음'을 의미하는 데에도 사용된다. 초등학교 교과서에서 기호 '='는 주로 연산의 결과를 나타낸다. '$3+2=5$'를 "3 더하기 2는 5와 같습니다."라고 기술하지만 실제의 교수학습에서는 "삼 더하기 이는 오"로 읽기도 한다. 학생들은 이러한 수학 교수학습 과정으로 인해 '='와 '이다'를 같은 기호로 오해할 수 있다.

이러한 등호에 대한 수학적 경험들은 학생들에게 '이다는 좌변의 대상과 우변의 대상이 같을 때 연결되는 언어 기호'라는 직관을 형성할 수 있으며, 고착화된 '이다'의 의미는 다시 수학 교수학습에 영향을 준다(Baroody, Ginsburg, 1983). 많은 수학 명제의 표현에서 이러한 직관은 아무런 문제없이 작동하지만 "평행사변형은 사다리꼴이다."와 같은 문장에서는 인지적 장애가 발생할 수 있다.

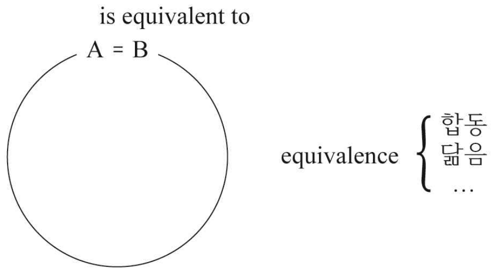
그러나 수학적 기호로서 '='는 집합, 방정식, 함수, 기하 등의 다양한 수학 영역에서 '같음'을 뜻할 때조차도 identity, equality, equivalence 등을 사용하여 다양한 '같음'에 미묘한 차이를 드러낸다(Gattegno, 1974, p.83; Kieran, 1981, p. 317, 재인용). 수학에서 각 개념은 수학적인 아이디어(mathematical idea)와 더불어 수학화되기 이전의 일상적인 의미(ordinary meaning)에 발생의 기원을 두고 있는 경우가 많으므로(Gardiner, 1982; 도종훈, 최영기, 2003, 재인용), 합동(congruence), 닮음(similar), 동치(equivalence)에 내포되어 있는 일상적인 의미[7]는 수학적으로 '같음'에 어떤 차이가 있는지를 이해하는 데 도움이 된다.

학교수학의 기하학에서 합동(congruence)의 개념은 두 도형의 모양과 크기가 서로 같다는 뜻으로 수학적 기호 '≡'를 사용하여 나타낸다. 학교수학의 기하학에서 '='는 두 도형의 넓이의 값이 같을 때 사용된다. 그리고 학교수학에서의 닮음(similarity)은 어떤 두 도형이 크기와 관계없이 모양이 같을 때 사용된다. 학교수학에서의 합동 개념 A와 닮음 개념 B를 주어와 술어의 자리에

7) [네이버 어학사전]에서 congruence는 일치, 합치, 조화; 적합(성), 합동으로, similar(similarity)는 비슷한, 유사한, 닮은으로, equivalent(equivalence) (가치, 의미, 중요도 등이) 동등한, (-에) 상당하는 것, 등가물로 기술되어 있다. 참고로 'same'은 의미원소(semantic primes)이다.

놓고 ‘이다’ 기호로 결합했을 때의 ‘이다’는 러셀의 관점에서 ④ ‘유개념 함축’을 의미하고, 이는 앞의 [그림 II-2]와 같다.

하지만 합동과 닮음은 모두 동치관계(equivalence relation)이다. 동치관계는 일상적 언어에서의 ‘똑같음’이 아니지만 수학적 공리의 3가지 조건을 논리적으로 확인하여 ‘같음’을 나타낼 수 있는 수학적 개념이다. ‘서로 달라 보일 수도 있지만 어떤 구조적인 맥락에서는 같음’이 동치관계의 수학적 의미이다. 따라서 수학에서는 합동인 두 도형만 동치가 아니라 닮음인 두 도형도 동치가 될 수 있다. 이를 앞의 논의와 비교하여 설명하기 위해 도식화하면 [그림 II-3]과 같다.



[그림 II-3] 수학적 공리 체계에서의 ’이다’

수학적으로 ‘같음’에 대한 수학적 아이디어는 다양할 수 있다. 학교수학에서 ‘같음’은 대학수학의 ‘같음’으로 이행(transition)되는 과정에서 ‘동치관계’나 ‘구조적 같음’ 혹은 ‘동형’ 등의 형식적인 수학적 아이디어를 포함하기 때문에(도종훈, 최영기, 2003) 수학적으로 ‘같음’의 본질적 의미를 이해하기 위해서는 학교수학의 수준을 뛰어넘는 사고가 요구된다.

한편 수학적 개념으로서 ‘같음’을 사고하는 과정은 일상적으로 ‘같음’을 표현하기 위해 언어 기호 ‘이다’를 사용하는 과정과 미묘한 차이가 있다. 일상적으로는 두 대상의 관계가 ‘같음’임을 확인한 후 ‘동일성(identity)’의 관념을 나타내는 ‘이다’를 사용하여 표현하지만, 수학에서는 ‘같음(=이다)’을 정의한 후에 두 대상의 관계가 ‘같음’임을 확인한다. 다시 말하면, ‘같음’을 표현하는 일상적 언어 ‘이다’와 수학적 지식에서의 ‘이다’는 사고의 순서가 반대이다[8]. 예를 들어, 수학적으로 닮음(similarity)이 ‘같다’고 했을 때에는 합동의 개념에서 길이를 제외하고 각만 불변으로 다룬 것으로, 닮음의 세계에서 모든 정사각형은 같다.

이처럼 “평행사변형은 사다리꼴이다.”의 ‘이다’는 ‘이다’에 대한 다른 차원의 상황을 제공하는 수학적 지식이다. “평행사변형은 사다리꼴이다.”의 정당화 과정을 여러 번 반복하여 메시지를 그대로 복제할 수 있다는 언어적 신념은 비활성적 아이디어(inert ideas)[9]를 동반하기 때문에 무용하고 유해하다(whitehead, 1929). 아이디어를 의미 있게 생성하는 ‘이다’를 수학적 기호로서 주목할 필요가 있다.

2. van Hieles의 기하 사고 수준 이론에 의한 ‘이다’의 재해석

van Hieles의 기하 사고 수준 이론은 학생들이 기하학습에서 보여주는 사고의 과정을 이해하는데 유용한 모델이다(Battista, 2007; 나귀수, 1998). 그리고 van Hieles 이론에서 높은 수준으로의 이행은 사고를 표현하는 언어의 발달과 관련이 있다(우정호, 1998, p.312).

De Villiers(1994)는 van Hieles 3수준의 학생들이 수학적 논리의 과정을 잘 따르면서도 도형들

8) 클라인(Felix Klein)의 에를랑겐 프로그램(Erlangen program)의 관점에서 수학적 지식에서의 ‘이다’의 사고의 순서를 고찰하였다.
9) 사용되거나 검증되거나 새로운 조합으로 연결됨이 없이 단지 마음속으로 수용하게 되는 아이디어를 whitehead(1929)가 The aims of education에서 ‘inert ideas’라고 했다.

의 포함관계에 대해서는 피상적인 반응을 보이는 현상에 대한 원인으로 기능적 이해(functional understanding)의 부족을 주장한 바 있다. 학생들이 관계적 및 논리적 이해 능력 혹은 정의하기 능력을 갖췄다 하더라도 교과서가 선택한 사각형의 계층적 분류의 기능적 장점들에 대한 이해(functional understanding)가 부족하다면 사각형의 계층적 분류에 대한 아이디어를 선호하기 어렵다는 것이다.

분할의 관점에서 사각형을 정의하는 것은 수학적으로 '틀림'이 아님에도 불구하고 교과서나 저자들은 하나의 옳은 수학적 정의가 있다는 입장을 취하는 것처럼 보인다. 이러한 교수학습 환경에서 학생들 스스로 사각형의 분류에 대한 여러 관점을 갖기에는 무리가 있을 수 있다.

그리고 "하나의 도형에 하나의 이름을 붙인다."는 생각으로 여러 가지 사각형을 분류한다면 (박경미, 임재훈, 1998, p.566) 분할의 관점은 포함의 관점보다 자연스러운 전략일 수 있다. 일반적으로 사다리꼴이라는 용어는 평행사변형이 아닌 사다리꼴을 지칭할 때 사용되며, 평행사변형을 사다리꼴이라고 부르지는 않는다. 미국수학회(AMS, American Mathematics Society)는 사다리꼴을 "'오직' 한 쌍의 대변이 평행한 사각형"으로 정의하였으며(박경미, 임재훈, 1998, p.566), 유클리드 원론에서는 정사각형(square), 직사각형(oblong), 마름모(rhombus/rhomboid), 사다리꼴(trapezia)을 서로소(disjoint)로 정의하였다(Euclid, Elements, Volume 1: 154; Usiskin 외, p.19, 재인용). 이와 같이 분류와 이에 대응하는 정의는 임의적이고 절대적이지 않기 때문에, 여러 가지 사각형의 수학적 정의는 계층적 분류와 분할 분류의 관점에 따라 합리적으로 선택 가능함을 인지해야 한다.

또한 van Hieles 1수준(시각적 인식 수준)의 학생들은 도형을 전체의 모양으로 구별하므로 (Fujita, Jones, 2007; 나귀수, 1998), 평행사변형과 사다리꼴을 시각적 이미지로 표상하여 분류할 경우, 분할 분류의 관점에 따른 사각형의 정의가 더 자연스러울 수 있다. 즉 학생들은 van Hieles 1수준에서 분할의 관점을 취하기가 더 쉽다. 암묵적으로 분할의 관점을 유지한 상태로 3수준에 도달한 학생들에게 "평행사변형은 사다리꼴이다."라는 도형들의 포함관계는 내적으로 점유되기 어려운 문장이 된다. 하지만 포함의 관점에서 사각형을 분류한 교사와 분할의 관점에서 사각형을 분류한 학생은 어느 정도의 의사소통이 가능하기 때문에, 교사는 학생들이 겪는 인지적 어려움의 원인이 관점의 차이임을 모를 수도 있다.

그러므로 사각형의 계층적 분류에 대한 가치나 기능에 대한 충분한 논의는 중요하다. 그리고 "평행사변형은 사다리꼴이다."에서 평행사변형은 서로 다른 두 개의 '이름'을 가지고 있다는 언어적 이해가 필요하다(De Villiers, 1994). 교수학습 과정에서 학생들에게 도형을 분류(classifying)하고 이를 수학적으로 정의하는(defining) 경험의 기회를 제공하여, 학생들이 분류의 관점에 대한 근본적 차이를 인지할 수 있도록 해야 한다. 이미 정해진 관점으로 도형을 분류하기 위해 학생들에게 몇 줄의 수학적 정의를 제시하고, 정리로서 도형들 사이의 포함관계를 강조하는 교수학습은 '완성된 수학(finished mathematics)[10]'의 기록을 전달하는 과정일 뿐이다.

van Hieles의 기하 사고 수준 이론은 앞에서 논의한 평행사변형과 사다리꼴의 정의 및 성질에서의 '이다' 기호에 대한 수준의 차이 또한 드러낸다. <표 III-1>은 러셀의 관점으로 분류한 '이다' 기호의 의미에 초점을 맞춰, 평행사변형

10) '완성된 수학(finished mathematics)'과 '발생 과정 중의 수학(mathematics in the making)'은 Pólya가 언급한 것이다. 완성된 수학은 완결된 확실한 결과를 오류 없이 연역적으로 제시하는 반면, 발생 과정 중의 수학은 불확실한 직관적 추측을 잠정적인 표현으로 나타낸다(Hersh, 1991: p.128-129).

<표 III-1> van Hieles의 기하 학습 수준 이론에 따른 평행사변형과 ‘이다’의 이해 수준

van Hieles 수준	1수준 시각적 인식 수준	2수준 분석적/기술적 수준	3수준 관계적/비형식적 연역 수준	4수준 형식적 연역 수준	5수준 엄밀한 수학적 수준
수준별 특징[11]	도형을 전체의 모양으로 인식하여 구분함.	도형을 시각적 형태가 아닌 성질들로 파악함.	도형의 수학적 정의와 도형들의 포함관계를 이해함.	증명을 비롯한 형식적 연역이 가능함.	기하의 공리적 체계를 이해함.
평행사변형에 대한 이해	평행사변형의 정의를 지각적 유사성에 근거하여 이해할 수 있음. 단, 이때 평행사변형은 개념이미지(concept image)로서 수학적 정의와 동일하지 않을 수 있음.	평행사변형의 성질을 이해할 수 있음. 구체적이고 사실적인 사고의 단계이며, 초보적인 수준의 일반화를 통해 도형의 성질들을 파악할 수 있음.	평행사변형과 다른 사각형들 사이의 포함관계를 이해할 수 있음. 수학적 논리의 과정에 입문하는 단계로 수학적 정당화 과정을 모방할 수 있음.	평행사변형과 관련된 수학 명제를 수학적 논리를 기반으로 이해할 수 있음. 평행사변형의 정의와 필요충분조건인 성질을 또 다른 정의로 선택할 수 있음.	기하학 자체가 연구의 대상이 되고 여러 가지 공리체계를 비교할 수도 있음. 형식적으로 엄밀하고 추상적임.
러셀의 관점에 따른 ‘이다’에 대한 이해	‘존재’, ‘동일성’	‘서술’	‘유개념 함축’		수학적 공리에 의한 ‘동일성’
“평행사변형은 사다리꼴이다.” 에서의 ‘이다’에 대한 이해	평행사변형과 사다리꼴 각각의 존재성을 시각적으로 인식하거나 평행사변형과 사다리꼴을 지각적 유사성에 근거하여 ‘같음’으로 인지함.	평행사변형을 사다리꼴의 속성을 지닌 사각형으로 해석함.	사각형의 계층적 분류에서 평행사변형과 사다리꼴의 포함관계를 이해함.		수학적 공리에 의해 평행사변형과 사다리꼴이 수학적으로 ‘같음(동형)’일 수도 있음을 이해함.

의 정의와 성질 및 정리를 van Hieles 수준에 따라 구분한 것이다.

수학적 개념을 형성하는 과정은 언어적 현상인 동시에 지적인 현상이다. <표 III-1>과 같이 동일한 수학 명제 “평행사변형은 사다리꼴이다.”의 ‘이다’일지라도 상황에 따라 다르게 해석될 수 있으며, 수학적 개념으로서 ‘같음’을 정의하는 수학적 사고의 수준은 ‘이다’에 대한 이해의 수준에 따라 구분될 수도 있다. 이는 일상적 언어 ‘이다’가 수학적 기호로서 수학적 지식을 매개하는 기능을 할 때조차 중의적인 의미를 내포할 수 있음을 함의한다.

수학적 사고를 매개하는 기호로서 언어는 인지활동의 핵심적인 기제이고 학습자가 이상적으로 수학적 개념을 획득하기 위해서는 고등 수준의 언어의 의미체계 또한 획득해야 한다 (Vygotsky, 2013). 따라서 수학 교수학습 과정에서도 언어적 표현의 애매함과 다양성을 전제하여 원활한 의사소통을 위한 언어적 교류가 일어나야 할 것이다.

11) van Hieles(2009).

Ⅳ. 결 론

본고에서는 “평행사변형은 사다리꼴이다.”에서 ‘이다’ 기호에 주목하여, 일상적 언어인 ‘이다’의 애매함과 다양한 의미에 대하여 고찰하였다. 그리고 수학적 언어로서의 ‘이다’를 동치관계 및 van Hieles의 기하 사고 수준 이론과 연결하여 논의하였다.

일상적 언어 ‘이다’는 의미원소로서 더 쉬운 단어로 설명되기 어렵고, ‘이다’의 의미는 상황이나 문맥 속에서 파악되어야 한다. ‘이다’는 ‘동일성’이나 ‘서술’처럼 매우 다른 관념들을 표현하기도 하므로 사용에 있어 주의가 필요한 언어 기호이다.

학교수학의 “평행사변형은 사다리꼴이다.”의 ‘이다’는 러셀의 관점에 따른 의미 분류 중 ‘유개념 함축’에 해당한다. 사각형을 계층적으로 분류하여 정의하고 ‘이다’를 ‘부류’로 해석하면, ‘앞쪽-이름’의 집합이 ‘뒤쪽-이름’의 집합에 포함됨을 이해할 수 있다. 만약 ‘이다’를 ‘동일성’의 관념으로 해석하면 학생들에게는 인지적 장애가 일어날 수 있다. 평행사변형의 정의 및 성질의 ‘이다’와 수학적 기호 ‘=’는 ‘이다’를 ‘동일성’의 관념으로 고착화시키는 원인이 되기도 한다.

그러나 ‘유개념 함축’의 ‘이다’는 다시 수학적 공리에 의해 ‘동일성’의 관념을 나타낼 수도 있다. 위상 수학에서 평행사변형과 사다리꼴은 위상적 동형인 도형이므로, 위상 수학에서 “평행사변형은 사다리꼴이다.”의 ‘이다’는 ‘동일성’의 ‘이다’이다. 학교수학에서의 ‘같음’은 대학수학으로 이행되는 과정에서 구조적 측면의 대수적 사고가 요구된다.

이처럼 ‘이다’를 이해하는 수준에는 차이가 있다. van Hieles 1수준에서 학생들은 지각적 유사성에 근거하여 사각형을 분류하므로 사각형의 분할의 관점을 취하기가 쉽다. 따라서 “평행사변형은 사다리꼴이다.”를 이해하기 위해서는 van Hieles 3수준의 수학적 능력과 함께 분류의 관점에 대한 논의가 충족되어야 한다. 그리고 van Hieles 5수준에 해당하는 ‘이다’를 이해하기 위해서는 수학적 공리체계에 기반을 둔 사고가 필요하다.

고대 기하학은 주로 주어진 대상을 측량(measurement)하거나 구조를 관찰하여 ‘같음’이라는 개념을 생성하였다. 그러나 클라인은 기하학의 특정 변환군에서 불변인 성질들을 연구하여 에를랑겐 프로그램(Erlangen Program)을 도입하였는데, 클라인의 아이디어는 ‘같음’이라는 개념을 통하여 구조와 측량 모두를 생성하는 것이었다. 이후 현대 수학은 에를랑겐 프로그램의 관점에서 새로운 개념 및 이론을 생성하게 되었고, 이는 구조주의(structuralism)의 사상으로도 연결되었다.

수학적으로 ‘같음’에 대한 ‘이다’ 기호의 표상은 클라인의 에를랑겐 프로그램과 같은 관점이다. ‘이다’는 초등 수학적 수준에서 ‘같음’의 의미를 전달하기도 하지만 고등 수학적 수준에서 ‘같음’의 의미를 생성하기도 한다.

본고에서 논한 일상적 언어 ‘이다’의 수학적 고찰은 수학 교수학습 상황에서 언어적 교류 방식에 대한 통찰을 제공하고, ‘같음’에 대한 수학적 정의의 다양성은 수학적 지식의 맥락적 상대성과 자유로움을 드러낸다고 판단된다. 클라인의 에를랑겐 프로그램이 ‘이다’에 의해서 생성되는 구조로 시작함을 떠올린다면 ‘이다’에 대한 논의는 수학적으로도 매우 큰 의미가 있음을 시사한다. 그러므로 수학적 지식의 발달 과정에서 ‘이다’와 같은 일상적 언어의 매개 기능에 대한 후속연구가 필요하다.

참고문헌

강성훈. (2013). 아리스토텔레스는 계사와 존재사를 구별했는가?. **인간・환경・미래, (11)**, 31-68.

나귀수. (1998). 중학교 기하의 증명 지도에 관한 소고-van Hieles 과 Freudenthal 의 이론을 중심으로. **대한수학교육학회논문집, 8**(1).

도종훈, 최영기. (2003). 수학적 개념으로서의 등호 분석. **A-수학교육, 42**(5), 697-706.

박경미, 임재훈. (1998). 학교 수학 기하 용어의 의미론적 탐색. **수학교육학연구, 8**(2), 565-586.

우정호. (1998). **학교 수학의 교육적 기초**. 서울: 서울대학교 출판부.

철학사전편찬위원회. (2009). **철학사전**. 서울: 중원문화.

한국 서양 고전 철학회(박희영 외). (1995). **서양 고대 철학의 세계**. 서울: 서광사.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning, 2*, 843-908.

Baroody, A. J., & Ginsburg, H. P. (1983). The effects of instruction on children's understanding of the "equals" sign. *The Elementary School Journal, 84*(2), 199-212.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics*, 420-464. New York, NY, England: Macmillan Publishing.

De Villiers, M. D. (1987). Research evidence on hierarchical thinking, teaching strategies and the van Hieles theory: some critical comments. *Research Unit for Mathematics Education*, University of Stellenbosch.

De Villiers, M. D. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the learning of mathematics, 14*(1), 11-18.

De Villiers, M. D. (2010, June). Some reflections on the van Hiele theory. *In Invited plenary from 4th Congress of teachers of mathematics*.

Fujita, T., & Jones, K. (2007). Learners' Understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: Towards a theoretical framing. *Research in Mathematics Education, 9*(1), 3-20.

Goddard, C., & Wierzbicka, A. (Eds.). (2002). *Meaning and universal grammar: Theory and empirical findings* (Vol. 1). John Benjamins Publishing.

Goddard, C., & Wierzbicka, A. (2014). Semantic fieldwork and lexical universals. *Studies in Language, 38*(1), 80-127.

Hersh, R. (1991). Mathematics has a front and a back, *Synthese, 88*(2), 127-133.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational studies in Mathematics, 12*(3), 317-326.

Muis, K. R. (2004). Personal epistemology and mathematics: A critical review and synthesis of research, *Review of educational research, 74*(3), 317-377.

Russell, B. (1903). *The principles of mathematics*. University Press.

Schoenfeld, A. H. (1988). When good teaching leads to bad results: The disasters of 'well-taught' mathematics courses, *Educational psychologist, 23*(2), 145-166.

Schoenfeld, A. H. (1989). Explorations of students' mathematical beliefs and behavior, *Journal for research in mathematics education*, 338-355.

Usiskin, Z., Griffin, J., Witonsky, D., & Willmore,

E. (2008). *The classification of quadrilaterals: A study of definition*. IAP.

van Hiele, P. M. (2009). **구조와 통찰**. (우정호 외 역), 서울: 경문사. (원저 1986년 출판).

Vygotsky, L. S. (2013). **사고와 언어**. (이병훈 외 역), 서울: 한길사. (원저 1962 출판).

Whitehead, A. N. (1967). *Aims of education*. Simon and Schuster.

Wierzbicka, A. (1992). *Semantics, culture, and cognition: Universal human concepts in culture-specific configurations*. oxford university Press.

http://stdweb2.korean.go.kr/main.jsp.(국립국어원 **표준국어대사전**)

https://en.wikipedia.org/wiki/Semantic_primes.

https://www.griffith.edu.au/__data/assets/pdf_file/0005/636890/NSM_Chart_ENGLISH_v16_05_2015_Greyscale.pdf.

A Study on the Word 'is' in a Sentence "A Parallelogram is Trapezoid."

Yi, Gyuhee (Graduate School, Seoul National University)
Choi, Younggi (Seoul National University)

A word 'is' in "A parallelogram is trapezoid." is ambiguous and very rich when it comes to its meaning. In this paper, 'is' as in everyday language will be identified as semantic primes that can be interpreted in different ways depending on context and situation, and meanings of 'is' in mathematics will be discussed separately. Focusing on 'identity', 'is' will be reinterpreted in the view of equivalence relation and van Hieles' work. 'Is', as a mathematical sign, is thought to have a significant importance in producing mathematical ideas meaningfully.

* Key Words : is(이다), identity(같음), parallelogram(평행사변형), 사각형의 계층적 분류(hierarchical classification of quadrilaterals), equivalence relation(동치관계), van Hieles' theory(van Hieles 이론)

논문접수 : 2016. 8. 9
논문수정 : 2016. 9. 4
심사완료 : 2016. 9. 5