대한수학교육학회지 <학교수학> 제 18 권 제 3 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 18, No. 3, 457 ~ 478. Sep 2016

중학생들의 함수의 그래프에 대한 이해와 발달

마 민 영* · 신 재 홍** · 이 수 진*** · 박 종 희****

본 연구의 목적은 중학생들의 함수의 그래프 개념에 대한 이해와 발달을 탐색하는 것이다. 본 연구를 위해 일차함수를 학습한 경험이 없는 중학생 2명을 대상으로 약 7개월에 걸쳐 교수실험을 진행하였고, 수업을 진행하고 분석하는 과정에서 두 학생 모두 상황을 그래프로 표현하고 그래프를 상황에 적절하게 해석하는 초기 과제에서 두 변량 사이의 함수 관계보다 산술적인 값들에 주안점을 둔다는 것이 드러났다. 이에 본 연구에서는 함수의 그래프에 대한 이해와 발달, 학생간의 차이점이 드러나는 과제에 주목하여 교사가 학생들에게 제시한 과제의 의도 및 역할, 과제에 대한 학생의 반응을 기술하였다. 특히 학생의 반응은 Castillow-Garsow(2012)가 제안한 과제를 해결하는 방식, 그 방식을 이끌어내는 추론, 과제의 해결로 나누어 분석하였다. 그 결과, 함수의 그래프 표현 및 해석에서 양들의 변화와 연속성에 대한 인식의 중요성을 확인하였다.

Ⅰ. 서 론

함수의 그래프는 변화하는 양들 사이의 관계를 나타내는 함수를 시각적으로 표현하는 도구로서 학교수학에서 그 중요성이 강조되고 있다(교육부, 2015). 그러나 대부분의 학생들은 함수를 표현하고 해석하는 데 어려움을 겪고 있다. 함수의 그래프를 표현하는 과정에서 드러나는 어려움을 살펴보면, 학생들은 모든 함수의 그래프를 연결된 선으로 표현하려고 시도한다. 예를 들어, 시간에 따른 거리의 변화율이 일정하게 증가하는 상황에서 시간과 거리 사이의 관계를 나타낸 그래프를 그리기 위해 몇 개의 점을 찍고 난 후 점들을 선으로 연결한다(마민영 · 신재홍, 2016; 박선화 · 변희현 · 주미경, 2011; 이화영 · 류현아 · 장경윤, 2009). 학생들은 그래프를 해석하는 과정에서도 어려움을 겪고 있는데, 종종 두 자동차가 이동한 시간에 따른 속도의 변화율이 일정할 때, 시간과 속도 사이의 관계를 나타낸 그래프의 교점을 두 자동차가 만나는 위치로 해석하는 모습을 보인다(Monk, 1992; 이종희 · 김부미, 2003).

이러한 학습의 어려움을 해소하기 위해 연구자들은 함수를 다양한 방식으로 표현하고 해석하는 행위에 주목하고, 행위로부터 추론된 학생의 사고 과정을 분석 및 제시하고 있다. Carlson, Jacobs, Coe, Larsen과 Hsu (2002)는 역동적인 함수적 상황을 그래프로 표현하고 해석하는 과정에서 드러나는 추론 능력에 주목하였고, 이를 분석하기 위한 이론적 틀을 제시하였다. 그들은 상황에 포함된 양의 변화를 조정(coordination)하는

* 한국교원대학교 대학원, mmy8724@naver.com (제1 저자)
** 한국교원대학교, jhshin@knue.ac.kr
*** 한국교원대학교, sjlee@knue.ac.kr (교신저자)
**** 한국교원대학교 대학원, cyber-iris@hanmail.net

방식인 “두 양의 변화에 주목하면서 그들 사이의 불변인 관계를 파악하는 것과 관련된 인지활동”을 공변추론(covariational reasoning)으로 정의하면서, 역동적인 함수적 상황에서 변화의 본질을 해석하고 표현하는 데 그 중요성을 강조하였다. 즉, 두 변량 사이의 변화를 조정하여 규칙을 인식하는 능력은 함수를 그래프로 표현하고 해석하는 행위에 영향을 미치는 것으로, 함수 학습에서 변화하는 양들 사이의 관계를 포함하는 상황을 그래프로 표현하고 해석하는 활동이 중요하게 다루어져야 할 필요가 있다.

우리나라 교육과정에서 함수의 그래프는 중학교 과정부터 다루어지고 있으며, 초등학교 과정에서는 연속적인 변량에 대한 자료를 수집하여 그래프로 나타내기와 같이 그래프 개념의 기초가 되는 활동을 포함하고 있다. 결국 중학교 수학에서 함수의 그래프는 학생의 발달 단계와 활용성 등을 고려하여 현실적인 변화 상황을 표현하고 해석하기 위한 도구로서 도입되어야 할 필요가 있다(이종희・김부미, 2003). 그러나 2009 개정에 따른 수학과 교육과정이 반영된 교과서들을 살펴보면 함수의 그래프는 변량의 변화 관계보다 변수들의 대응 관계에 더 주목하는 듯이 보인다. 구체적인 예로 함수의 그래프는 함수의 식을 만족하는 값들을 표에 적고, 표에 나타낸 순서쌍을 좌표로 하는 점을 좌표평면 위에 나타내는 것으로 도입된다. 이러한 이유로 학생들은 종종 양들 사이의 관계식을 그래프로 나타내는 것보다 그래프에서 관계를 해석하여 식으로 표현하는 것을 더 어려워하는 모습을 보인다(안가영・권오남, 2002).

이러한 문제점을 보완할 수 있는 방안으로 2015 개정에 따른 수학과 교육과정에서는 상황에 제시된 두 양 사이의 관계를 탐색하는 활동으로부터 함수와 함수의 그래프 개념을 도입하도록 제안하고 있다. 구체적으로 살펴보면, 중학교 1학년에서 현실 세계의 상황을 다양한 방식(표, 식, 그래프)으로 표현하고 해석하는 과정을 거친 후, 중학교 2학년에서 형식적인 함수의 개념을 도입하고 있다(황혜정・나귀수・최승현・박경미・임재훈, 2016). 특히 함수의 그래프의 경우 함수 영역인 ‘좌표평면과 그래프’에서 ‘다양한 상황을 그래프로 나타내고, 주어진 그래프를 해석할 수 있다’를 성취기준으로 제시하고 있다(교육부, 2015). 즉, 개정된 교육과정에서 함수의 그래프는 함수적 상황을 그래프로 표현하고 해석하는 활동으로 도입하는 것으로, 이는 이전의 교육과정에서의 방식과 대비된다.

함수의 그래프를 지도하는 순서 및 내용의 변화에 맞춰 함수의 그래프에 대한 표현과 해석의 행위를 분석하는 것은 교수・학습과 연구의 측면에서 의미 있는 일이 될 것이다. 이에 본 연구는 일차함수를 학습하지 않은 중학생 2명을 대상으로 실시한 교수실험(2015.4.~2015.11.)에서 다루어진 여러 과제들 가운데 함수의 그래프에 대한 이해와 발달, 학생간의 차이점이 두드러지게 드러나는 과제에 주목하여, 교사가 학생들에게 제시한 과제의 의도 및 역할과 과제에 대한 학생의 반응을 기술하고자 한다. 특히 학생의 반응은 Castillow-Garsow(2012)가 제안한 그래프를 표현하고 해석하는 행위, 행위를 이끌어내는 추론, 행위의 결과로 나누어 분석 및 제시하겠다.

이를 위해 본 연구를 위한 연구 문제는 다음과 같이 설정하였다.

- 연구 문제 1: 상황을 그래프로 표현하고 해석하는 과정에서 드러나는 함수의 그래프에 대한 이해는 어떠한가?
- 연구 문제 2: 함수의 그래프에 대한 이해의 발달은 어떠하며, 학생간의 차이점은 무엇인가?

Ⅱ. 선행 연구

1. 함수의 그래프 학습에 대한 연구

함수의 그래프는 학교수학에서 중요하게 다루어지고 있지만, 학생들은 그래프 표현 및 해석에서 많은 어려움을 겪고 있다. 예를 들어, 두 자동차의 시간과 속도 사이의 관계를 나타낸 그래프에서 두 그래프의 교점을 자동차가 만나는 위치로 해석하는 모습을 보이거나(Monk, 1992; 이종희・김부미, 2003), 선형 관계가 아닌 함수적 상황에 대한 그래프도 선형 관계를 일반화하여 그래프 상의 몇 개의 점들을 선으로 잇는다(Ellis, 2011; 마민영・신재홍, 2016; 박선화 외, 2011; 안가영・권오남, 2002). 또한 함수의 그래프에서 함수의 규칙을 포함하는 내용적인 측면에 대한 이해보다 그래프를 그리는 기술적인 측면이 중시되기 때문에, 학생은 그래프의 역할과 필요성을 잘 알지 못한다(이종희・김부미, 2003). 이와 같이 학생들은 양의 값들 사이의 일반화된 관계를 표현하고 해석하는 능력이 다소 부족한 상태로 함수의 그래프에 대한 지식을 발달시키고 있다(Lobato, & Siebert, 2002; Moore, & Thompson, 2015; Oehrtman, Carlson, & Thompson, 2008).

이화영 외(2009)는 다양한 함수의 그래프 가운데 중학교 과정에서 처음으로 도입되는 일차함수의 그래프에 대한 이해에 주목하였다. 그들은 초등학교 확률과 통계 영역에서 그래프에 대한 활동을 하고 있음을 지적하면서, 초등학교 과정에서 학습한 그래프에 대한 지식과 중학교 과정에서 처음으로 다루어지는 함수의 그래프에 대한 지식 사이의 연결성 탐색을 위하여 초등학교 학생을 대상으로 역동적 기하 프로그램을 활용한 함수의 그래프에 대한 수업을 실시하였다. 그들의 연구 결과 가운데 주목할 만한 점은 대부분의 학생들이 변량인 시간과 거리 사이의 일정한 비율 관계를 포함하는 상황을 몇 개의 점들과 그 점들을 잇는 직선 모양인 그래프로 표현한 후, 직선은 점을 더 잘 표현하기 위하여 그린 것이라고 설명하였고, 이 가운데 몇몇 학생들은 원점부터 시작하지 않는 직선 모양인 그래프로 나타내었다는 것이다(이화영 외, 2009). 이러한 학생의 반응에 대해 이화영 외(2009)는 점의 자취가 모여 직선이 되는 경험과 0 시간일 때 좌표를 표현하는 경험의 부족함을 그 원인으로 설명하였는데, 이러한 원인 진단은 초등학교 과정에서 형성된 그래프에 대한 지식이 이후 함수의 그래프에 대한 학습에 어떠한 영향을 미치게 되었는지, 더 나아가 그러한 지식의 변화 과정은 어떠한 지에 대한 설명을 제시한 것이라고 보기는 어렵다. 이광상, 조민식, 류희찬(2006)은 비례 관계로 함수 개념을 도입하였음에도 불구하고 학생들은 여전히 함수를 어려워하는 원인 가운데 하나로 함수의 표상을 다양하게, 역동적으로 탐구할 수 있는 학습기회의 부족함을 지적하였다. 그들은 중학교 2학년을 대상으로 질적 사례 연구를 실시하였고, 엑셀을 활용하여 $y=ax+b$에서 a와 b값의 변화에 따라 그래프의 변화를 직접 탐구하는 활동이 문제해결에 미치는 영향을 보고하였다. 안가영, 권오남(2002)은 지필식 방법으로 함수를 학습한 고등학교 학생을 대상으로 수학적 오류를 점검하고, 공학을 활용한 교수학적 환경에서 수학적 오류가 변화되는 과정을 탐색하였다. 예를 들어, 학생이 축의 변화가 그래프의 형태를 변화시킬 수 있다는 것을 잘 이해하지 못하는 경우 그래픽 계산기를 통해 축의 변화와 그래프의 형태 사이의 관계를 확인할 수 있게 도와주었다. 이와 유사한 맥락에서 손홍찬, 류희찬(2005)은 함수지도에서 공학을 사용하면 함수의 관계식과 그래프의 관계를 역동적으로 고찰할 수 있고, 특히 관계식에서 계수가 변

함에 따라 그래프가 변화하는 양상을 탐구하는 데 도움을 줄 수 있음을 보고하였다. 이러한 함수의 그래프 학습에 대한 연구들은 학생들이 관계식을 그래프로 표현하는 행위에 주안점을 두면서 학생들이 만드는 오류와 공학을 활용하여 오류가 변화되는 과정을 제시하고 있다. 이러한 연구 결과는 함수의 그래프를 지도하는 방식에 대한 교수활동의 정보와 내용을 제공한 것은 사실이지만, 학생의 행위에 대한 원인과 행위로부터 추론되는 이해의 발달을 이끌 수 있는 방안을 제시한 것은 아니다.

이상의 연구들을 정리해보면, 학생들은 그래프 표현 및 해석에서 많은 어려움을 겪고 있으며 대부분의 연구들은 학생들의 오류에 주목하고 있다. 이에 본 연구는 중학생들이 다양한 과제에서 보여준 행위로부터 함수의 그래프에 대한 이해와 그 발달 과정을 제시하고자 한다. 다음 절에서는 학생들의 함수의 그래프 학습에서 드러나는 행위와 행위로부터 추론되는 이해를 분석하고 제시하는 데 기저가 되는 연구 결과(Carlson et al., 2002; Castillow-Garsow, 2012)를 살펴보겠다.

2. 함수의 그래프에 대한 이해

Carlson 외(2002)는 역동적인 함수적 상황을 그래프로 표현하고 해석하는 과정에서 드러나는 두 변수의 변화 관계와 그들 사이의 불변인 관계를 파악하는 것과 관련된 인지활동(mental action)을 공변추론으로 정의한다. 공변추론은 어떤 양이 또 다른 양의 배로 증가할 때 몇 배인가에 주안점을 두기보다 두 변량의 변화 관계에 더 주안점을 두는 사고를 의미한다(Ellis, Ozgur, Kulow, Williams, & Amidon, 2012). Carlson 외(2002)는 공변추론이 초기 함수 학습뿐 아니라 미적분의 학습에서 필수적이지만, 학교 수학에서 다루어지는 함수는 학생들이 내재하고 있을 지도 모르는 이러한 추론 능력을 끌어내는 데 효과적이지 않다는 것을 지적하였다. 또한 역동적인 함수적 상황을 해석하고 표현하는 수학적 행위로부터 공변추론을 분석하기 위한 이론적 틀도 제안하였다. 그들에 따르면, 연속함수에 대한 이해에서 드러나는 공변에 대한 초기 이미지는 변화만을 인지하는 수준이며, 변량 사이의 관계를 이산적으로 이해한 후에 연속적으로 인식할 수 있는 수준에 이를 수 있다(Castillow-Garsow, 2012).

Castillow-Garsow(2012)는 학생들이 연속 함수의 그래프를 표현하고 해석하는 과제에서 드러나는 학생간의 차이점을 분석하기 위해 문제를 해결하는 방식, 그 방식을 이끌어내는 추론, 과제의 해결에 주목하였고 각각을 이산(discrete) 또는 연속(continuous)으로 나누어 설명하였다. 특히 그들은 연속적인 추론 방식과 관련된 인지 활동으로 덩어리 추론(chunky thinking)과 매끄러운 추론(smooth thinking)을 제안하였는데, 덩어리 추론은 본질적으로 이산적이고, 매끄러운 추론은 본질적으로 연속적인 특징을 갖는다. 덩어리(chunk)로 추론하는 학생은 한 주 또는 한 시간과 같이 특정한 시간이 지난 후에 특정한 시간 동안에 일어나는 변화를 머릿속에 그릴 수 있다. 예를 들어, 주 단위로 인식이 가능한 학생은 한 주를 더 작은 시간 단위, 즉 7일로 재 개념화를 한 후에야 하루 동안의 변화를 머릿속에 그릴 수 있다. 이와는 대조적으로, 매끄러운 추론이 가능한 학생은 새로운 시간 단위를 구성할 필요 없이 현재시제 그대로 모든 순간에 일어나는 변화를 머릿속에 그릴 수 있다.

Castillow-Garsow(2012)는 학생들이 변량들 사이의 관계가 비연속적(discontinuous)인 상황에서 이산적인 추론에 의해 이산적인 방법을 생성하거나 이산적인 추론에 의해 연속적인 해결을 얻는 사

례를 보여주었다. 예를 들면, 송이가 10일 동안 매일 아침 7시에 200원씩 용돈을 받을 때 용돈을 받기 시작한 순간부터 10일까지 시간이 연속적으로 변화함에 따라 송이가 보유한 돈의 양은 비연속적인 계단 모양의 그래프로 그려지는 비연속적인 상황이다. 이러한 상황에서 학생들은 시간을 이산적으로 추론하여 하루마다 변화하는 시간, 즉 하루, 이틀, 삼일에 갖고 있는 돈의 양을 구하기 위해 200원씩 더해가는 이산적인 방법을 사용하거나 하루마다 송이가 갖고 있는 돈의 양을 좌표평면 상의 몇 개의 점으로 나타낸 후 점들을 선으로 이어 오른쪽 위로 향하는 직선 모양인 그래프, 즉 연속적인 그래프로 나타낼 수 있다. 이와 마찬가지로 학생들은 연속적인 상황에서도 이산적인 방법을 사용하기도 하는데, 그 이유는 학교수학에서 세기, 계산하여 값을 찾기, 좌표평면에 한 점을 나타내기와 같이 이산적으로 추론하여 변화를 표현하는 활동을 중요하게 다루고 있기 때문이다(Castillow-Garsow, 2012). 이러한 맥락에서 Castillow-Garsow(2012)는 연속함수를 공변적으로 추론하는 과정에서 양들 사이의 변화와 연속성에 대한 인식은 필수적이지만, 양적 추론과 연속 추론을 함께 고려하는 것은 쉽지 않으며 공학을 활용하여 연속적인 추론의 발달을 이끌 것을 제안하였다. 그러나 그들은 연속적인 상황과 비연속적인 상황에서 드러나는 학생들의 행위에만 주목한 것으로, 실제 수업에서 학생들이 연속적인 추론으로 발달해 가는 과정, 그들의 발달에 도움을 주는 교수·학습의 내용을 제시한 것은 아니다.

이에 본 연구는 Castillow-Garsow의 연구(2012)를 토대로 하여, 이산적인 상황, 비연속적인 상황, 연속적인 상황을 포함하는 다양한 과제에서 함수의 그래프를 표현하고 해석하는 행위, 과제를 해결하는 방식, 그 방식을 이끌어내는 추론, 문제를 해결한 결과를 분석 및 제시하고자 한다. 이를 토대로 하여 학생들의 함수의 그래프에 대한 이해와 발달의 과정을 깊이 있게 살펴보겠다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 방법 개관

본 연구의 목적은 중학생들이 함수적 상황을 그래프로 표현하고 해석하는 과정에서 드러나는 함수의 그래프에 대한 이해와 발달, 학생간의 차이점을 탐색하는 것이다. 이에 본 연구에서는 실제 교수·학습 상황에서 학생들의 수학적 사고 및 학습과정을 직접 경험하고 이를 통해 학생들의 수학지식의 발달에 관한 모델을 만드는 것을 궁극적인 목적으로 하는 교수실험법(Teaching Experiment Methodology)을 택하였다(Steffe, & Thompson, 2000). 교수실험법의 목적은 학생의 학습 과정을 연구하기 위한 것으로 교수실험에서는 참가 학생의 수학적 사고에 근접한, 즉 학생의 조작 방식에 대한 가설을 세우고, 이를 수정 및 검증하기 위해 교사의 의도가 반영된 과제와 활동을 학생들에게 지속적으로 제시해 나간다(Hackenberg, 2009). 따라서 본 연구는 교수실험이 실시되기 이전에 과제의 목표와 내용 및 활동 계획이 수립되었지만, 교사[1]는 교수실험을 진행해 나가면서 수업 중 또는 수업 직후에 학생의 행위로부터 드러나는 사고 수준에 기초하여 다음 수업에 학생들에게 제시할 과제를 결정하였다(Lobato, & Siebert, 2002).

2. 자료 수집 및 분석 방법

본 연구를 위한 수업 자료는 중학교 1학년 학

1) 교수실험을 진행한 교사는 제1저자이다.

생 두 명을 대상으로 약 7개월(2015.4.~2015.11.)에 걸쳐 실시한 교수실험에서 수집되었다. 모든 수업은 각 학생들의 기록 행위를 담을 카메라 2대, 학생의 표정, 행동, 교사와 상호작용, 학생간의 상호작용 등 전체 교수실험의 장면을 담을 카메라 1대, 학생의 언어적 표현, 교사와 학생의 대화, 학생간의 대화를 녹음하기 위한 녹음기 1대를 사용하여 참여 학생들의 모든 수학적 활동 및 기록물의 생성 과정을 촬영하였다. 이는 수업에서 학생의 모든 행위에 주목하고 행위로부터 드러나는 사고 과정을 분석하기 위함이다. 수업이 끝난 직후 비디오와 오디오 자료들은 하나의 비디오 파일로 편집되어, 전사과정을 통해 자료 분석 작업에 사용되었다. 또한 학생들이 수업에서 작성한 활동지, 연구자가 작성한 현장노트, 다음 차시의 수업 과제를 구성하기 위한 연구자들과의 회의일지도 수집되어 분석에 활용하였다.

분석 과정에서는 학생들의 함수의 그래프에 대한 이해와 개념의 발달 과정, 학생간의 차이점을 살펴보기 위하여 수업에서 수집된 자료와 비디오 파일을 반복적으로 보면서, 학생 행위에 대한 기록을 계속해서 만들어나갔다. 이러한 기록은 각 학생의 사고패턴, 변화, 제한점을 일관되게 설명할 수 있는 행위의 유사성을 찾는 데 활용되었다(Hackenberg, 2009).

3. 연구 참여자와 과제 소개

본 연구에서 분석된 수업의 목적은 학교수학에서 일차 함수를 학습하기 이전 학생들을 대상으로 함수를 다양한 방식으로 표현하고 해석하는 행위로부터 드러나는 일차 함수에 대한 이해와 발달을 탐색하는 것이었다. 이를 위해 수업에 참여하는 학생들은 일차 함수를 학습한 경험이 전혀 없고, 새로운 과제에 호기심을 갖고 있으며, 수학 과목에 대한 성취감이 높지만 비례 추론 능력의 수준이 서로 다른 학생들을 선발하고자 하였다. 경북 지역에 근무하는 J중학교 수학 선생님의 추천을 받아 학생 A와 학생 B가 교수실험에 참여하는 학생으로 선발되었다. 두 학생 모두 중학교 1학년 학생으로 학교 수학과 사교육에서 일차 함수를 학습한 경험이 없고, 수학 실력은 중상위권으로 서로 비슷하며, 자신의 생각을 적극적으로 표현할 수 있다. 또한 예비실험에서 비와 비율 개념을 포함하는 과제를 해결할 때, 두 학생은 서로 다른 수준의 비례 추론 능력[2)]을 보여주었다. 수업은 교사와 학생 A, 학생 B가 참여하였고, 한 차시에 1시간에서 2시간, 총 15차시 실시되었다. 수업이 끝난 직후 2명 이상의 저자들은 수업자료를 검토하면서 준비했던 문제에 대한 예상치 못했던 학생의 반응에 대해 원인을 진단하고 현재 학생 지식의 상태를 점검하여 그 학생의 잠재적 구성 영역(zone of potential construction)[3)]에 있다고 판단되는 과제(Steffe, 1991)를 다음 수업의 과제로 선정하였다.

수업 초기, 학생들은 (연구자의 관점에서) 연속적인 상황을 그래프로 나타낼 때([과제1]참고) 이산적인 방법으로 몇 개의 값을 구한 후, 값들을 좌표평면 상에 점으로 대응시켰고, 점들을 연결하여 연속인 그래프로 표현하였다. 이후 교사가 학생들에게 이산적인 상황을 그래프로 표현하도록 요구하였을 때도([과제2] 참고) 학생들은

2) 학생들의 비례 추론 능력과 그들의 차이점에 대한 분석 및 설명은 본 연구의 범위를 벗어난 내용이므로 본 연구에서는 다루지 않겠다.

3) 잠재적 구성 영역이란 교사가 학생의 정신적 활동(operation)을 촉진시키고 지식의 구성을 이끄는 과제를 의도적으로 제시할 때(Norton, & D'Ambrosio, 2008), 학생이 자신의 고유 경험과 지식의 구조 안에서 새로운 지식을 구성할 수 있는 범위를 의미한다(Steffe, 1991).

4) 본 연구에서는 과제 번호 1번, 15번, 15번 추가문제, 19번, 19번 추가문제, 23번의 두 가지 상황을 각각 [과제1], [과제2], [과제3], [과제4], [과제5], [과제6], [과제7]로 기술하겠다.

<표 III-1> 분석에 활용한 수업과 과제 분석

수업차시(일자)	과제번호[4]	과제에 제시된 상황
1차시 (2015. 4. 18.)	1번 [과제1]	연속적인 상황을 그래프로 표현 (움직이는 자동차에 대한 시간과 거리 사이의 관계를 그래프로 표현)
2차시 (2015. 4. 25.)	15번 [과제2]	이산적인 상황을 그래프로 표현 (아이스크림 콘의 개수와 가격 사이의 관계를 그래프로 표현)
	15번 추가문제 [과제3]	비연속적인 상황을 그래프로 표현 (시간과 보유하고 있는 용돈 사이의 관계를 그래프로 표현)
3차시 (2015. 5. 1.)	19번 [과제4]	비연속적인 그래프를 해석 (고기 중량과 가격 사이의 관계를 나타낸 그래프를 해석)
	19번 추가문제 [과제5]	비연속적인 그래프를 해석 (고기 중량과 가격 사이의 관계를 나타낸 그래프를 해석)
5차시 (2015. 5. 16.)	23번 [과제6]	비연속적인 상황을 그래프로 표현 (휴대폰 사용 시간과 요금 사이의 관계를 그래프로 표현)
	23번 [과제7]	연속적인 상황을 그래프로 표현 (휴대폰 사용 시간과 요금 사이의 관계를 그래프로 표현)

이전과 마찬가지로 좌표평면상에 이산적인 방법으로 몇 개의 점을 찍은 후 연속적인 그래프로 나타내었다. 교사는 한 양이 변하는 동안 다른 양이 일정 구간마다 특정한 값으로 유지되는 상황을 학생들에게 제공하고자 [과제3]을 제시하였고, [과제3]과 이후 제시된 과제들(<표 III-1> 참고)에서 학생 A는 문제 해결을 위한 추론 방식과 문제를 해결한 결과에서 변화된 모습을 보여주었다. 학생 B의 경우 [과제1]과 [과제2]를 해결한 방식 및 그 결과가 학생 A의 것과 유사해 보였지만, 이후 다룬 과제들에서는 학생 A와 대비되는 모습을 보여주었다. 이에 본 연구는 여러 문제들 가운데 함수의 그래프에 대한 이해와 발달, 학생간의 차이점이 두드러지게 드러나는 대표적인 문제들에 주목하여, 문제를 해결하는 방식, 그 방식을 이끌어내는 추론, 문제를 해결한 결과를 분석 및 제시하도록 하겠다.

Ⅳ. 연구 결과

함수의 그래프에 대한 개념을 포함하는 과제를 분석한 결과, 학생들이 해결한 과제 순서에 따라 학생의 함수의 그래프에 대한 이해의 변화를 확인하였다. 이에 본 연구는 수업이 진행된 순서에 맞춰 학생의 문제 해결 과정을 살펴보겠다.

먼저 학생이 함수적 상황을 그래프로 표현하고 해석하는 초기 모습을 살펴본 후, 이후 교사가 학생에게 제시한 과제 및 발문의 내용과 의도, 그에 따른 학생의 반응을 분석 및 제시하겠다.

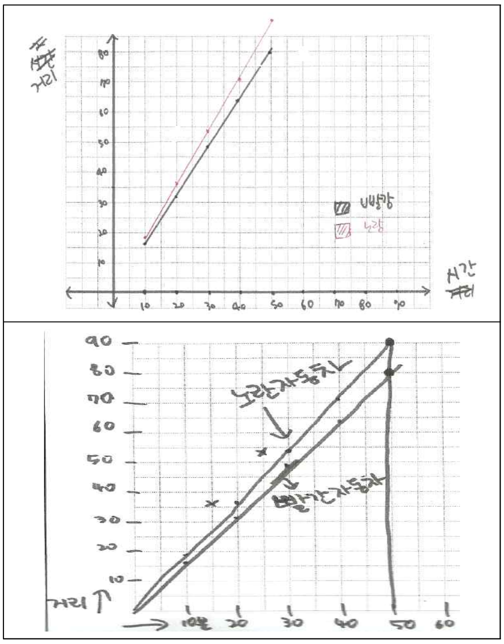
1. 함수의 그래프에 대한 이해

가. 연속적인 상황을 이산적인 방법을 사용하여 연속인 그래프로 표현하고 해석하는 학생 A와 학생 B

교사는 학생들이 문제에 제시된 상황을 그래프로 표현하고 해석하는 과정에서 드러나는 함수의 그래프에 대한 이해 정도를 살펴보고자 하였다. 아래 제시된 [과제1]은 첫 수업에서 다루어진 문제이다. [과제1]의 상황은 두 자동차 각각 시간에 따라 이동한 거리의 비율이 일정하게 유지되는 것을 가정한 것으로, 학생들은 문제에 제시된 두 변량인 시간과 거리 사이의 관계를 연속적인 그래프로 표현할 수 있다.

[과제1] 빨간 자동차는 32km를 달리는데 20분이 걸렸습니다. 노란 자동차는 54km를 달리는데 30분이 걸렸습니다. 어느 자동차가 더 빠르다고 생각합니까?

학생들은 [과제1]을 해결하기 위해 어떤 거리를 달리는 데 소요되는 시간에 대한 정보로부터 두 자동차의 빠르기를 비교해야한다. 두 학생 모두 문제를 읽자마자 특정한 시간(학생 A는 10분, 학생 B는 1시간) 동안에 이동한 거리를 비교하면서, 노란 자동차가 더 빠르다는 결론을 얻었다. 교사는 학생들에게 [과제1]에 제시된 상황을 그래프로 나타낼 것을 요구하였고, 학생들은 다음 <그림 IV-1>과 같이 표현하였다.



[그림 IV-1] 학생 A(위)와 학생 B(아래)의 [과제1]에서 시간-거리 사이의 관계에 대한 함수의 그래프

두 학생 모두 [그림 IV-1]에서 보이는 바와 같이 가로축에는 시간, 세로축에는 거리라고 적었고, 두 변량 사이의 관계는 5개의 점을 지나는 직선 모양인 그래프로 표현하였다. 교사가 학생들에게 그래프에 대한 설명을 요구하였을 때, 학생들은 10분, 20분, 30분, 40분, 50분과 같이 10분부터 시작하여 10분 단위로 변화하는 시간에 대한 이동한 거리만을 언급하였다.

교사는 학생들에게 직선 위에 있는 모든 점의 의미를 직접적으로 묻는 대신에 [과제1]의 상황에 대한 그래프가 곡선이 아닌 직선 모양인 이유를 물었다. 학생 B는 아무런 대답을 하지 않았고, 학생 A는 그래프가 곡선 모양으로 나타나기 위해서는 마이너스, 플러스가 있어도 상관이 없다고 말하였다. 교사가 학생 A에게 추가적인 설명을 요구하지 않아 그의 생각을 정확하게 추론할 수 없다. 그러나 우리가 주목해야 할 점은

두 학생 모두 자신이 그린 직선 모양인 그래프에서 점과 점 사이를 채우는 부분, 즉 점들 사이를 연결한 선의 의미를 5개의 점과는 다른 의미를 가진 것으로 인식하는 것처럼 보였다는 것이다.

또한 학생들이 표현한 그래프([그림 IV-1] 참고)에서 두 학생 간의 차이점도 존재하였다. 학생 B의 그래프는 0분과 10분 사이가 직선으로 연결되어 있고, 학생 A는 그렇지 않다. 교사는 학생들에게 두 그래프를 비교하여 차이점을 설명할 것을 요구하였다. 두 학생 모두 교사의 거듭된 발문에도 0분과 10분 사이의 차이점에 대한 언급은 전혀 없었다. 이러한 사실로부터 학생들은 [과제1]의 상황을 표현한 그래프에서 5개의 점만 분명하게 인식하고 있는 것으로 보인다.

정리하면 [과제1]의 상황을 그래프로 표현하는 활동은 학생들에게 변량의 변화를 매끄럽게 추론하는 능력을 요구한다. 그러나 학생들은 좌표평면위에 몇 개의 점을 찍는 이산적인 방법을 사용하여 주어진 상황을 직선 모양인 그래프, 즉 연속적인 그래프로 나타내었다. 이에 연구자들은 학생들의 [과제1]에 대한 문제 해결 과정을 분석한 후 함수의 그래프에 대한 개념적 발달을 돕는 새로운 과제 준비를 위한 협의 과정을 거쳤다. 협의 결과, 교사는 학생들에게 [과제2]를 제시하면서, 아이스크림의 개수에 따른 가격의 그래프와 중량에 따른 가격의 그래프를 표현하게 한 후, 두 그래프를 비교할 수 있는 기회를 제공하기로 의견을 모았다. 구체적인 내용은 다음절에서 살펴보겠다.

나. 이산적인 상황을 이산적인 방법을 사용하여 연속인 그래프로 표현하고 해석하는 학생 A와 학생 B

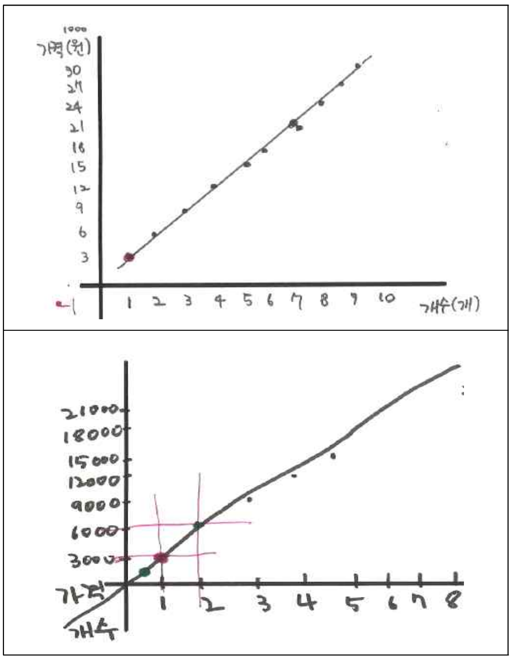
아래 제시된 [과제2]는 두 번째 수업에서 다루어진 문제이다. [과제2]의 상황은 콘의 개수가 1,2,3..개로 늘어남에 따라 중량 또는 가격의 비율이 일정하게 유지되는 조건을 포함하고 있는 것으로, 학생들은 콘의 개수와 가격 사이의 관계, 콘의 중량과 가격 사이의 관계를 각각 이산적인 그래프, 연속적인 그래프로 표현할 수 있다.

[과제2] 송이는 20일 동안 용돈을 모아서, 현재 7800원을 갖고 있다. 송이는 동생과 함께 학교 근처 아이스크림 가게인 '스노우버드'에 갔다. 아래 표는 '스노우버드'에서 판매하는 아이스크림 가격표인데, 송이는 최대한 몇 개의 콘을 살 수 있는가? (단, '스노우버드'에서는 아이스크림을 콘으로만 판매하고 있다.)

(콘)	중량 (g)	가격 (원)
[illegible]		
2		6000
4	480	12000
5	600	
	[illegible]	
	1080	
		30000

학생들이 [과제2]를 해결하는 과정을 간단히 살펴보면 다음과 같다. 학생 A는 중량에 따른 가격에 주목하였다. 즉, 콘의 개수가 4와 5일 때의 중량 차이는 120g이므로, 120g에 얼마를 팔 것이라는 가정을 세웠다. 이후 12000원을 4로 나누어 콘의 중량 120g의 가격으로 3000원을 구한 후, 콘의 가격은 3000, 6000, 9000으로 늘어날 것이라는 결론을 얻었다. 학생 B는 가격의 변화에만 먼저 주목하였다. 6000원과 12000원은 6000원 차이가 나므로, 그 사이의 값인 9000원은 콘 3개의 값이라고 말하였다. 교사는 이산적인 상황에 대한 함수의 그래프 표현 및 해석을 살펴보기 위해, 학생들에게 [과제2]에서 콘의 개수에 따른 가격의 그래프를 나타낼 것을 요구하였다. 학생

들은 다음 [그림 IV-2]와 같이 표현하였다.



[그림 IV-2] 학생 A(위)와 학생 B(아래)의 [과제2]에서 콘의 개수-가격 사이의 관계에 대한 함수의 그래프

학생들은 [그림 IV-2]에서 보이는 바와 같이, 가로축에는 콘의 개수, 세로축에는 콘의 가격이라 적었고, 두 변량 사이의 관계는 몇 개의 점을 지나는 직선 모양인 그래프로 나타내었다. [과제2]는 두 변량 사이의 이산적인 관계를 포함하고 있지만, 학생들은 [과제1]과 마찬가지 방법으로 상황을 표현한 것이다. 교사는 학생들의 함수의 그래프에 대한 생각을 알아보기 위해, 학생들에게 부가적인 설명을 요구하였다. 학생들은 다음 <발췌문 1>과 같이 답하였다.

<발췌문 1> : [과제2]에서 콘의 개수-가격 사이의 그래프 표현에 대한 설명

교사 : 그래프는? 상황에 적절한 그래프를 그리라고 했을 때 느낌은?

학생 A : 그림. 계산 할 필요가 없이 추세를 알 수 있게 그려라.

(중략)

교사 : 선으로 이은 이유는 뭐야?

학생 B : 어떤 식으로 늘어나는지, 점이 띄엄띄엄 있으면 보기 힘드니까 점을 찍어서 늘어나는 양을 보기 위해서.

(중략)

교사 : 점을 찍어도 되나? 아이스크림 주인의 입장에서는?

학생 A : 점으로 찍는 건 안돼요. 선은 얘가 점점 증가하거나 감소하고 있다? 점은 얘는 이거이다. 선은 증가하거나 감소하는걸 알 수 있잖아요.

교사 : 점으로 보고, [선을 가리키며]점으로 안보는 이유는?

학생 A : 0.5개 단위로 나타냈다면 점이겠죠. 우리는 1개 단위로 나타냈잖아요.(중략) 선으로 하면 알 수가 없잖아요.

<발췌문 1>에서와 같이 교사가 학생들에게 그래프의 의미와 [과제2]의 상황을 직선 모양인 그래프로 표현한 이유를 질문하였을 때, 학생 B는 변량 사이의 관계를 보기 쉽도록 만들기 위해 점을 찍어서 선으로 잇는다고 답하였다. 이와 마찬가지로 학생 A도 계산할 필요 없이 변화 추세를 알기 위해 그래프를 나타내기 때문이라고 답하였다. 교사가 학생들에게 상황에 제시된 조건만을 사용하여 아이스크림 주인의 입장에서 상황을 그래프로 표현할 것을 다시 요구하였을 때도 학생 A는 두 변량의 값이 함께 증가하거나 또는 감소하는지와 같은 두 변량 사이의 추측할 수 있는 변화 상태를 그래프로 표현한 것이라고 설명하였다. 결국 학생들은 이산적인 두 변량 사이의 관계를 포함한 [과제2]를 이산적인 방법으로 문제를 해결하였지만, 두 변량 사이의 관계를 표현한 그래프는 콘의 개수를 늘려감에 따라 가

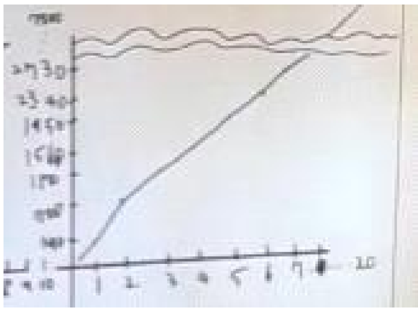
격이 증가한다는 인식을 바탕으로 구성한 직선 모양인 그래프였다. 즉, 학생들은 [과제2]에 제시된 변화하는 양과 양들 사이의 관계만을 그래프로 표현하는 것이 아니라, 상황에 제시된 정보를 통해 추측한 사실까지 나타낸 것이다.

한편 학생 A는 자신의 그래프에 대해 콘의 개수가 자연수일 때만 가격을 해석할 수 있으며 점들 사이를 잇는 선은 해석할 필요가 없다고 말하였다. 교사는 학생들과 수업을 진행하는 과정에서 콘의 개수에 따른 가격의 그래프를 나타내게 한 후, 학생들이 직선 모양인 그래프에서 점들 사이를 잇는 선의 의미와 중요성을 명확하게 인식하지 못한 것으로 판단하였다. 이에 교사는 연구자들과 사전에 협의한 내용을 수정하여, 학생들에게 중량에 따른 가격의 그래프와 같이 두 변량의 사이에 일정한 비율 관계가 아닌 상황을 포함하는 과제를 제시하기로 결정하였다.

2. 함수의 그래프에 대한 이해의 발달

가. 비연속적인 상황을 연속인 그래프로 표현하는 학생 B와 이를 해석하면서 그래프 표현 및 해석에 의문점을 갖기 시작하는 학생 A

교사는 학생들에게 [과제2]에서 송이가 20일 동안 용돈을 받아 모은 돈이 7800원이 되는 상황을 그래프로 나타낼 것을 요구하였다. 송이가 용돈을 받는 시기를 명확하게 언급한 것은 아니지만, 두 학생 모두 아래의 [그림 IV-3]에서와 같이 0일부터 시작하여 하루마다 동일한 금액의 용돈을 받는 것을 가정하고 문제를 해결하였다. 먼저 학생 B의 경우를 살펴보면, 학생 B는 교사의 설명을 듣자마자 가로축에 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,...10을 왼쪽부터 차례대로 적고, 세로축에는 390, 780, 1170, 1560, 1950, 2340, 2730,...7800을 적은 후, 좌표평면 상에 8개의 점을 찍었다. 이후 아래의 [그림 IV-3]과 같이, 점들을 직선으로 연결하였고 세로축의 2730과 7800사이에 물결표시를 하였다.



[그림 IV-3] 학생 B의 [과제2]에서 시간-돈의 양 사이의 관계에 대한 함수의 그래프

[그림 IV-3]에 대한 학생 B의 설명으로부터 학생 B는 가로축을 용돈 받은 일수, 세로축은 용돈의 양을 나타낸 것으로, 0일부터 시작하여 하루 단위로 변화하는 시간에 따라 받는 용돈의 양을 좌표평면 상의 점으로 표현한 후 점들을 직선으로 연결한 것을 알 수 있었다. 교사는 학생 B에게 송이가 2.5일에 가진 돈의 양을 구할 것을 요구하였고, 학생 B는 “아침에 받았을 수도 있고...”라고 대답하였는데, 이는 하루 중 아침에 용돈을 받을 수도 있다는 것을 말하려고 한 것으로 보인다. 모든 자료 수집이 끝난 후 회고 분석 과정에서 학생 B는 교사의 발문 이후 상황을 인식하고 그래프로 표현하는 과정에, 용돈을 받는 시점, 즉 시간을 의식적으로 고려하기 시작한 것으로 보인다.

학생 A는 학생 B의 그래프([그림 IV-3] 참고)에 대해 교사와 함께 대화를 나누는 과정에서, 수학책에서 자료를 생략하기 위해 물결표를 사용한 적은 있지만, 생략을 하면 생략된 지점의 값들 사이의 관계는 알 수가 없다고 말하였다.

또 이전에 구한 콘의 개수에 따른 가격의 그래프에서 틀린 부분이 있을 것 같다며, “점을 찍지 않으면 파는 게 아니다”라는 결론을 내렸다. 결국 학생 A는 학생 B의 그래프를 해석하는 과정에서 [과제2]에서 콘의 개수-가격 사이의 관계를 표현한 그래프에 대해 의문점을 갖기 시작하였다. 학생 A는 교사의 도움을 받아 가로축을 더 연장하여 1부터 20까지 1씩 커지는 숫자들을 빠짐없이 모두 적었고, 좌표평면에 20개의 점을 찍었다. 학생 A의 상황에 대한 그래프 표현 및 해석은 다음절에서 구체적으로 살펴보도록 한다.

나. 비연속적인 상황에서 한 변량 값의 단위를 더 잘게 쪼개어 연속인 그래프로 표현하고 해석하기 시작하는 학생 A와 학생 B

아래의 [과제3]은 [과제2]에 제시된 송이가 20일 동안 용돈을 모아서 7800원을 갖고 있는 상황에 용돈 받는 시점을 추가한 것이다.

<u>[과제3] 송이가 20일 동안 모은 용돈이 7800원이다. 24시간마다 390원을 받을 때, 20일 동안 송이가 가진 돈의 양을 그래프로 표현하시오.</u>

[과제3]에 제시된 상황에서 학생들은 1) 하루, 이틀, 삼일과 같이 용돈을 받는 기간이 1일부터 시작하여 하루씩 이산적으로 변화함에 따라 받는 용돈 비율의 일정함과 2) 연속적으로 변화하는 시간에 따라 매순간 송이가 보유한 용돈의 양을 상상할 수 있어야 한다. 이전에 다루어진 과제들과 달리 [과제3]에 제시된 상황을 그래프로 나타내면 비연속적인 계단 모양인 그래프이다. 교사는 학생들에게 [과제3]에 제시된 상황과 학생 B가 그래프([그림 IV-3] 참고)로 표현한 상황이 서로 일치하는지를 질문하였고, 학생 A의 설명은 아래의 <발췌문 2>와 같다.

<u><발췌문 2> : [과제2]에서 학생 A와 [과제3]에서 학생 B의 그래프 표현에 대한 학생 A의 해석</u>

학생 A : [놀라는 표정을 지으면서]아. 아닌 것 같아요. (중략) 그러니까 알겠어요. [콘의 개수와 가격 사이의 그래프를 가리키며]얘 같은 경우에는 단위가 한 개잖아요. 가운데라는 게 없어요. 얘네들 같은 경우에는 반 콘이라든가 반일에 얼마를 두지 않는다는 거에요. (중략) 얘 같은 경우는 콘이잖아요. 그러니까 즉 반 콘이나 1/3콘이나 1/4콘 같은 게 존재하지 않는다. (중략) 그러면은 1개에 3000원이고. 2개에 6000원인데. 선을 긋는다면 가운데 점이 발생하는 거잖아요. 그러니까 선은 점과 점을 찍어서 한 거니까. 가운데 점이 생긴다는 거잖아요. 그러면은 둘이가 안 맞는다는 뜻이잖아요. 정 그래프를 그리려면 점만 찍어야 한다.

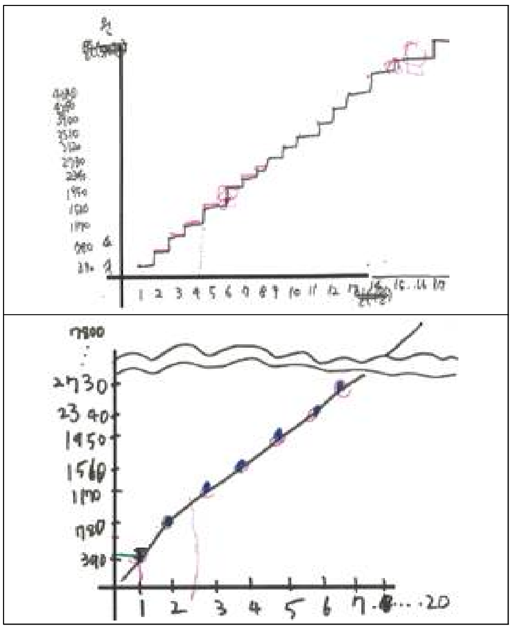
교사 : 그럼 [[과제3]을 가리키며]이거는 어떻게 되겠어?

학생 A : [[과제3]을 가리키며] 얘도 똑같이 하루 단위로 용돈을 받으니까 하루 반 지났다고 하루 반치를 받는 게 아니니까 그대로 점만 찍으면 가운데 점이 존재하지 않는다. (중략) 그러면은 [계단 모양을 그리며]이렇게 이렇게 나타내야 돼요?

<발췌문 2>에 따르면, 학생 A는 놀란 표정을 지으면서 [과제3]에 제시된 상황과 학생 B가 나타낸 그래프([그림 IV-3] 참고)의 상황이 서로 다르다고 말하였다. 또한 [과제2]에서 콘의 개수에 따른 가격을 나타낸 자신의 그래프([그림 IV-2] 위쪽 참고)를 가리키며, 아이스크림 주인은 콘으로 판매하기 때문에 반 콘이나 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$콘의 가격을 나타내는 것은 적절하지 않다고 말하였다. 이는 학생 A가 이전과 다르게 0콘과 1콘 사이의 또 다른 콘의 개수에 따른 가격을 고려하기 시작

한 것으로 보인다. 이와 같은 학생 A의 표정과 그의 설명에 비추어 보면, 학생 A는 이산적인 두 변량 사이의 관계를 포함하는 상황에 대해 직선 모양인 그래프로 표현한 경우와 몇 개의 점으로만 표현한 경우를 처음으로 구분하기 시작한 것으로 보인다.

교사는 <발췌문 2>에서 보이는 바와 같이, 학생 A에게 [과제3]의 그래프도 예상해볼 것을 요구하였고, 학생 A는 손으로 계단 모양을 그렸다. 교사가 학생들의 생각을 더 구체적으로 살펴보기 위해, 학생들에게 [과제3]에 제시된 상황을 그래프로 나타낼 것을 다시 요구하였을 때, [그림 IV-4]에서와 같이 학생 A는 계단 모양인 그래프로, 학생 B는 “직선만 없애면 되지 않을까요?”라고 말하면서 직선 위에 있는 점들을 색깔 있는 펜으로 표시하였다. 교사는 학생들에게 추가적인 발문을 하였고, 그 내용은 다음 <발췌문 3>와 같다.



[그림 IV-4] 학생 A(위)와 학생 B(아래)의 [과제3]에서 시간-돈의 양 사이의 관계에 대한 함수의 그래프

<발췌문 3> : [과제3]의 시간-돈의 양 사이의 그래프 표현에 대한 설명

교사 : 자 그러면 선생님의 설명을 다시 듣고 학생 B는 점만 찍었고 학생 A는 어떻게 나타낸 거야?

학생 A : [<그림 V-4>를 가리키며]이렇게

학생 B : [작은 목소리로]아...

학생 A : 저도 점만 찍어야 될 거라고 생각했어요. 점만 찍는다면 2.5일에는 돈이 없다는 거잖아요. 점이 없다는 거는.

교사 : 그래프에서만 본다면? 왜?

학생 B: [작은 목소리로]아..

학생 A : 아까 직선으로 했다는 거는 몇 분 단위로 이때는 2.5일 요만큼 나왔고 그래서 [손으로 직선을 그리면서]이렇게 된 거잖아요. 그런데 점만 찍으면 2.5일에 돈이 없다는 뜻이잖아요. 이때는 돈이 있고, 지금 돈이 없고, 있고 없고. 그러면은 요렇게 가만있다가 받고 가만있다가 받고 이렇게 될 것 같아요.

(중략)

교사 : 만약에 학생 B처럼 점만 찍는다면? 2.5일에 돈이?

학생 B : [그래프에서 2.5일을 가리키며]여기에는 없고 시간마다 하루마다 생겼다 없어졌다.

[그림 IV-4]에서 보이는 바와 같이, 학생 A는 두 변량인 시간과 돈의 양 사이의 관계를 계단 모양인 그래프로 나타내었다. 교사는 <발췌문 3>과 같이 학생들에게 그래프에 대한 설명을 요구하자 학생 A는 점만 찍는다면 2일에 돈이 있고, 2.5일에 돈이 없다는 것을 의미하기 때문에 두 변량 사이의 관계는 [그림 IV-4](위)와 같이 표현되어야 한다고 설명하였다. 이는 학생 A가 2일과 3일이라는 특정 시점이 아닌 두 시점 사이에 존재하는 시간을 문제 상황에서 명백히 인식하고 고려한 결과인 것으로 보인다. 또한 학생 A는 [과제3]의 상황을 직선 모양인 그래프로 나타내는 것은 몇 분 단위로 해석하여 2일과 2.5일

사이에 요만큼 돈이 나온다고 말하였다. 학생 A의 표현과 설명에 비추어 보아, 학생 A는 두 변량 사이의 관계가 직선 모양인 그래프로 표현된 경우 시간 단위를 더 잘게 쪼갠 분 단위로 해석하여 2.5일에 받은 돈과 2일에 받은 돈이 서로 다름을 인식한 것으로 추정된다.

이에 반해 학생 B는 직선 위에 있는 점들 가운데 (1,390). (2,780), (3,1170), (4,1560), (5,1950), (6,2340), (7,2730)에만 한 번 더 표시하였다. 그는 상황을 몇 개의 점으로 표현하는 것이 더 적절하다고 생각한 것으로 보인다. 학생 B는 교사와 학생 A가 대화를 나누는 동안 작은 목소리로 "아.."를 연속해서 말하였다. 교사는 학생 B에게 점만 찍혀있는 그래프에서 2.5일의 돈의 양을 구하도록 요구하였을 때, 학생 B는 2.5일에는 없고 하루마다 생겼다 없어졌다한다고 답하였다. 학생 B는 그가 나타낸 그래프에서 2.5일에 가진 돈의 양이 없다는 것을 말하려고 한 것으로 추정된다. 이는 학생 B도 2일과 3일 사이에 존재하는 값을 고려하기 시작한 것이다. 다음절에서 두 학생들의 그래프에 대한 인식의 변화와 그들의 차이를 더 구체적으로 살펴보겠다.

다. 직선 모양인 그래프에서 점들을 잇는 직선에 대한 인식의 변화

교사는 학생들이 [과제3]을 해결하는 과정에서 보여준 변화된 모습을 다시 한 번 더 확인하기 위해, 학생 B에게 [과제2]의 콘의 개수와 가격 사이의 관계에 적절한 그래프가 무엇인지를 질문하였고, 학생 B는 자신의 그래프([그림 IV-2] 아래쪽 참고)를 가리키며 작은 목소리로 안 맞는 것 같기도 하다고 말하였다. 이는 학생 B가 자신의 생각에 확신을 갖지 못한 것으로, 주어진 상황과 자신의 그래프에서 해석될 수 있는 상황의 차이를 분명하게 이해하지는 못한 것으로 보인다. 교사는 학생들에게 학생 B가 표현한 직선 모양인 그래프([그림 IV-2] 아래쪽 참고)를 해석하도록 요구하였다. 다음 <발췌문 4>는 교사와 학생들이 나눈 대화 내용의 일부를 발췌한 것이다.

<u><발췌문 4> : [과제2]의 콘의 개수-가격 사이의 그래프 표현에 대한 해석</u>

교사 : 어떻게 해석해야 될까? 2.5콘을 주문할 수 있을까? (중략) 이 그래프만 본다면?
학생 B : 음.. 안..2.5콘을...
교사 : 팔까? 안팔까? 학생 A는?
학생 A : 판다.
교사 : 학생 B는?
학생 B : 표로 직선이 그어져 있다면 살 수 있을 것 같아요.
교사 : 그래프가 어떤 의미인 것 같애?
(중략)
학생 B : 간단하게 보자고 그린 그림인데 자세하게 들여다보면 살짝 엉키는. 이게 계속 해결을 하다 보면 다른 문제가 생기고 계속 계속 다른 문제가 생겨나잖아요. 메우려고 하니까 또 조그만 문제가 생겨서 또 안 맞고
학생 A : 이런 형식으로 그래프를 생각해본 건 처음이에요. 가운데 값이 있다는 전제하에 그래프를 그엇잖아요. 수학책에서는.

<발췌문 4>에서와 같이, 학생 A는 학생 B와 대조적으로 학생 B의 콘의 개수-가격 사이의 관계를 나타낸 그래프에서는 2.5콘을 살 수 있다고 한 치의 망설임도 없이 답하였다. 또한 교사가 학생들에게 자신이 생각하는 그래프를 설명하도록 요구하였을 때, 학생 A는 자신이 표현한 그래프를 처음 접했으며 수학책에서 가운데 값이 있다는 전제하에 그래프를 표현한 것이었다고 답하였다. 이는 학생 A에게 함수의 그래프는 낯설지는 않지만, [과제3]을 해결하는 과정에서 그가 인식하고 있는 그래프의 의미를 더 정교화하여 새로운 지식을 구성하고 있는 것으로 판단된다.

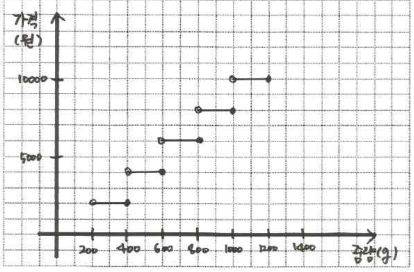
한편, 학생 B는 표로 직선이 그어져 있다면 2.5콘을 살 수 있다고 말하였기 때문에 그가 2콘과 3콘 사이의 또 다른 2.5콘을 생각할 수 있는 건 확실하다. 그러나 학생 B는 그래프에 대해 간단히 보자고 그린 그림인데 자세하게 드려다 보면 계속해서 문제가 발생된다고 대답한 것으로 보아 학생 A와 유사한 수준으로 상황을 그래프로 표현하고 해석한 것은 아닌 것으로 판단된다. 다음절에서는 또 다른 상황에서 드러나는 학생들의 함수의 그래프에 대한 이해와 발달의 차이점을 살펴보도록 하겠다.

3. 학생 A와 학생 B의 함수의 그래프에 대한 해석과 표현의 차이

가. 비연속적인 그래프 해석의 차이

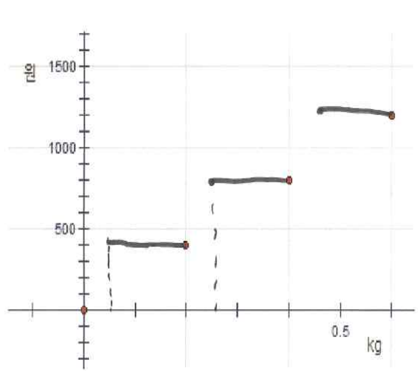
아래의 [과제4]는 학생들이 변량 간의 관계가 비연속적인 그래프를 상황에 적절하게 해석할 수 있는지를 확인하기 위해 학생들에게 제시한 문제이다. [과제4]에서 <마트>의 그래프는 학생 A가 [과제3]에서 나타낸 그래프([그림 Ⅳ-4]위쪽 참고)에서 y축에 평행한 세로선을 제외한 것이다.

[과제4] 송이는 엄마의 심부름으로 고기 1kg 반드시 사야 한다. 송이의 집 근처에는 마트가 있는데, 마트에서 판매하는 고기의 가격은 아래 그래프와 같다. 송이의 지갑에 9000원이 있다면, 송이는 엄마의 심부름을 할 수 있을까?



두 학생 모두 [과제4]의 <마트>의 그래프에서 고기 중량과 가격 사이의 관계를 해석하는 데 어려워하는 모습을 보였다. 특히 선의 양 끝에 있는 동그라미 안이 색칠되어진 경우와 텅 빈 경우의 차이가 무엇인지에 더 주목하는 모습을 보였다. 교사는 학생들이 중량을 나타낸 축과 평행한 선에 대한 해석을 확인하기 위하여, <마트>에서 500g을 살 수 있는지를 물어보았다. 학생 B는 교사의 질문에 대해 그래프에서 400g의 가격인 2000원과 600g의 가격인 4000원을 먼저 읽은 후, 500g은 400g과 600g의 가운데 값이고 2000원과 4000원의 차이는 2000원이므로 500g의 가격은 3000원이 될 것이라고 답하였다. 교사는 학생 B의 생각을 다시 한 번 더 확인하고자 [과제5]를 학생들에게 제시하였다. [과제5]는 [과제4]의 그래프에서 학생들을 혼란스럽게 했던 동그라미는 모두 삭제하고 고기 중량과 가격 사이의 관계를 선 모양인 그래프로 표현하였다. 교사는 학생들에게 [과제5]에 제시된 그래프에서 350g을 살 수 있는지를 질문하였다. 이와 관련하여 교사와 학생, 학생 간에 나눈 대화 내용은 다음 <발췌문 5>와 같다.

[과제5] (마트에서 350g살 수 있을까?)



<발췌문 5> : [과제5]의 그래프에 대한 해석

학생 A : [망설임 없이] 살 수 있어요.

학생 B : 안될 것 같아요. (중략) [선을 가리키며]이게 돈의 양을 나타내잖아요. 여기서는 일직선으로 그어져 있잖아요. 가로선으로. 350g을 사도 똑같은 라인에 있잖아요. 400g에도 800원이고 350g에도 800원이 있고. 그러니까 400g에도 800원이고 350g에도 800원이니까. 안 될 것 같아요.

학생 A : 이해가 안돼요. [선을 가리키며]여기는 못 산다구요? 둘 다 점은 있잖아요.

학생 B : 음.. 손해 이익을 따지지 않는다면 마트에서도 아무 g이든 어떤. 살 수 있을 것 같아요.

학생 A : 어떤 g이든은 아닌 것 같아요.

<발췌문 5>에서 보이는 바와 같이, 동일한 그래프에 대한 학생들의 해석은 서로 달랐다. 구체적으로 살펴보면, 교사가 학생들에게 [과제5]에 제시된 그래프에서 350g을 구매할 수 있는지 질문하였을 때, 학생 A는 살 수 있고 학생 B는 그렇지 않다고 답하였다. 학생 B는 그래프가 돈의 양을 나타내는 것으로, 중량을 나타낸 축에 평행한 선으로 그어진 경우 400g과 350g에 대해서 같은 가격을 가지는 것이므로 그래프에서 350g을 사는 것은 불가능하다고 설명하였다. 학생 A는 학생 B의 생각이 이해가 안 된다고 말한 이후 학생 B는 손해 이익을 따지지 않는다면 마트에서 어떤 g도 살 수 있다고 말하였다. 이에 대해 학생 A는 선이 그려지지 않은 특정한 구간을 가리키며 그 구간에서는 살 수 없다고 답하였다. 이러한 사실로부터 학생 A는 그래프를 두 변량 사이의 관계를 나타내는 점들의 집합으로 인식하여, 선 위에 있는 한 점을 두 변량 사이의 관계로 해석한 것으로 추정된다. 즉, 학생 A는 그래프에서 중량이 연속적으로 변화함에 따라 그때의 가격을 모두 고려한 반면, 학생 B는 선의 양 끝, 또는 그래프에 표시된 점들에만 주목하는 모습을 보였다. 이는 학생 B가 비연속인 그래프에서도 여전히 이산적으로 추론하여 이산적인 방법으로 문제를 해결한 것으로 볼 수 있다. 결국 [과제4]와 [과제5]와 같이 동일한 문제 상황에 대해 학생 A는 연속적인 문제로, 학생 B는 이산적인 문제로 인식한 것으로 추정된다.

나. 비연속적인 그래프 표현의 차이

아래 제시된 [과제6]과 [과제7]은 5차시 수업에서 다루어진 문제 상황의 일부이다. 연구자들은 한 변량이 변화할 때 다른 변량의 값이 동일하게 유지되더라도 어색함을 느끼지 않는 상황을 학생들에게 제시하기로 의견을 모았다. 기존의 문제는 3개의 통신회사의 요금제를 각각 다르게 제시할 때 통화량에 따라 합리적으로 사용할 수 있는 요금제를 선택하도록 요구하는 문제이다. 본 연구는 요금제를 그래프로 표현하는 과정에서 학생 A의 함수의 그래프에 대한 이해의 발달과 두 학생의 차이점을 살펴볼 수 있는 문제에만 주목하였고, 이를 [과제6], [과제7]로 부르겠다.

[과제6] PKT는 2015년 인터넷전화 정액 요금제를 출시하였다. ‘PKT’의 요금제는 기본요금(월) 15000원을 내면 무료통화 160분을 제공받고, 무료통화를 모두 소진하면 10분마다 180원의 추가 요금이 발생된다.

[과제7] ‘A+’의 요금제는 기본요금(월) 10000원을 내면 무료통화 100분을 제공받고, 무료통화를 모두 소진한 경우 실시간으로 추가 요금이 발생되는데 처음 100분까지는 1분에 1500원이고 100분부터 200분까지는 1분에 2000원이다.

위 [과제6]은 0분부터 170분 미만까지는 기본요금인 15000원을 내고, 170분 이상은 10분마다 180원의 추가 요금이 발생하는 상황을 포함한다. 학생들은 상황에서 170분부터 10분마다 변화하

는 요금을 이산적인 방법으로 구한 후, 10분 사이에 연속적으로 변화하는 시간에 따른 요금을 상상하면서 비연속인 그래프로 나타내야 한다. [과제7]은 기본요금이 10000원이고, 무료통화 100분을 모두 사용한 후 추가 요금이 실시간으로 발생하는 상황을 포함한다. 학생들은 [과제7]의 상황을 그래프로 나타내기 위해 이산적인 방법으로 시간에 따른 요금을 계산하고, 연속적으로 변화하는 시간과 그에 대응하는 요금을 머릿속에 그릴 수 있어야 한다.

학생 A는 [과제3]에서와 같이([그림 IV-4]위쪽 참고) [과제6]에서도 계단 모양인 연속인 그래프로 나타내었다. 구체적으로 살펴보면, 학생 A는 가로축을 시간(분), 세로축을 요금(원)을 나타낸 후 0부터 170분까지는 일정한 값인 15000원을 갖고 170분부터 10분마다 180원씩 늘어나는 양을 계단 모양인 그래프로 표현하였다. 교사는 학생 A가 표현한 그래프를 가리키며, 사용시간이 170분일 때 얼마의 요금을 내는지 해석하도록 요구하였다. 다음 <발췌문 6>은 교사와 학생 A가 나눈 대화 내용의 일부이다.

<u><발췌문 6> : [과제6]에서 사용 시간-요금 사이의 그래프 표현에 대한 학생 A의 설명</u>

학생 A : 그렇게 되면 또 170에 다 찍히는데. 170에 금액은 여기란 말이에요. 젤 높은 데로 따지면 될까요?

교사 : 그 때 그 상황에 적절한 금액을 표현해야 되지 않을까요?

학생 A : 그러면 [계단 모양인 그래프에서 y축에 평행한 선을 가리키며]세로선을 뺄까요?

교사 : 세로선을 빼는 것과 안 빼는 것의 차이는 무엇일까?

학생 A : 포함되어 있다면 혼란이 생겨요. 170 선에 세로선이잖아요. 170에 [(170,15000)가리키며]여기를 내는지 ([170,15180)가리키며]저기를 내는지 혼란을 생길 것 같아요. 그니까 이렇게 될 바엔 세로선을 빼는 데.

<발췌문 6>에서와 같이, 학생 A는 자신의 계단 모양인 그래프에서 사용시간이 170분일 때 사용 요금은 170분일 때 y축에 평행한 세로선을 가리키며 제일 높은 데가 될 것이라고 말하였다. 그는 세로선 위에 있는 점들 가운데 가장 높은 값을 나타내는 점의 y값을 170분의 요금으로 말하려고 한 것 같다. 교사가 학생 A에게 상황에 적절한 금액을 구할 것을 다시 한 번 요구하였을 때, 학생 A는 두 변량 사이의 관계를 나타내는 그래프에 세로선이 포함되어 있다면 혼란이 생긴다고 답하였다. 학생 A는 170분일 때의 세로선은 선 위에 있는 모든 점을 요금이 늘어나는 상태가 아닌 170분일 때의 요금으로 해석할 수 있었기 때문에, 혼란스러움을 느꼈던 것으로 보인다.

한편, 학생 B는 [과제6]의 상황에 대한 그래프를 표현하는 과정에서 175분에 내야할 금액을 그래프에 어떻게 나타내야 하는지를 고민하기보다 175분을 사용했을 때 170분의 요금으로 내야하는지 180분의 요금으로 내야하는지를 더 고민하면서 자신의 생각을 [과제4]에서와 마찬가지로 손해와 이득으로 설명하였다. 학생 B는 충분히 고민을 한 후 [과제6]의 상황에 대한 그래프는 점만 찍혀있어야 한다고 말하였다. 또한 학생 B는 [과제7]의 상황에서 실시간의 의미가 그 시간 그대로이기 때문에 1분 지날 때 바로 15원을 나타낼 수 있는 그래프가 필요하다고 설명하였다. 결국 학생 B는 점이나 계단 모양인 그래프가 상황에 더 적절하다고 답하였다. 이에 반해 학생 A는 [과제7]에 제시된 상황에 적절한 그래프는 직선 모양인 그래프가 될 것이라고 말하였다.

정리하면, [과제6]은 학생 A에게 비연속인 두 변량의 관계를 연속적으로 추론하여 비연속인 그래프로 표현하고 해석할 수 있는 기회를 제공한 것으로 판단된다. 반면, 학생 B는 [과제7]에서 실시간의 의미를 1분 단위로 변화하는 시간으로

인식한 것으로 보이며, 이는 결국 이전 과제와 마찬가지로 이산적으로 추론하여 이산적인 방법으로 [과제6]과 [과제7]을 해결한 것으로 판단된다. 결국 [과제6]과 [과제7]은 학생 A에게 연속적인 문제이지만, 학생 B에게는 이산적인 문제이다.

Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구에서는 중학생들이 상황을 그래프로 표현하고 그래프를 상황에 적절하게 해석하는 과제를 해결하기 위해 사용하는 방식, 그 방식을 이끌어내는 추론, 과제의 해결로 나누어 분석하였고, 함수의 그래프에 대한 이해와 발달, 발달 과정에서 드러나는 학생간의 차이점을 살펴보았다. 본 연구에서 얻게 된 결과는 다음과 같다.

첫째, 본 연구는 Castillow-Garsow의 연구(2012)에서 살펴본 바와 같이, 함수의 그래프를 표현하고 해석하는 과정에서 변량을 연속적으로 추론하는 능력의 중요성을 다시 한 번 확인하였다. 두 학생 모두 연속적인 상황을 포함하는 [과제1]과 이산적인 상황을 포함하는 [과제2]에서 변량들 사이를 덩어리로 추론하여 좌표평면 상에 몇 개의 점을 찍은 후 점들을 선으로 연결하였다. 비연속적인 상황을 포함하는 [과제3]에서 학생 A는 점들 사이의 또 다른 순간에 대한 고민을 시작하였고, 이후 이산적인 상황과 연속적인 상황, 비연속적인 상황을 구분하면서 그래프로 표현하고 해석하였다. 학생 B는 [과제3]에서 변량들 사이를 덩어리로 추론하여 상황에 적절한 그래프는 몇 개의 점들을 연결한 직선으로 나타낼 수 있다고 답한 후 학생 A처럼 점들 사이의 존재하는 또 다른 값들을 고민하는 모습을 보이긴 하였지만, 비연속적인 상황을 포함하는 [과제6], [과제7]에서 여전히 과제에 제시된 상황에서 몇 개의 값만을 고려하여 학생 A와 다른 그래프로 나타내었다. 결국 이러한 변량의 변화에 대한 인식의 차이는 그래프를 표현하고 그래프를 상황에 적절하게 해석하는 행위에 영향을 미친 것으로 판단된다.

둘째, 본 연구는 함수의 그래프에 대한 이해를 발달시켜가는 과정에서 학생들이 겪는 어려움은

<표 V-1> 학생들의 추론 및 해결

연구결과 전개순서	1		2			3			
과제제시 순서	과제1	과제2	과제 3	과제2	과제3	과제4 (해석)	과제5 (해석)	과제 6	과제 7
주어진 상황 (그래프 모양)	연속 (직선)	이산	비연속 (계단)	이산	비연속 (계단)	비연속 (계단)	비연속 (계단)	비연속 (계단)	연속 (직선)
학생 A의 추론	이산	이산	-	이산	연속	-	-	연속	연속
학생 A의 해결 (그래프 모양)	연속 (직선)	연속 (직선)	-	이산 (점들)	연속 (계단)	-	비연속 (계단)	비연속 (계단)	연속 (직선)
학생 B의 추론	이산	이산	이산	-	이산	-	-	이산	이산
학생 B의 해결 (그래프 모양)	연속인 그래프 (직선)	연속인 그래프 (직선)	연속인 그래프 (직선)	-	연속 (직선) -> 이산 (점들)	연속 (직선)	연속 (계단)	연속 (직선) -> 이산 (점들)	이산 (점들) 또는 연속 (계단)

무엇인지, 그 원인에 대한 정보를 제공한 것이다. 학생들에게 제시된 과제와 학생들의 반응(<표 V-1> 참고)으로부터, 학생 A는 [과제2]를 이산적인 문제, [과제3]을 포함하여 이후에 다룬 문제를 연속적인 문제로, 학생 B는 모든 과제를 이산적인 문제로 인식한 것으로 판단된다. 학생 A는 변량들 사이의 관계를 매끄럽게 추론한 이후부터 모든 상황에 잘 적응하며 학생 B의 생각도 곧잘 이해하였고, 학생 B는 초기에 학생 A의 생각을 따라가고 있는 것처럼 설명하지만 [과제4], [과제5], [과제6]과 [과제7]에서는 기존의 자신이 풀던 방식대로 문제를 해결하였다. 이는 결국 Castillow-Garsow의 연구(2012) 결과와 유사한 것으로, 두 변량 사이를 덩어리로만 추론하는 학생의 경우 매끄러운 추론을 요구하는 상황을 해석하고 표현하는 것을 꽤 어려워하고 변량 간에 매끄러운 추론이 가능한 학생의 경우 덩어리와 매끄러운 추론을 요구하는 모든 문제 상황에 더 잘 적응함을 보여주는 것이다.

셋째, 본 연구는 Castillow-Garsow의 연구 결과(2012)를 확장하여 함수의 그래프를 표현하고 해석하는 초기 모습뿐만 아니라 그 발달의 과정을 제시한 것이다. 두 학생 모두 연속적인 상황을 포함하는 [과제1]과 이산적인 상황을 포함하는 [과제2]에서 이산적인 방법으로 몇 개의 값을 좌표평면에 나타낸 후 연속인 그래프를 표현하였다. 학생 B는 비연속적인 상황을 포함하는 [과제3]에서도 이산적인 방법으로 좌표평면 상에 몇 개의 점을 찍은 후 점들을 선으로 연결하였고, [과제6]과 [과제7]에서도 상황에서 변량 간의 관계를 덩어리로 추론하는 모습을 보였다. 이와는 대조적으로 [과제3]에서 학생 A는 점들 사이의 또 다른 값들에 대해 인식한 후 연결된 계단모양인 그래프로 나타내었다. 비연속적인 그래프를 해석하는 과제인 [과제5]를 적절하게 해석한 후, 비연속적인 상황을 포함하는 [과제6]에서 두 변량 간의 관계를 매끄럽게 추론하여 비연속적인 계단 모양인 그래프로 표현하고 해석하였다. 이는 학생들이 함수의 그래프를 표현하고 해석하는 과정에서 드러나는 초기 지식과 교사가 제시하는 과제와 발문을 통해 초기 지식이 변화되는 과정도 면밀히 살펴본 것이라 할 수 있다.

이와 같이 본 연구에서는 중학생들의 함수의 그래프에 대한 지식과 지식의 변화 과정, 그들간의 차이점을 Castillow-Garsow(2012)가 제안한 문제를 해결하는 방식, 그 방식을 이끌어내는 추론, 문제의 해결로 나누어 분석하였고, 함수의 그래프에 대한 이해를 발달시켜가는 과정에서 겪는 어려움과 어려움의 원인도 함께 살펴보았다. 본 연구의 결과를 통해 함수의 그래프에 대한 교수·학습과 연구에 다음과 같은 시사점을 줄 수 있을 것이라 기대한다.

첫째, 본 연구에서 분석된 수업은 최근에 개정된 수학과 교육과정의 함수 영역에서 강조하는 교수·학습의 측면과 같은 맥락으로, 본 연구의 결과는 함수 개념의 지도를 위한 교육과정 및 교과서의 구성에 도움을 줄 것으로 기대한다. 앞서 언급하였듯이, 2015 개정에 따른 수학과 교육과정에서 함수 영역은 함수의 그래프의 학습을 강조하면서, 중학교 1학년에서 현실 세계의 상황을 다양한 방식(표, 식, 그래프)으로 표현하고 해석하는 과정을 거친 후 중학교 2학년에서 함수의 개념을 도입한다(황혜정 외, 2016). 이러한 교육과정의 변화에 맞춰 본 연구는 중학생들이 함수적 상황을 그래프로 표현하고 해석하는 행위를 면밀히 살펴본 것으로, 실제 수업에 활용할 수 있는 교수·학습의 내용에 대한 정보를 제공한 것으로 판단된다.

둘째, 본 연구는 함수의 그래프를 지도하는 교사에게 학생의 수준을 진단하고 그 능력을 향상시킬 수 있는 과제를 준비하는 데 긍정적인 도움을 줄 것으로 기대한다. 본 연구 결과, 변량의

변화를 추론하는 능력은 함수의 그래프를 표현하고 해석하는 과정에서 중요한 역할을 한다는 것을 확인하였다. 따라서 이러한 결과는 함수의 그래프에 대한 학습에서 어려움을 겪는 학생이 있다면 무엇이 부족한지를 진단하는 데 하나의 참고 자료가 될 것이며, 학생이 함수의 그래프를 상황에 적절하게 표현하고 해석하더라도 그 상태에서 수학적으로 더 발전할 수 있도록 하려면 어떤 과제를 제시하고 이끌어 나가야 하는지에 대한 하나의 방향을 제시한 것이다.

셋째, 본 연구는 학생들이 함수의 그래프를 이해하는 과정을 세세하게 관찰하고 분석한 것으로, 함수의 그래프를 표현하고 해석하는 능력과 그 발달에 대한 후속 연구에 기초가 될 것이다. 또한 본 연구는 Castillow-Garsow(2012)가 제안하였던 것과 마찬가지로, 학생들이 함수의 그래프를 표현하고 해석하는 과정에서 두 변량 사이의 관계에 대한 인식이 중요한 역할을 한다는 사실을 확인하였다. 이러한 연구 결과를 토대로 하여 함수의 그래프 표현 및 해석의 발달 과정과 그 과정에서 보이는 차이점이 이후의 함수 학습에 어떤 영향을 미치게 되는지를 탐색하는 추가 연구도 이루어지기를 기대한다.

참고문헌

교육부(2015). **수학과 교육과정**. 교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8].

마민영·신재홍(2016). 대수 문장제의 해결에서 드러나는 중등 영재 학생간의 공변추론 수준 비교 및 분석. **학교수학, 18**(1), 43-59.

박선화・변희현・주미경(2011). **중학교 학생의 수학과 학습 특성 연구**. 한국교육과정평가원 연구보고 RRI 2011-5.

손홍찬・류희찬(2005). 함수 지도와 수학적 모델링 활동에서 스프레드시트의 활용. **수학교육학연구, 15**(4), 505-522.

안가영・권오남(2002). 함수 그래프 과제에서의 오류분석 및 처치. **한국수학교육학회지 수학교육논문집, 13**(1). 337-360.

이광상・조민식・류희찬(2006). 엑셀의 활용이 일차함수 문제해결에 미치는 효과. **학교수학, 8**(3), 265-290.

이종희・김부미(2003). 교수학적 처방에 따른 중학생들의 일차함수 오개념의 변화와 그 효과 분석. **학교수학, 5**(1), 115-133.

이화영・류현아・장경윤(2009). 함수의 그래프 표현 및 그래프 해석 지도 가능성 탐색. **학교수학, 11**(1), 131-145.

황혜정·나귀수·최승현·박경미·임재훈(2016). **수학교육학신론**. 서울: 문음사.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 352-378.

Castillo-Garsow, C. (2012). Continuous quantitative reasoning. In R. Mayes & L. L. Hatfield (Eds.), *Quantitative reasoning and mathematical modeling: A driver for STEM integrated education and teaching in context* (Vol. 2, pp. 55-73). Laramie, WY: University of Wyoming College of Education.

Ellis, A. B. (2011). Algebra in the middle school: Developing functional relationship through quantitative reasoning. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp.215-238). Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Ellis, A. B., Ozgur, Z., Kulow, T., Williams, C., & Amidon, J. (2012). Quantifying exponential growth: The case of the jactus. In R. Mayes

& L. L. Hatfield (Eds.), *Quantitative Reasoning and Mathematical Modeling: A Driver for STEM Integrated Education and Teaching in Context* (Vol. 2, pp. 93-112). Laramie: University of Wyoming.

Hackenberg, A. J. (2009). *Relationships between students' fraction knowledge and equation solving*. Paper presentation at the Research Pre-session of the annual conference of the National Council of Teachers of Mathematics, Washington, D.C.

Lobato, J. & Siebert, D. (2002). Quantitative reasoning in a reconceived view of transfer. *Journal of Mathematical Behavior, 21*(1), 87-116.

Monk, S. (1992). Students' understanding of a function given by a physical model. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 175-193). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Moore, K. C., & Thompson, P. W. (2015). Shape thinking and students' graphing activity. In T. Fukawa-Connelly, N. E. Infante, K. Keene, & M. Zandieh (Eds.), *Proceedings of the 18th Meeting of the MAA Special Interest Group on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 782-789). Pittsburgh, PA: RUME.

Norton, A., & D'Ambrosio, B. (2008). ZPC and ZPD: Zones of teaching and learning. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(3), 220-246.

Oehrtman, M.C., Carlson, M.P., & Thompson, P.W., (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' understandings of function. In M. P. Carlson & C. Rasmussem (Eds.), *Making the connection: Research and practice in undergraduate mathematics* (pp. 27-42). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Steffe, L. P. (1991). The constructivist teaching experiment: Illustrations and implications. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 177–194). New York: Kluwer Academic Publishers.

Steffe, L. P. & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Middle School Students' Understanding and Development of Function Graphs

Ma, Minyoung (Graduate School, Korea National University of Education)
Shin, Jaehong (Korea National University of Education)
Lee, SooJin (Korea National University of Education)
Park, JongHee (Graduate School, Korea National University of Education)

The purpose of this study is to investigate middle school students' understanding and development of function graphs. We collected the data from the teaching experiment with two middle school students who had not yet received instruction on linear function in school. The students participated in a 15-day teaching experiment(Steffe, & Thompson, 2000). Each teaching episode lasted one or two hours. The students initially focused on numerical values rather than the overall relationship between the variables in functional situations. This study described meaning, role of and students' responses for the given tasks, which revealed the students' understanding and development of function graphs. Especially we analyzed students' responses based on their methods to solve the tasks, reasoning that derived from those methods, and their solutions. The results indicate that their continuous reasoning played a significant role in their understanding of function graphs.

* Key Words : function(함수), graphs(그래프), continuous reasoning(연속적인 추론), smooth thinking (매끄러운 추론), chunky thinking(덩어리 추론)

논문접수 : 2016. 7. 27
논문수정 : 2016. 9. 6
심사완료 : 2016. 9. 9