

단공 (端孔) V-노치가 있는 PMMA 판의 파괴기준에 관한 연구

A Study on Fracture Criterion of PMMA Plates Having a V-Notch with an End Hole

추원철¹, 조상봉^{2,✉}, 윤준도³

Won Chul Choo¹, Sang Bong Cho^{2,✉}, and Jon Do Yun³

1 경남대학교 대학원 첨단공학과 (Graduate School, Department of Advanced Engineering, Kyungnam University)

2 경남대학교 기계공학부 (School of Mechanical Engineering, Kyungnam University)

3 경남대학교 나노신소재공학과 (Department of Nano Materials Science and Engineering, Kyungnam University)

✉ Corresponding author: sbcho@kyungnam.ac.kr, Tel: +82-55-249-2620

Manuscript received: 2016.2.4. / Revised: 2016.5.23. / Accepted: 2016.6.19.

The aim of this study was to examine the validity of fracture criterion for PMMA plates that have a V-notch with an end hole. The predicted stress intensity factors and crack initiation angles by the fracture criterion based on the maximum circumferential stress and the novozhilov's criteria were compared with the experimental results. By increasing the radius of end hole, the differences of predicted stress intensity factors and experimental results increased, possibly due to the plastic zone size. The results indicated that when the radius of end hole is < 1 mm, the fracture criterion would be useful.

KEYWORDS: V-Notch with an end hole (단공 V-노치), Fracture criterion (파괴기준), PMMA plate (PMMA 판), Brittle material (취성재료), Plastic zone (소성영역)

기호설명

a = Notch length

C_I, C_{II} = Stress correction factors related to mode I and mode II

d_o = Critical distance as a material constant

F = Loading force

r, θ = Polar coordinates of an arbitrary point

r_o = Radius for an end hole

K_{IC} = Fracture toughness

K_I, K_{II} = Stress intensity factors for mode I and mode II

K_{nI}, K_{nII} = Notch stress intensity factors for mode I and mode II

α = Half notch angle

β = Loading angle

γ = Half wedge angle ($\gamma = \pi - \alpha$)

θ_o = Crack initiation angle

λ_I, λ_{II} = Eigenvalues related to mode I and mode II

μ_I, μ_{II} = Configuration correction factors related to mode I and mode II

σ_c = Tensile critical stress

$\sigma_{\theta\theta}$ = Circumferential stress

$\bar{\sigma}$ = Mean circumferential stress

1. 서론

기계 및 구조물에서 파손은 주로 응력집중이나

응력특이성이 발생하는 부분에서 일어나기 때문에 이러한 부분에 대한 응력을 해석하고 파괴기준 (Fracture Criterion)을 만들려는 노력이 있어왔다.

균열 (Crack)이나 예리한 V-노치 (Sharp V-Notch)의 선단 (Tip)은 응력이 무한대로 발산하는 응력특이성 (Stress Singularity)이 나타나기 때문에 선단 근처의 응력장에 대한 연구대상이 되었다.^{1,2} V-노치는 크게 예리한 (Sharp) V-노치와 뿔뿔한 (Blunt) V-노치로 나눌 수 있다. 뿔뿔한 V-노치의 응력장에 대한 연구로, Filippi 등³이 쌍곡-포물선 (Hyperbolic-Parabolic) 및 둥근 (Rounded) V-노치에 대한 응력장을 연구하였고, Fig. 1의 단공 (端孔) V-노치에 대한 연구는 Zappalorto와 Lazzarin⁴이 한 바 있다. 동일한 문제에 대해 Kim과 Cho^{5,7}가 중첩법을 이용하여 응력장을 각각 구한 바 있다.

실험에 의한 예리한 V-노치에 대한 파괴기준의 연구로, Seweryn⁸이 취성재료에 대한 모드 I의 파괴기준을 제안하였다. Erdogan과 Sih²에 의해 제안된 최대 주응력설에 근거한 최대 원주응력설 (Maximum Circumferential Stress Theory)과 Novozhilov⁹의 V-노치 선단의 어떤 짧은 거리에 대한 평균응력이 임계응력에 도달하면 파괴된다는 설인 선법 (Line Method)에 기초한 파괴기준이다. 혼합 모드의 경우에는 최대원주응력이 거리 r에 따라 변하므로 앞의 기준을 직접 적용할 수 없다. Kim과 Cho¹⁰가 확장된 기준을 제시하여 혼합 모드에 대한 파괴기준을 연구한 바 있다. 뿔뿔한 V-노치의 파괴기준에 대한 연구로는 Ayatollahi¹¹등이 PMMA (Polymethyl Methacrylate)로 만든 브라질리언 디스크로 둥근 V-노치에 대해 실험하였다. 단공 V-노치의 경우에는 그라파이터의 시편으로 모드 I에 대한 압축 실험 연구를 한 바 있다.¹²

본 연구에서는 기존의 Zappalorto와 Lazzarin⁴이 구한 응력장이 아닌 중첩법에 의한 단공 V-노치의 응력장⁷을 이용하여 최대원주응력설과 선법에 기초한 혼합 모드에 대한 예측 파괴기준을 만들고, 단공 V-노치가 있는 PMMA 판의 인장파괴 실험결과와 비교 검토를 통한 분석을 하고자 한다.

2. V-노치의 선형 탄성 응력장

2.1 예리한 V-노치의 응력장

모드 I과 II의 하중을 동시에 받는 혼합모드에서 예리한 V-노치 선단부에 대한 극좌표계의 선형 탄성 응력장은 고유치 (Eigenvalue)의 급수전개형태

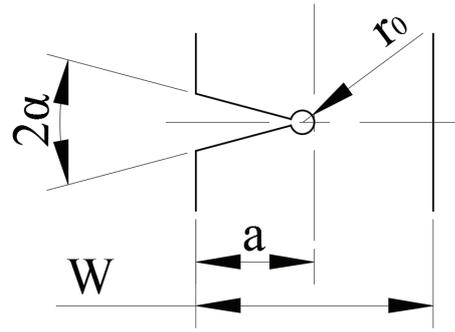


Fig. 1 The shape of a V-notch with an end hole

에서 노치선단 근처의 응력장에 지배적인 첫 번째 항만 사용하면 다음과 같이 표현된다.¹³

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r^{1-\lambda_I}}} f_{ijI}(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r^{1-\lambda_{II}}}} f_{ijII}(\theta), \quad (1)$$

$(i, j = r, \theta)$

여기서

$$\begin{cases} f_{rrI}(\theta) \\ f_{\theta\theta I}(\theta) \\ f_{r\theta I}(\theta) \end{cases} = \lambda_I \begin{cases} (3 - \lambda_I) \cos(1 - \lambda_I)\theta - S_I \cos(1 + \lambda_I)\theta \\ (1 + \lambda_I) \cos(1 - \lambda_I)\theta + S_I \cos(1 + \lambda_I)\theta \\ (1 - \lambda_I) \sin(1 - \lambda_I)\theta + S_I \sin(1 + \lambda_I)\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{rrII}(\theta) \\ f_{\theta\theta II}(\theta) \\ f_{r\theta II}(\theta) \end{cases} = -\lambda_{II} \begin{cases} (3 - \lambda_{II}) \sin(1 - \lambda_{II})\theta + S_{II} \sin(1 + \lambda_{II})\theta \\ (1 + \lambda_{II}) \sin(1 - \lambda_{II})\theta - S_{II} \sin(1 + \lambda_{II})\theta \\ -(1 - \lambda_{II}) \cos(1 - \lambda_{II})\theta + S_{II} \cos(1 + \lambda_{II})\theta \end{cases}$$

그리고

$$S_I = -\cos 2\lambda_I \gamma - \lambda_I \cos 2\gamma,$$

$$S_{II} = \cos 2\lambda_{II} \gamma - \lambda_{II} \cos 2\gamma$$

이다.

여기서, K_I 과 K_{II} 는 외부하중에 의해 결정되는 모드 I과 II의 응력확대계수 (Stress Intensity Factor)이다. λ_I 과 λ_{II} 는 형상에 의해 결정되는 모드 I과 II의 응력특이성을 가지는 고유치이며, 각각 $\lambda_I \sin 2\gamma + \sin 2\gamma \lambda_I = 0$ 와 $\lambda_{II} \sin 2\gamma - \sin 2\gamma \lambda_{II} = 0$ 에서 구할 수 있다.

2.2 단공 V-노치의 응력장

중첩법 (Superposition Method)을 이용한 Fig. 1의 단공 V-노치의 모드 I과 II에 대한 극좌표계의 선형 탄성 응력장은 다음과 같이 표현된다.⁷

$$\begin{cases} \sigma_{rri}(r, \theta) \\ \sigma_{\theta\theta i}(r, \theta) \\ \sigma_{r\theta i}(r, \theta) \end{cases} = \frac{K_{ni}}{\sqrt{2\pi}r^{1-\lambda_i}} \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\mu_i 2\lambda_i}\right) f_{rri}(\theta) \\ \left(1 + C_i \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\mu_i 2\lambda_i}\right) f_{\theta\theta i}(\theta) \\ \left(1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\mu_i 2\lambda_i}\right) f_{r\theta i}(\theta) \end{cases}, \quad (2)$$

(i = I, II)

여기서, C_i 는 응력보정계수, μ_i 는 형상보정계수로 정의하였다.

3. 단공 V-노치의 혼합모드에 대한 취성재료의 파괴기준

단공 V-노치가 있는 취성재료의 판에서 균열발생 점의 위치와 균열발생 응력조건은 최대 원주응력설과 선범에 해당하는 Novozhilov⁹의 기준을 적용할 수 있다. 즉, 최대 원주응력설은 (1) 단공 V-노치의 반경 $r=r_0$ 인 선단 표면에서 원주응력 ($\sigma_{\theta\theta}$) 이 최대가 되는 점 (r_0, θ_0)에서 균열이 발생하고, θ_0 의 방향으로 진전한다는 것이고, Novozhilov⁹의 기준은 (2) 균열발생점에서 θ_0 방향으로 작은 거리 d_0 까지의 평균 원주응력 ($\bar{\sigma}$) 이 인장임계응력 σ_c 에 도달하면 균열이 발생한다는 설이다.

혼합모드의 원주응력은 식(2)에서 모드 I과 모드 II의 응력 합을 사용하여 구하며, 균열발생점의 각 θ_0 는 식(3)을 만족하는 θ 값이다.

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}(r_0, \theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (3)$$

균열발생점에서 평균 원주응력은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{d_0} \int_{r_0}^{r_0+d_0} \sigma_{\theta\theta}(r, \theta_0) dr, \quad (4)$$

여기서 $\bar{\sigma} \geq \sigma_c$ 인 경우에 파괴가 발생하고, 작은 거리 d_0 는 재료상수로 다음의 식에 의해 구해진다.

$$d_0 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2K_{rc}}{\sigma_c} \right)^2 \quad (5)$$

식(3)과 식(4)에서 파괴기준에 의해 예측 파괴 곡선과 파괴발생 각도를 구할 수 있다.

Table 1 Mode I parameters for loading force, 20 N

r_0 [mm]	2α [°]	λ_I	μ_I	C_I	K_{nI} [MPa · m ^{1-λ_i}]
1	0	0.500	2.318	1.606	0.086
	15	0.500	2.315	1.603	0.085
	30	0.501	2.309	1.604	0.085
	45	0.505	2.295	1.612	0.084
	60	0.512	2.270	1.631	0.083
	75	0.525	2.236	1.659	0.084
	90	0.544	2.190	1.697	0.086
2	0	0.500	2.344	1.789	0.083
	15	0.500	2.344	1.786	0.083
	30	0.501	2.339	1.787	0.082
	45	0.505	2.323	1.794	0.081
	60	0.512	2.293	1.815	0.081
	75	0.525	2.246	1.849	0.080
	90	0.544	2.185	1.895	0.081
3	0	0.500	2.354	2.020	0.080
	15	0.500	2.366	1.993	0.080
	30	0.501	2.348	2.022	0.079
	45	0.505	2.333	2.030	0.078
	60	0.512	2.303	2.049	0.077
	75	0.525	2.254	2.086	0.076
	90	0.544	2.185	2.140	0.076

4. 실험

4.1 단공 V-노치 응력장의 매개변수 결정법

식(2)의 단공 V-노치 응력장의 매개변수 (Pa-Rameter)인 노치응력확대계수 (K_{ni}), 형상보정계수 (μ_i)와 응력보정계수 (C_i)를 유한요소해석 결과에서 구해야 한다. 본 연구에서는 비선형 커브 피팅 (Non-Linear Curve Fitting)을 사용하여 매개변수를 한 번에 구하였고 자세한 방법은 다음과 같다. (1) 모드 I의 경우에서 노치파괴기준에 직접적으로 사용되는 응력성분 $\sigma_{\theta\theta}$ 의 노치 이등분선의 유한요소 해석 결과에서 최대 응력지점 ($\sigma_{\theta\theta}$ 의 최대점은 노치선단부의 70 - 95%구간을 취득구간으로 하여 μ_I, C_I, K_{nI} 를 구한다. (2) 모드 II에서는 노치 이등분선에서의 응력성분은 $\sigma_{r\theta}$ 를 제외한 나머지 응력성분들은 0이 되므로 $\sigma_{r\theta}$ 의 응력성분을 구하여 노치에 가까운 쪽에서 $\sigma_{r\theta}$ 최대치의 70 - 95%를 취득구간으로 하여 μ_{II}, K_{nII} 를 구하고 ($r_0, \pi/4$)에서 $\sigma_{\theta\theta II}$ 의 유한요소해석 값을 응력장 식에 대입하여 C_{II} 를 구하였다. 매개변수를 구하기 위해 적용된 하중은 임의로 20 N이다. 즉, K_{nI} 과 K_{nII} 는 20 N의 하중을 받

Table 2 Mode II parameters for loading force, 20 N

r_0 [mm]	2α [°]	λ_{II}	μ_{II}	C_{II}	K_{nII} [MPa · m ^{1-λ_{II}}]
1	0	0.500	3.669	1.257	-0.060
	15	0.545	3.498	1.297	-0.074
	30	0.598	3.336	1.369	-0.097
	45	0.660	3.188	1.471	-0.141
	60	0.731	3.052	1.625	-0.231
2	0	0.500	3.764	1.231	-0.067
	15	0.545	3.580	1.271	-0.080
	30	0.598	3.404	1.318	-0.102
	45	0.660	3.241	1.372	-0.143
	60	0.731	3.094	1.431	-0.229

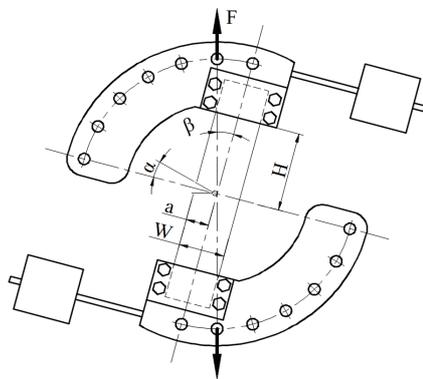


Fig. 2 Configuration of the fixture installed a V-notch specimen with an end hole

은 경우에 해당되는 응력확대계수이며 선형탄성문제이므로 하중에 비례한다. 파괴하중 시의 K_{nI} 과 K_{nII} 를 비례로 구할 수 있다. 하중 20 N에 대한 μ_i , C_i , K_{ni} 값들은 Tables 1과 2에 나타내었다.

4.2 실험조건 및 치구

인장시험장치로는 만능재료시험기인 Instron사의 4481을 사용하였고, 인장속도는 1 mm/min로 설정하였으며, 실험환경은 여름철 상온(평균 24.5°C)이었다.

시험편을 고정할 수 있는 치구 (Fixture)는 Fig. 2과 같이 Richard¹⁴형을 기본으로 제작하였다. 앞서의 연구¹⁰에서도 Richard¹⁴형 치구를 제작하여 사용한 바 있는데 무게에 의해 평형이 이루어지지 않았다. 또한, 시험편을 치구에 고정할 때에 시험편과 치구 사이에 볼트로 체결하였다. 볼트로 체결된 시험편부에서 균열이 발생하여 파괴되는 현상이 있어

큰 하중을 가할 수 없는 문제점도 있었다. 각각 평형추 (Balance Weight)를 Fig. 2에서와 같이 부착하여 비 평형 문제를 개선하였고, 시험편과 치구 사이에 체결하는 볼트를 없애고 압력으로만 고정하여 볼트 체결부에서 시험편의 균열이 먼저 발생하는 문제점을 개선하였다.

4.3 시험편

시험편의 재료는 취성재료로 알려진 PMMA이고, 탄성계수 $E= 3391$ MPa, 프아송비 $\nu= 0.36$, $\sigma_C= 64$ MPa, $K_{IC}= 1.268$ MPa·m^{0.5}, $d_0= 0.249896$ mm이다.

시험편의 치수는 높이 (H) 70 mm, 폭 (W) 40 mm, 노치길이 (a) 20 mm, 두께 (t)는 5 mm이다. 치구에 시험편을 고정하기 위한 길이가 양 쪽으로 30 mm가 있어서 전체 시험편의 외형치수는 200 × 40 × 5 mm이다. 형상은 레이저로 가공했으며 가공 후에 잔류응력을 없애기 위하여 풀림처리 (Annealing)를 하였다. PMMA재료의 풀림처리는 85°C에서 6시간 동안 열처리를 하고 시간당 15°C미만으로 냉각시키는 것으로 하였다.

모드 I의 시험편은 단공의 반경(r_0)이 1, 2, 3 mm의 3종류로, 노치각 (2α)은 0°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90°의 7종류이다. 혼합모드와 모드 II의 시험편은 r_0 가 1과 2 mm의 2종류로, 2α 가 0°, 15°, 30°, 45°, 60°의 5종류로 하였다. 하중각 (β)은 r_0 가 1 mm 일 때 0° (모드 I), 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90° (모드 II)의 7종류이며, r_0 가 2 mm일 때 0°, 30°, 60°, 90°의 4종류이다. 1종류의 실험은 모두 3회씩 실시하였고, 총 시험편의 개수는 198개이다.

5. 실험결과 및 토의

5.1 모드 I과 II의 결과

모드 I ($\beta= 0^\circ$) 하중 하에서 단공의 반경 (r_0)이 1, 2, 3 mm인 경우에 각각 예측 임계응력확대계수는 실선으로 실험 결과는 점으로 Fig. 3에 V-노치 각도 (2α)에 대하여 표시하였다. 3가지의 경우에 있어서 모두가 예측치보다 실험 결과가 큰 값이다. 즉, 예측 파괴하중보다 실제 실험에 의한 파괴하중이 크다는 의미이며 예측 파괴기준은 보수적으로 안전하게 평가한다고 볼 수 있다. 단공의 반경 (r_0)이 1, 2, 3 mm로 커짐에 따라 예측치와 실험치의 차가 커지고 있음을 보여 준다. 또한, 단공 V-노치의 노치각도와 단공의 반경에 관계없이 모드 I 하중 하에서는 예측 균열발생각도 θ_0 는 0°이다. Fig. 4

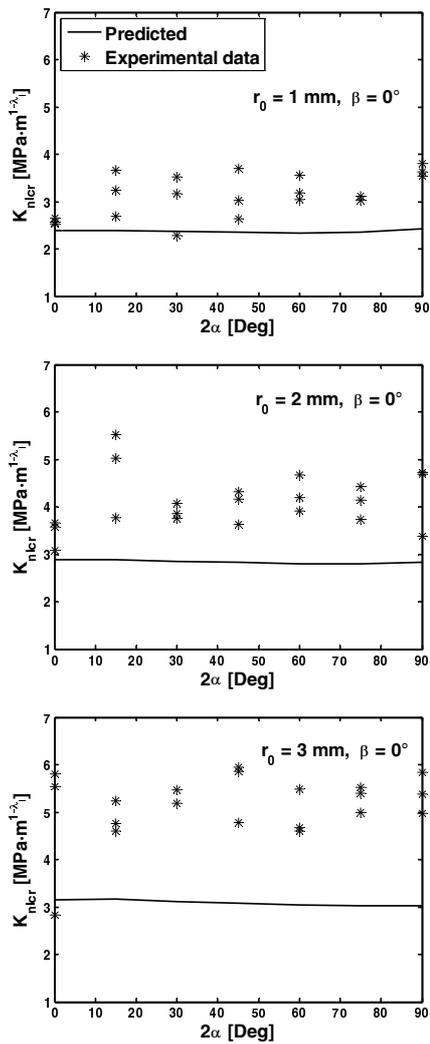


Fig. 3 Predicted critical stress intensity factors and experimental results under mode I

는 모드 I의 예측 균열발생각도 $\theta_0 = 0^\circ$ (실선)와 실험 결과(점)를 보여 주고 있다. 실험에 의한 균열 발생각도가 최대 $\pm 25^\circ$ 의 분포를 가지고 상당한 차이를 보이고 있다.

모드 II ($\beta = 90^\circ$) 하중 하에서 단공의 반경 (r_0)이 1, 2 mm인 경우에 각각 예측 임계응력확대계수와 실험 결과를 Fig. 5에 V-노치각도 (2α)에 대하여 표시하였다. 단공의 반경 (r_0)이 1 mm인 경우는 예측치와 실험치가 거의 잘 일치하고 있다. 단공의 반경 (r_0)이 2 mm인 경우는 오차가 커지고 있다. Fig. 6은 모드 II의 예측 균열발생각도와 실험 결과

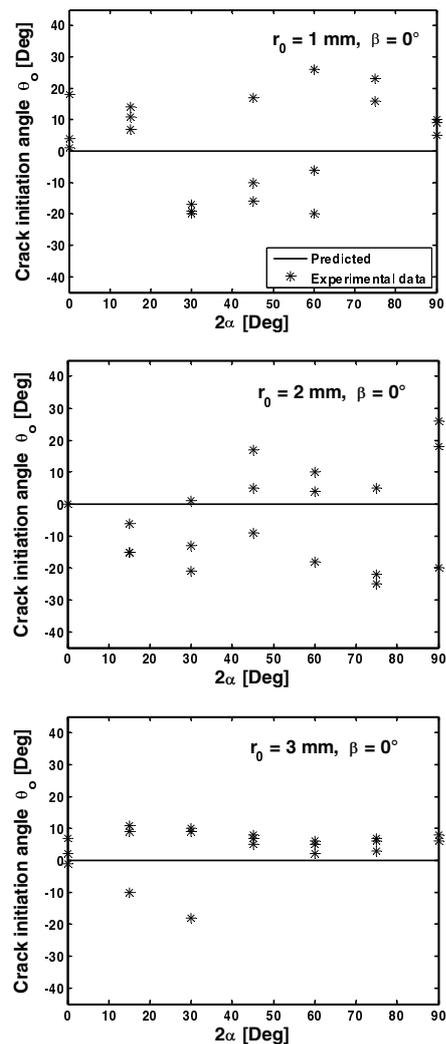


Fig. 4 Predicted crack initiation angle and experimental results under mode I

를 보여 주고 있다. 단공의 반경 (r_0)이 1, 2 mm 대부분의 결과에서 예측치와 실험치의 오차가 크지만, 1 mm의 경우는 다소 일치할 때도 있다.

5.2 혼합모드의 결과

모드 I ($\beta = 0^\circ$)과 모드 II ($\beta = 90^\circ$)의 결과를 포함한 혼합모드의 예측 임계응력확대계수와 실험결과를 Fig. 7에 표시하였고 또한, 예측 균열발생각도와 실험결과를 Fig. 8에 표시하였다. Fig. 6에서 보면 r_0 가 1 mm 일 때 노치각 (2α)이 $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ 에서 모드 II의 성분이 강할수록(수평축에 가까울수록)

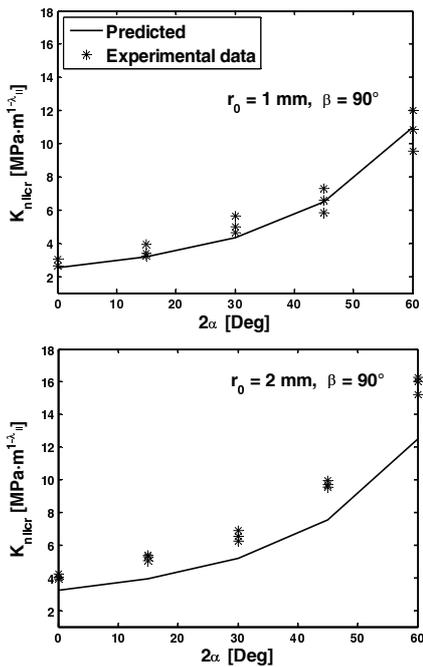


Fig. 5 Predicted critical stress intensity factors and experimental critical stress intensity factors under mode II

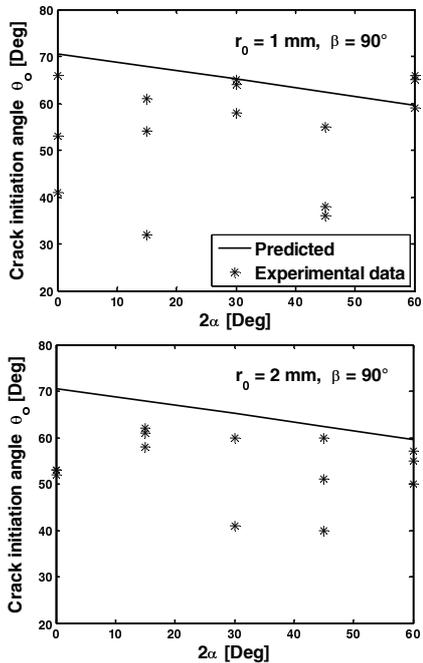


Fig. 6 Predicted crack initiation angle and experimental results under mode II

예측치와 실험치의 차이가 작고 모드 I의 성분이 강할수록(수직축에 가까울수록) 차이가 크며, r_0 가 2 mm 일 때는 모드 성분에 관계없이 차이가 크게 나타나고 있으며 혼합모드에서도 예측 파괴기준은 보수적으로 안전하게 평가하고 있다.

Fig. 8에서 보면 r_0 가 1, 2 mm의 모든 결과에서 예측 균열발생각도와 실험결과의 차이가 상당히 크게 나타나고 있다. 실험 균열발생각도의 분포도 상당히 크지만 응력확대계수 비 θ 가 작을수록 예측곡선 아래에 분포하는 경향을 보이고 있고, $\theta=0^\circ$ 에 가까울수록(모드 II의 성분이 클수록) 다소 예측곡선에 근접하고 있다. $\theta=90^\circ$ 에 가까울수록 즉, 모드 I의 성분이 클수록 실험 균열발생각도가 \pm 의 분포를 보이고 있다.

5.3 토의

모드 I과 모드 II 및 혼합모드의 결과에서 예측 임계응력확대계수와 실험결과를 보면 단공의 반경 (r_0)이 커질수록 오차가 커지고 있었다. 균열발생각도의 산포도 크게 나타났고, 모드 I에서 \pm 의 산포를 보이고 있었다.

이러한 현상에 대한 원인으로 실험환경(여름철 상온)과 재료의 균질상태 등의 여러 가지가 있을 수 있고, 그 중에서 가장 큰 것으로 단공에 의한 뭉툭한 V-노치가 되어 소성영역의 크기가 커진 결과로 보여 진다. 예리한 V-노치의 실험에서도 예측 임계응력확대계수보다 실험결과가 크게 나타났고, 원인으로 가공의 어려움으로 약간의 뭉툭한 노치가 된 것이 하나의 원인이라 분석한 바 있는데 예리한 V-노치의 소성 영역에 관한 연구를 Kim과 Cho¹⁵, Flicek¹⁶ 등이 한 바 있고, Flicek¹⁶ 등이 소성 영역이 원인이라 지적하였다.

Fig. 6에서 r_0 가 1 mm 일 때 노치각 (2α)이 0° , 15° , 30° , 45° , 60° 의 경우에 모드 II의 성분이 클수록(수평축에 가까울수록) 예측치와 실험치의 차이가 작고 모드 I의 성분이 클수록(수직축에 가까울수록) 차이가 커진 결과는 Flicek¹⁶ 등의 연구에서 모드 I의 소성영역이 모드 II의 소성영역보다 크다는 결과와 같은 경향을 보였다고 할 수 있다.

실험 균열발생각도의 산포는 소성영역이 크기와 소성영역의 모양에 영향이 있을 수 있고, 추후에 소성영역에 대한 연구 및 검토가 필요한 것으로 생각된다. 이와 더불어 가공에 의한 단공의 표면의 진원 (True Circle)도 및 표면조도가 원인이 될 수 있을 것으로 예상된다.

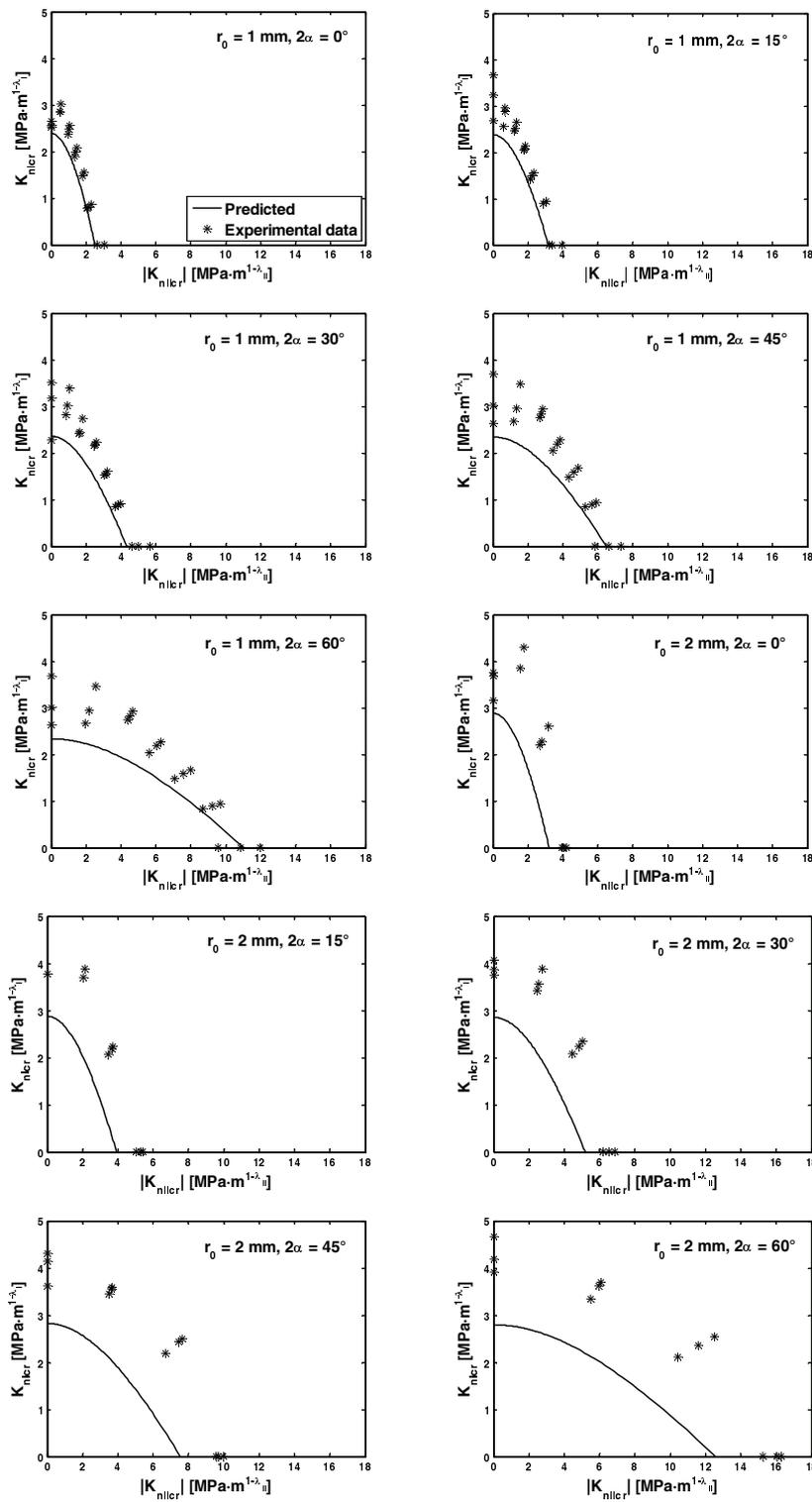


Fig. 7 Predicted critical stress intensity factors and experimental results under mixed mode

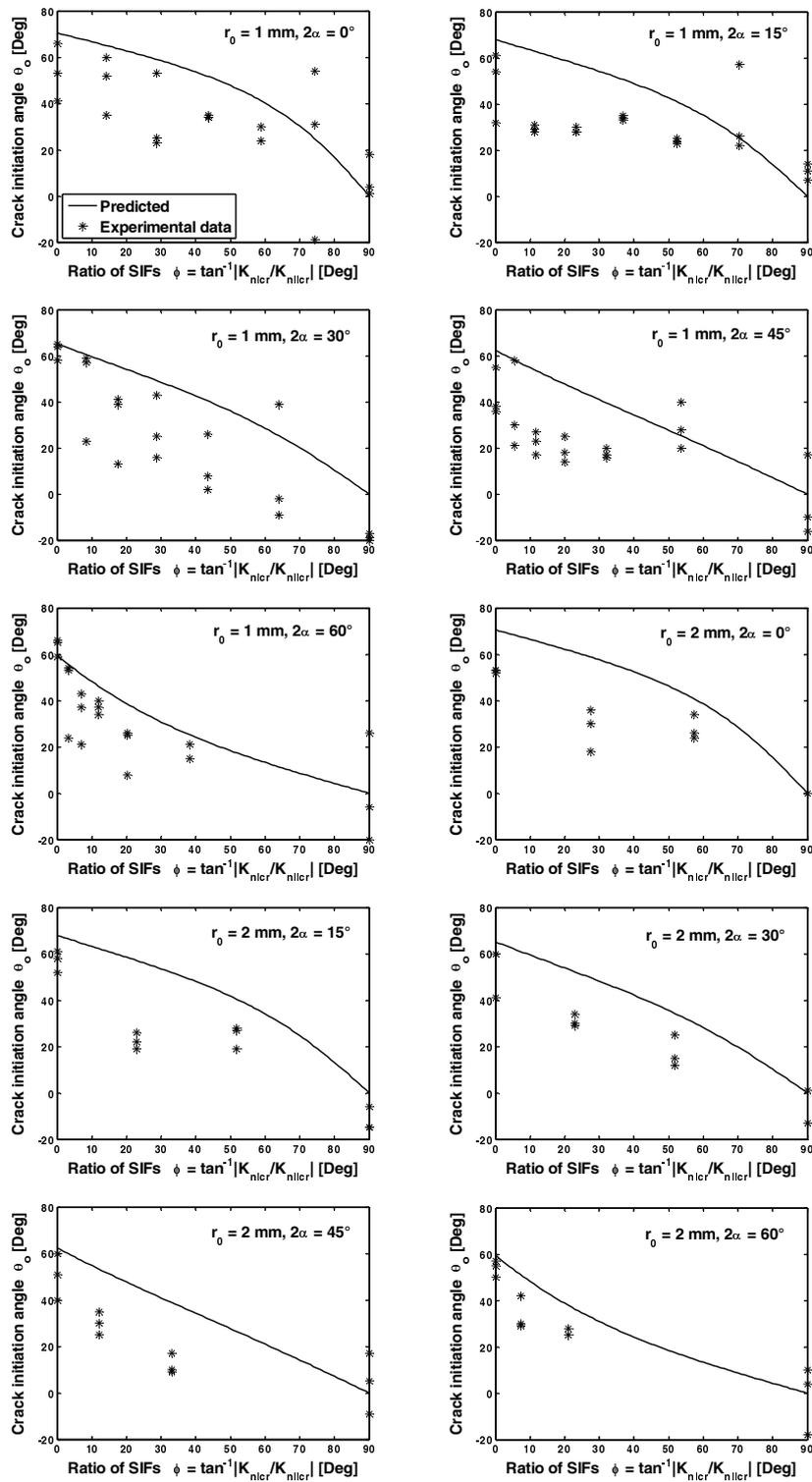


Fig. 8 Predicted crack initiation angle and experimental results under mixed mode

6. 결론

최대 원주응력설과 선법에 기초한 파괴기준을 단공 V-노치가 있는 PMMA 판의 인장파괴 실험에 적용하고 결과를 분석하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

예측 파괴곡선보다 실험치가 모든 실험에서 크게 나타났고, 단공의 반경이 커질수록 더욱 심하였다. r_0 가 1 mm에서 모드 I은 28%, 모드 II는 7%, r_0 가 2 mm에서 모드 I은 43%, 모드 II는 28% 크게 나타났다. 예측 균열발생각도와 실험치도 상당한 오차를 보였고, 실험치의 산포도 컸다. 가장 큰 원인은 소성영역이 커진 결과로 예측되었다. 그런데, 예측 파괴기준은 보수적으로 평가하고 있어서 설계에 충분히 적용이 가능하다고 생각되며, 특히 단공의 반경이 1 mm 이하인 V-노치의 경우와 완전 취성재료의 경우에는 본 파괴기준의 적용이 유효할 것으로 예상된다.

REFERENCES

1. Irwin, G. R., "Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate," *Journal of Applied Mechanics*, pp. 361-364, 1957.
2. Erdogan, F. and Sih, G. C., "On the Crack Extension in Plates Under Plane Loading and Transverse Shear," *Journal of Basic Engineering*, Vol. 85, No. 4, pp. 519-525, 1963.
3. Filippi, S., Lazzarin, P., and Tovo, R., "Developments of Some Explicit Formulas Useful to Describe Elastic Stress Fields Ahead of Notches in Plates," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, No. 17, pp. 4543-4565, 2002.
4. Zappalorto, M. and Lazzarin, P., "In-Plane and Out-of-Plane Stress Field Solutions for V-Notches with end Holes," *International Journal of Fracture*, Vol. 168, No. 2, pp 167-180, 2011.
5. Kim, J. K. and Cho, S. B., "A Superposition Approach to the Stress Fields for Various Blunt V-Notches," *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, Vol. 36, No. 2, pp. 139-153, 2013.
6. Kim, J. K. and Cho, S. B., "Superposition Approach of the Stress Fields for Blunt V-Notches Under Anti-Plane Shear Loading," *Int. J. Precis. Eng. Manuf.*, Vol. 14, No.4, pp. 605-612, 2013.
7. Kim, J. K. and Cho, S. B., "A Study on Stress Fields Near V-Notch Tip with End-Hole Under in-Plane and Out-of-Plane Conditions," *Int. J. Precis. Eng. Manuf.*, Vol. 14, No. 7, pp. 1153-1161, 2013.
8. Seweryn, A., "Brittle Fracture Criterion for Structures with Sharp Notches," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 47, No. 5, pp. 673-681, 1994.
9. Novozhilov, V. V., "On Necessary and Sufficient Criterion of Brittle Strength," *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 33, No. 2, pp. 212-222, 1969.
10. Kim, J. K. and Cho, S. B., "A Unified Brittle Fracture Criterion for Structures with Sharp V-Notches Under Mixed Mode Loading," *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 22, No. 7, pp. 1269-1278, 2008.
11. Ayatollahi, M. R. and Torabi, A. R., "Investigation of Mixed Mode Brittle Fracture in Rounded-Tip V-Notched Components," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 77, No. 16, pp. 3087-3104, 2010.
12. Torabi, A. R. and Ayatollahi, M. R., "Compressive Brittle Fracture in V-Notches with End Holes," *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 45, pp. 32-40, 2014.
13. Williams, M. L., "Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 19, No. 4, pp. 526-528, 1952.
14. Richard, H. A., "A New Compact Shear Specimen," *International Journal of Fracture*, Vol. 17, No. 5, pp. 105-107, 1981.
15. Kim, J. and Cho, S., "Effect of Second Non-Singular Term of Mode I Near the Tip of a V-Notched Crack," *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, Vol. 32, No. 4, pp. 346-356, 2009.
16. Flicek, R., Hills, D., and Dini, D., "Refinements in the Characterisation of Mode-Mixity and Small Scale Yielding at Sharp Notch Roots," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 126, pp. 73-86, 2014.