韓國數學敎育學會誌 시리즈 E <數學敎育 論文集>
http://dx.doi.org/10.7468/jksmee.2016.30.3.393
제 30집 제 3호, 2016. 9. 393-418

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 30, No. 3, Sep. 2016. 393-418

# 고등학교 명제 단원에서 반례 활용에 관한 교수·학습 자료 개발 연구

오 세 현 (태장고등학교)
고 호 경 (아주대학교)†

명제를 반박하는 과정에서 생성되는 반례는 명제가 거짓이라는 추론의 타당성을 보이는 방법이자 수학교수·학습 측면에서도 수학적 사고력 향상에 중요한 역할을 기대하고 있다. 이에 본 연구에서는 현 교과서에서 다루어지고 있는 반례 활용에 대해 살펴보고, 학교 현장에서 교육학적 전략으로 활용할 수 있는 반례 활용 교육을 위한 자료를 개발하였다. 개발 자료는 거짓 명제 만들기와 참인명제 만들기로 구성하였고, 학생들에게 반례 활용 실험 수업을 통해 학생들의 반응을 살펴보았다. 연구 결과 정의적 영역의 측면에서는 명제에 관한 흥미를 높이고 자신감을 향상시키는 효과가 있었으며, 인지적 영역의 측면에서는 다양한 반례를 찾고 그 반례를 탐구하여 참인 명제를 만들어 보는 다양한 수학적 추론 활동을 통해 명제에 대한 유연한 사고와 함께 명제의 조건을 명확히 인지하면서 명제 개념을 학습하는데 도움이 되는 것으로 나타났다.

## Ⅰ. 서 론

수학의 정리나 성질은 거의 대부분 명제형태로 구성되어 있다. 수학의 발전 과정에서 반례를 찾아 정리를 개선하면서 새로운 수학개념이 발생되었고 수학적 지식이 성장하는데 있어서 반례가 사고 확장의 원동력이 되어왔다(오혜미·권오남, 2014). 명제를 반박하는 과정에서 생성되는 반례는 명제가 거짓이라는 추론의 타당성을 보이는 중요한 도구로써 교수학습에서 수학적 사고에 중요한 역할을 하고 있다. 또 학교 수학에서는 증명과 반례를 경험할 풍부한 기회를 가져야 한다고 강조하고 있다(NCTM, 2000). Klymchuk(2008)는 명제를 탐색하여 참, 거짓을 판별하고 참인 명제의 정당화와 반례를 통한 반박 활동은 수학교육에서 강조하고 있는 학생들의 논리적 추론 능력을 향상시킬 수 있다고 한다. 뿐만 아니라 반례를 찾는 과정을 통해 기존에 학습한 수학적 지식을 통합하거나 견고하게 만들 수 있고 비판적 사고력을 신장시킬 수 있다는 것이다. 이렇듯 수학적 사고 경험을 위한 노력으로써 반례에 대한 교육적 활용 가능성을 강조하고 있다.

그러나 아직까지 학교 수업 현장에서는 이러한 반례가 특정한 영역에서 명제가 거짓임을 밝히기 위하여 보여주는 역할로서만 제한적으로 활용되고 있는 실정이다. 이정곤·류희찬(2012)에 따르면 학생들의 창의적인 사고보다 증명과 반례의 정형성에 초점을 맞추는 경향이 있다는 것이다. 이는 교육과정상 반례를 포함하고 있지 않아 반례를 들어보는 활동이 거의 이루어지지 않는다는 송승화(2009)의 연구와도 무관하지는 않을 것이다. 다수의 연구에서 증명과 반례가 수학학습에서 수학적 개념을 이해하고 발전시키는 데 도움이 되지만 많은 학생들이 거짓 명제를 반박하는 반례를 생성하는 데에는 어려움을 겪고 있다고 하면서 반례에 대하여 학습할 기회를 제공할 필요성이 있다고 주장하고 있다. 예를 들어, 송승화(2009)와 이지현(2012)은 고등학교 대수와 기하 영역에서의 반례의 지도내용이 강화됨으로써 연역적 이유와 추론의 타당성을 보이기 위한 도구로서 강조되어야 한다고

* 접수일(2016년 6월 14일), 심사(수정)일(2016년 8월 1일), 게재 확정일(2016년 8월 27일)
* ZDM 분류 : C2, C8, D70
* MSC2000 분류 : 97C20
* 주제어 : 반례, 반례탐구, 참, 거짓 명제 만들기
† 교신저자 : kohoh@ajou.ac.kr

주장한다. 이동환(2014) 역시 중등 수학에서 반례 활용 방안 연구를 통해 반례 활용을 강조하고 있다. 이렇듯 학교 현장에서 반례 생성의 어려움을 극복할 수 있는 실질적 수학학습 자료개발이나 교육학적 전략으로써의 활용할 수 있는 반례 활용 교육에 관한 연구의 필요성을 피력하고 있다.

이에 본 연구는 명제 단원에서 반례 활용 교육 자료를 개발하여 제시하고자 한다. 또한 개발한 자료를 활용하여 실험 수업을 실시 후 학생 반응 사례를 살펴보고자 한다. 이를 통해 반례를 활용한 명제 단원 수업이 학생들의 유연한 사고 경험과 명제를 깊이 있게 탐구할 수 있는 기회를 제공하는 방안 중 하나가 될 수 있는 가능성을 보이고자 한다.

## Ⅱ. 수학교육에서 반례 활용의 의의

### 1. 명제 교육에 있어서의 반례 활용 연구

일반적으로 추측에 대하여 거짓임을 밝히는 것을 반증이라고 하고 단 하나의 반례만으로도 추측이 거짓임을 밝히는데 충분하다. 반례를 보이는 것은 수학에서 일반적인 반증 방법이며 가정이 참이고 결론이 거짓인 예를 찾아 그 문장이 거짓임을 보이는 것이다. 박교식(2003)은 명제 $p \rightarrow q$가 거짓임을 보이려면 조건 $p$를 만족하는 집합을 P, 조건 $q$를 만족하는 집합을 Q라고 할 때, 집합 P에 속하지만 Q집합에는 속하지 않는 한 원소를 예로 들면 되는데, 이와 같은 같은 예가 반례라 정의한다+

증명이란 원래의 추측을 여러 개의 부분추측으로 분해하는 사고 실험의 일종이며, 수학은 추측의 끊임없는 개선을 통해 성장한다고 보았다(Lakatos, 1976; 강문봉, 1993, 재인용). 추측을 부분 추측으로 분해하는 것은 검사를 위한 새로운 전망을 여는 것이며, 증명의 재검토, 즉 증명 분석을 전면적인 반례가 나타나거나 확실하다고 생각하였던 증명에 대하여 의심이 생길 때 시작되며 그러한 의심은 반례를 발견하는 계기가 된다. 그런 점에서 반례는 증명과 지식의 성장에서 매우 중요한 역할을 한다(송승화, 2009).

강문봉(1993)은 Lakatos의 수리철학을 바탕으로 수학교육에 반례의 중요성과 수학적 지식의 발견하고 수정하여 개선하는 과정을 적용하기 위한 노력을 하였다. 이후 많은 연구자들이 Lakatos의 수리철학을 바탕을 두고 학교 수학에서 수학적 발견술로 반례를 발견하여 개념을 수정하면서 개선해 나가는 과정을 연구하였다(마효연, 2013; 박경미, 2009; 박남연, 2010; 이동훈, 2014; 하현철, 2011).

반례 교육을 위해서는 먼저 명제가 가지고 있는 의미를 파악하고 명제의 참, 거짓을 논할 수 있어야 하기 때문에, 먼저 명제를 구성하는 문장의 이해가 필요하다. 정혜진(2010)은 학생들이 거짓 명제에서 반례의 역할 인식 부족, 가정과 결론의 혼동과 의미의 이해부족으로 어려움이 있음을 제기하였으며, 거짓 명제를 반례를 제시하여 반증하는 활동의 중요함을 시사하고 있다. 정은경(2007)은 명제에서 가정과 결론의 의미를 먼저 이해하는 것이 필요하며, [A이면 B이다] 형태의 명제를 참인 명제로 고쳐보거나 조건을 바꾸어 명제로 바꾸거나 결론을 바꾸어 보는 등의 다양한 활동의 지도가 필요함을 강조한다. 정혜윤(2012) 역시 명제의 조건 조작에 따른 반례 찾기 활동이 수학적 명제를 이해하는데 효과적임을 시사했다.

따라서 본 연구에서도 반례 활용을 위한 내용을 구성하는데 있어서 명제를 이해하는 교육과 명제의 조건 조작 활동을 동반할 필요성이 도출되었다.

---

+ 반례는 counterexample을 번역한 것으로 한자로는 反例라고 쓴다. counterexample → 反例 → 반례 , counter에는 '反對의'라는 뜻이 있고 example에는 '例'라는 뜻이 있으므로, counterexample을 글자 그대로 번역하면 '反對의 例'이다. 이것을 간단히 한 것이 '反例'이다. 명제 $p \rightarrow q$ 가 참임을 보이는 예가 아니라, 반대로 그것이 거짓임을 보이는 예이기에 '반례'라고 하는 것이다(박교식, 2003).

### 2. 수학교육에서 반례 활용의 교육적 의의

수학교육에서 반례는 수학적 대상의 본질에 대하여 학습자가 자신의 인식이나 신념을 재조정하는데 도움을 줄 수 있다고 한다(Zazkis & Chernoff, 2008). 반례는 개념변화와 인지적 갈등을 일으키고 해결하는 강력한 도구가 된다는 것이다(Zazkis & Chernoff, 2008).

Mason & Klymchuk(2009)는 수학교육에서 반례의 사용은 다음과 같은 중요한 역할이 있다고 강조한다. 첫째, 간과하기 쉬운 정리들의 조건들에 주목하고 용어, 속성, 표기들을 주의 깊게 살펴봄으로써 개념이해를 깊게 할 수 있다. 둘째, 반례는 오개념을 제거하거나 감소시키는데 도움을 준다. 예를 들어, 대수에서 $(a+b)^2 = a^2 + b^2$된다고 생각하거나 미분에서 '함수의 그래프가 개구간 $(a, b)$에서 연속이고 부드러운 곡선이면 $(a, b)$에서 함수는 미분가능하다' 등의 오개념은 반례를 드는 연습을 통해 줄이거나 제거할 수 있다고 말한다. 셋째, 비판적 사고 능력을 향상시킬 수 있다. 거짓인 명제의 반례 만들기의 예를 구성하는 것은 반례를 통해 반증하는 것이기 때문에 정당화, 논증 추론과 비판적 사고 등의 수학적 사고의 본질을 학습하게 될 것이다. 넷째, 반례를 통해 자신의 예 공간을 확장하고 의사소통하는 아이디어를 얻을 수 있다. 또한 Mason & Klymchuk(2009)은 수학 교육에서 반례를 활용하는 몇 가지 방법적인 측면을 제시한다. 첫째, 학생들에게 옳은 명제와 옳지 않은 명제의 혼합물을 제공하고, 둘째, 학생들로 하여금 틀린 명제를 만들어 보게 하고 그것에 대한 반례를 들을 수 있게 한다. 셋째, 수업에서 오류를 발견하도록 질문하는 것이며, 넷째, 과제와 평가에 반례를 포함시켜야 한다는 것이다.

Ko & Knuth(2009)는 반례가 수학적 명제가 거짓 이유를 설명해주는 중요한 역할을 한다고 하면서 반례를 드는 것은 관련 개념들과 전략적 지식의 이해를 필요로 하는 것이라 했다. 하나의 반례는 명제가 거짓임을 설명하는데 충분하고 증명하는 반례를 들어 반박하는 것은 수학적 문장의 이해와 문장속의 담겨있는 의미에 대한 통찰력을 학생들에게 제공해 준다는 것이다. 이것은 정혜윤(2012)의 수학적 문장의 조건 조작에 따른 반례 찾기는 조건의 역할과 중요성 및 필요성을 인식하게 되고 수학적 문장의 분석력 신장에 긍정적 영향을 주는 연구와도 맥락을 같이 한다.

이지혜 외(2013)는 중학교 교육에서도 반례는 학생들이 개념을 이해하거나 절차를 시행할 때 필요하다고 말한다. 오혜미·권오남(2014)은 반례의 수학적 역할을 첫째, 명제의 거짓을 확인하는 것, 반례는 명제의 거짓을 확인하는 관점에서 확대되어 명제가 거짓인 이유를 설명하는 것, 그리고 반례는 수학하는 사람들 사이의 의사소통의 산물과 같이 세 가지로 범주화하여 설명한 바 있다.

이렇듯 선행연구들이 말하는 반례의 역할은 수학교육에서 중요한 교육전략으로서 활용될 수 있음을 시사하고 있는 것이다. 본 연구에서는 이러한 연구가 주는 시사점을 바탕으로 반례 활용 교수학습 자료안을 구성하였다.

## Ⅲ. 현 교과서에서의 반례 활용 분석

### 1. 분석 대상

본 연구에서는 교과서에서 반례 활용 교수·학습 자료를 어떠한 기능과 비중으로 다루고 있는지를 알아보기 위하여 2009개정 교과서 수Ⅱ와 미적분Ⅰ를 분석하였다[+].

분석 대상 교과서는 수Ⅱ, 미적분Ⅰ의 교학사(A), 금성출판사(B), 동아출판사(C), 미래엔 교과서(D), 지학사

[+] 미적분Ⅱ, 확률과 통계, 기하와 벡터 교과서에서는 반례를 활용한 부분이 나타나지 않았다.

(E), 천재교육(F), 좋은책 신사고(G) 등 7종이다.

<표 Ⅲ-1>에와 같이 교과서에서의 반례를 활용한 영역은 내용상 증명부분을 많이 포함하고 있어 반례를 활용하기 적절한 명제와 수열 단원에서 많이 나타났다. 그리고 미적분Ⅰ의 교과서에서는 다항함수의 적분 단원을 제외한 모든 단원에서 반례 활용부분이 나타난 것이 특징적이다.

<표 Ⅲ-1> 교과서에서 반례를 활용한 영역 분석

| 영역 / 구분 | 수Ⅱ | | | | 미적분Ⅰ | | | 계 (비율) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 집합과 명제 | 함수 | 수열 | 지수와 로그 | 수열의 극한 | 함수의 극한과 연속 | 다항함수의 미분법 | |
| A | 1 | · | · | · | 3 | 1 | 2 | 7(12) |
| B | 1 | · | · | · | 2 | 2 | 3 | 8(14) |
| C | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 4 | 3 | 16(27) |
| D | 1 | · | · | · | 2 | 1 | 2 | 6(9) |
| E | 1 | · | · | · | 2 | 2 | 2 | 7(12) |
| F | 1 | · | · | · | 2 | 2 | 2 | 7(12) |
| G | 1 | · | 1 | · | 2 | 2 | 2 | 8(14) |
| 계 | 7 | 3 | 2 | 1 | 16 | 14 | 16 | 59(100) |

### 2. 교과서 반례의 유형별 정리

교과서의 학습내용에서 반례라는 표현은 쓰지 않았지만 교육적으로 반례의 역할을 할 수 있는 내용에 대한 것도 반례를 활용된 경우로 포함했다. '반례' 라는 용어는 모든 교과서에서 명제단원의 본문 내용이 아닌 참고사항으로써 반례의 개념과 예를 들어 설명하고 있다. 아래의 <표 Ⅲ-2>에서 보는 바와 같이 반례라는 용어 설명은 두 가지의 형태의 설명이 대부분이다. C교과서와 D교과서에서는 한정사를 포함한 명제에서 '모든 $x$에 대하여 $p(x)$이다' 가 거짓임을 보이기 위해 조건 $p(x)$를 거짓이 되게 하는 적어도 하나의 원소가 있음을 보이면 됨을 설명하고 있고, 그 외 나머지 교과서는 명제 $p \rightarrow q$ 에서 조건 $p$, $q$ 를 만족하는 집합을 각각 $P$, $Q$ 라 할 때, $P \not\subset Q$ 이 존재하는 적어도 하나의 예를 반례라고 설명하고 있다.

교과서에서 제시되어 있는 반례를 분석한 결과 네 가지 형태로 범주화되었는데, 대부분 '교육학적 의미의 반례 활용' 측면에서 활용되었다. 그 유형은 '인지갈등을 유발하고 해결하기 위한 반례', '명제화를 통한 반례찾기', '정리에서 가정의 조건 변형을 통한 거짓 명제의 반례'인 것으로 나타났으며, '수학적 의미의 반례 활용'으로도 나타났다(<표 Ⅲ-2>).

<표 Ⅲ-2> 교과서에 나타난 반례 유형에 대한 정리

| 유형 | 반례 활용 유형 | 유형 분류 기준 | 반례의 기능 |
|---|---|---|---|
| 1 | 오개념에 대한 인지갈등을 유발하고 이를 해결하기 위한 반례 | 교육학적 의미의 반례 활용 | 연결성(Zazkis & Chernoff, 2008) |
| 2 | 명제화를 통한 반례찾기 (거짓 명제의 반례 생성) | 교육학적 의미의 반례 활용 | 개념 형성을 위한 추론(Mason & Klymchuk, 2008) |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 정리에서 가정의 조건 변형을 통한 거짓 명제의 반례 | 교육학적 의미의 반례 활용 | 개념 이해의 심화 (Mason & Klymchuk, 2008) |
| 4 | 수학적 의미로써의 반례를 학습 (명제가 거짓을 증명 혹은 정리의역이 거짓임을 증명하는 반례) | 수학적 의미의 반례 활용 | 고전적 의미의 반례 |

가. 유형 1 : 인지갈등을 유발하고 오개념을 해결하기 위한 반례

학교수학에서 개념이해를 위해 학습자로 하여금 인지갈등을 유발하거나 오개념을 해결하여 개념형성을 돕고자 반례를 활용하는 유형이다. 예를 들어 C교과서에서는 반례를 직접 언급하고 있지 않지만 수렴하지 않는 수열 중 진동하는 수열에 대한 오개념이 생길 수 있는 부분에 대한 인지갈등을 해소하기 위한 예로써 설명하고 있다. 이런 예들은 학생들이 오류에서 벗어날 수 있고, 인지적 갈등을 해소하는 Zazkis와 Chernoff(2008)가 말하는 연결적 예라고 볼 수 있다.

수열의 극한의 대소 관계에 대한 내용을 기술한 거의 모든 교과서에서 자연수 $n$에 대하여 두 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 수렴하고, $a_n < b_n$ 일 때 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$이 될 수 있는 경우의 예를 제시하고 있다. 이것은 학교수학에서 거짓 명제 [자연수 $n$에 대하여 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 수렴하고 $a_n < b_n$ 일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$이다]의 반증하기 위한 반례로써 사용할 수 있고 교과서에서 제시한 예 뿐만 아니라 여러 다양한 예를 가지고 학습함으로써 학습자의 인지적 갈등을 해결하기 위한 것임을 알 수 있다. 반면 D교과서는 명제 '모든 자연수 $n$에 대하여 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 수렴하고 $a_n < b_n$ 일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$이다'에서 가정은 성립하지만 결론이 성립 하지 않음의 예 즉, 반례를 찾아보는 활동을 제시한다.

이러한 또 다른 예로 C교과서 경우는 역함수가 존재하지 않는 함수가 있음을 구체적 예로써 설명하고 있다. 반례라는 용어는 사용하고 있지 않지만 명제 [함수는 항상 역함수가 존재한다]가 거짓임을 말할 수 있는 예를 보여주고 있다. 이는 인지갈등을 유발하면서 역함수가 존재하지 않은 함수를 통해 역함수가 존재하기 위한 조건들을 탐색할 수 있는 기회를 제공하게 될 것이다. 이런 예들은 Zakis & Chernoff(2008)가 말한 학습자의 인지적 갈등을 해결하는 교육학적 기능이 있는 역할로 보인다.

나. 유형 2 : 명제화를 통한 반례찾기

이 유형은 개념을 명제 형태로 기술하여 참, 거짓을 판별하게 하고 거짓인 경우 반례를 생각하게 함으로써 개념형성에 도움을 주기위한 활동이다(Mason & Klymchuk, 2008). 이에 대한 예는 무한급수의 성질에서 주어진 명제가 거짓임을 알 수 있는 예를 찾아보게 하고 있다(F교과서). 이와 같은 기회는 학생들로 하여금 다양한 반례 생성 기회를 가질 수 있도록 한다. 학생들은 자신이 생성한 반례를 통해 반례의 정확성을 검토하고 자신과 다른 반례들을 확인하면서 예 공간을 확장시킬 수 있고 의사소통하면서 반례 생성 전략을 발달시킬 수 있게 될 것이다.

C교과서에서는 함수의 극한에서 함수의 극한이 함숫값과 항상 같지 않음을 거짓 명제를 만들어 학생들에게 제시되고 있다. 함수가 연속인 경우와 불연속인 경우로 나누어 생각해 볼 수 있는데 이 경우는 불연속인 경우가 이 거짓 명제의 반례가 될 것이다. 불연속인 함수도 좌우극한값은 같으나 함숫값이 같지 않는 경우와 좌우극한값이 같지 않는 경우의 다양한 반례가 만들어질 수 있는 것이다. C교과서뿐만 아니라 D교과서에서 역시 수학적

내용을 명제화하고 거짓 명제를 통해 성립하지 않은 예, 즉 반례를 가지고 반증하는 방법을 지도할 수 있도록 제시하고 있다.

다. 유형 3 : 정리에서 가정의 조건 변형을 통한 거짓 명제의 반례

이 유형은 참인 명제에서 가정의 조건의 조작을 통해 거짓 명제를 만들고 그 거짓 명제를 가지고 반례를 찾아보게 하는 활동이다. 이는 간과하기 쉬한 정리들의 조건들에 주목하고 용어, 속성, 표기들을 주의 깊게 살피는 교수·학습 내용이 포함된다(Mason & Klymchuk, 2008).

G교과서에서는 수열의 극한의 성질에 대한 내용에서 조건을 변형하여 그에 해당하는 예를 찾도록 하고 있다. 이것은 거짓인 명제에서 반례를 들어 반박하는 것은 아니지만 학생들로 하여금 가정의 조건을 달리했을 때의 결과의 변화에 대해 생각해 볼 수 있는 기회를 줌으로써 개인의 예 공간을 확장하는데 도움이 될 수 있을 것이다. F교과서에는 극한의 성질에서 가정의 조건을 삭제한 거짓 명제를 만들고 그 명제가 참인지를 묻고 있다. 수열의 극한의 성질에서 가정의 조건인 두 수열이 수렴하지 않는다면 극한의 성질이 성립하지 않음을 교사용 지도서는 예를 들어 설명하고 있다. 이는 거짓 명제의 반례를 찾는 활동이다.

또 다른 예로서 미적분Ⅰ의 최대·최소의 정리에서 가정의 조건이 닫힌구간이 아닌 경우에는 항상 최댓값과 최솟값을 가지지 않음을 예를 들어 설명하고 있다(F교과서). 이것은 닫힌구간이 아닌 경우에는 결론이 성립하지 않음을 반례를 들어 반증하는 것이다. 가정의 조건은 명제가 성립하기 위한 중요 요소로 인식할 수 있는 교수·학습 방안이다.

라. 유형 4 :명제가 거짓임을 보이거나 정리에서 역이 거짓임을 보이는 반례

명제 단원에서 수학적 의미로써의 반례를 학습하기 위해 거짓 명제의 반례를 찾아 반박하는 경우와 주어진 정리의 역이 일반적으로 항상 성립하지 않음을 보이기 위해 반례를 활용하는 유형이다.

D교과서인 경우 명제 단원에서 명제가 왜 거짓인지를 보이기 위해 하나의 반례로써도 충분함을 말해 주고 있다. C교과서는 수열의 극한의 성질에서 수열의 극한의 성질의 역이 성립하지 않음을 반례를 통해 보이고 있다. 이러한 예들은 다양한 교과서에서 나타나는데, 예를 들면, E교과서에서는 연속성과 미분가능성에 대한 내용에서 연속이지만 미분가능하지 않은 경우를 $y=|x^2-1|$를 통해 보이고 있다. 다른 교과서에서도 거의 대부분의 예가 절댓값 함수를 들어 첨점(sharp point)에서의 미분이 되지 않음을 보여주고 있다. 첨점(sharp point)에 경우 절댓값 함수 외에 다양한 예도 보여줄 수 있지만 교과서는 모두 절댓값 함수로 동일하다. 연속이지만 미분불가능한 점은 절댓값 함수에서의 첨점(sharp point)뿐 만 아니라 좌미분계수와 우미분계수가 다른 점, 접선이 수직인 점, 진동하는 점 등의 다양한 예가 있을 수 있지만 교과서에 제시되어 있지 않다. 거짓 명제를 반박하는데 하나의 반례로도 충분하지만 수업에서는 다양한 반례를 생성해 보는 활동이 필요한 또 다른 이유이기도 하다.

B교과서에서는 함수가 한 점에서 미분가능하면 접선이 존재한다는 성질의 역은 성립하지 않음을 설명하고 있다. 학생들은 접선의 존재여부를 미분가능성에 따라 결정된다는 오류를 범할 수 있는데 역이 성립되지 않는 예를 확인해 보면서 접선의 존재성과 미분가능성은 필요충분조건이 아님을 알 수 있을 것이다.

### 3. 교과서 반례의 유형별 분석 결과

미적분Ⅰ의 교과서에서는 다항함수의 적분 단원을 제외한 모든 단원에서 반례 활용부분이 나타났으며, 수Ⅱ에서는 명제와 수열 부분에서 활용한 부분이 많이 보였다.

<표 Ⅲ-3> 교과서에 나타난 유형별 반례 활용 영역

| 단원명 / 구분 | 수Ⅱ | | | | 미적분Ⅰ | | | | 계(비율) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 집합과 명제 | 함수 | 수열 | 지수와 로그 | 수열의 극한 | 함수의 극한과 연속 | 다항함수의 미분법 | 다항함수의 적분법 | |
| 유형1 | · | 3 | 2 | 1 | 7 | 6 | 5 | · | 24(41) |
| 유형2 | · | · | · | · | 2 | 2 | 1 | · | 5(8) |
| 유형3 | · | · | · | · | · | 3 | 3 | · | 6(9) |
| 유형4 | 7 | · | · | · | 7 | 3 | 7 | · | 25(42) |
| 계 | 7 | 3 | 2 | 1 | 16 | 14 | 16 | 0 | 59(100) |

유형별 반례 활용을 분석한 결과는 <표 Ⅲ-3>과 같이 유형1의 반례와 유형4의 반례 활용이 상대적으로 교과서에 자주 등장했다. 개념학습에서 오류의 가능성을 생각하고 기존 지식과 충돌을 일으키게 하여 반례를 보임으로써 학습자로 하여금 올바른 개념 정립을 할 수 있도록 도와주는 반례와 거짓 명제임을 보이기 위한 바례로서 정리의 역이 항상 성립하지 않음을 지도하는 반례 활용이 가장 빈번히 나타나고 있다. 이동환(2014)은 2007개정 교과서에서는 반례가 대부분의 교과서가 한 영역에 집중되어 있고 반례수도 적으며 교과서는 거의 반례를 활용하지 않음을 지적하고 있다. 그러나 2009개정 교과서에서는 반례를 거짓 명제를 반박하기 위해 사용하기도 하고, 또한 반례 그 자체의 수학적 의미보다는 반례가 가지고 있는 교육적 전략들을 가지고 수학 학습에 활용하고 있음을 알 수 있다.

교과서의 분석 결과로 확인 할 수 있는 중요한 점은 모두 하나의 반례를 들어 인지갈등을 해결하거나 거짓 명제를 반박하는 것에 주로 활용하고 있으며, 다양한 반례들의 탐색을 하는 활동은 찾아볼 수 없다는 것이다. 또한 거짓 명제의 반례를 통해 명제가 참이 되게 하는 활동이 전혀 없었다.

## Ⅳ. 명제 단원에서 반례를 활용한 교수·학습 자료 개발

### 1. 반례 활용 수학 교수학습 개발 방향

반례를 활용하는 것은 개념을 이해하고 오개념을 방지하며 논리적 생각과 창조적인 학습을 할 수 있는 매우 효과적인 교육적 전략이다(Mason & Klymchuk, 2009). 이러한 교육적 전략으로서의 역할을 하는 반례를 두 가지로 구분할 수 있는데, 먼저 추론적 예(pivotal example)로서 학습자의 인지의 전환점을 만들고 개념 변화를 일으키는데 도움을 주는 예이고, 두 번째는 연결의 예(bridging example)로서 학습자의 초기의 부정확한 개념을 적절한 수학적 개념으로 다리의 역할을 하며 인지적 갈등을 해결하는데 도움을 주기위한 역할이다(Zazkis & Chernoff, 2008)

본 연구에서는 수학적 의미의 반례를 포함, 수학 교수·학습 전략으로서 다음과 같은 관점에서의 반례 활용 자료를 개발한다; 첫째, 명제의 해석과 개념 형성을 위하여 활용한다. 둘째, 주어진 거짓 명제에 대한 인지적 갈등을 제공하고 이에 대한 다양한 반례를 탐색하여 반례를 수용한다면 어떤 참인 명제를 만들 수 있을지, 또 반례를 제거한다면 어떤 참인 명제를 만들 수 있을지에 대한 사고 경험을 통해 인지적 갈등 해결 전략으로 활용한다. 셋째, 반례를 수학적 의사소통의 수단으로써(Carpenter & Franke, 2001 오혜미, 권오남, 2014에서 재인용) 학습 과정에서 수학적 담화를 촉진하기 위한 교육적 전략으로 활용한다.

본 연구에서는 고등학교 1학년 수학Ⅱ의 명제 단원에서 수준별로 명제를 선별하여 반례를 활용한 학습지를

구성한다. 명제를 단순한 진위판정과 거짓 명제의 하나의 반례 찾는 활동을 넘어서 명제를 학습할 때 그 의미를 이해하고, 조건의 역할을 인식하는 등의 수학적 개념을 학습하는데 도움이 될 수 있다.

## 2. 반례를 활용한 교수 학습 자료 내용 구성 요소

본 연구에서 반례를 활용한 교수·학습 자료에서의 내용 요소는, 주어진 명제를 가지고 명제 이해도와 명제의 진위판단, 명제 변형을 통해 참인 명제는 거짓 명제 만들기 활동을 진행하고 거짓 명제는 다양한 반례들의 탐색을 통해 반례를 제거하거나 반례를 수용하여 참인 명제를 만들어 보는 활동으로 구성하였다. 즉, 각 개발 내용에 들어간 핵심 요소는 다양한 '반례 찾기' 활동, '참인 명제 만들기', '거짓 명제 만들기'를 통한 명제 개념 학습이다.

가. 다양한 '반례 찾기' 활동

거짓 명제가 성립하지 않는 반례를 들어 거짓임을 보이는 것이 가장 근간이 되는 활동이다. 이는 주어진 명제가 논리적으로 거짓임을 판단하고 그 논리적 분석을 통해서 성립하지 않는 반례를 찾아보는 활동을 한다.

명제가 거짓임을 판단하는 것에 그치지 않고 보다 다양한 반례를 생각하도록 하는 것은 두 가지의 교육적 효과가 있다. 첫째, 명제를 재음미하는 기회를 가질 수 있다. 둘째, 결론이 만들어지기 위해서 가정의 필요한 조건들을 재탐색 할 수 있다. 셋째, 학습자의 예 공간을 확장해 줄 수 있는 기회를 가질 수 있다.

오혜미, 권오남(2014)은 수학적으로는 명제를 반박하기 위해선 하나의 반례만으로 충분하지만, 다양한 반례를 탐구하는 활동을 통해 개념학습이 가능하다고 하였다. 예를 들어, 거짓 명제 '함수 $f(x)$가 개구간에서 연속이면 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다'에서 한 가지 거짓 명제의 반례 찾기만으로는 개구간에서 연속일 때 모두 최대, 최소 존재하지 않는다고 생각하는 학생들도 있을 수 있다는 것이다. 다양한 예들을 통해 $f(x)$가 개구간에서 연속이면 어떠한 경우가 생기는지를 탐구하는 과정에서 의사소통의 기회를 갖게 되므로 되도록 다양한 반례들을 탐구하는 활동이 필요하다는 것이다.

따라서 본 연구에서는 "위 명제가 거짓이라면 되도록 많은 반례들을 들어 보아라."와 같이 다양한 반례를 찾아보게 한 후 "<반례의 탐색> 위의 반례들을 통해 어떤 것을 알 수 있는가?" 와 같은 발문을 추가하였다.

나. '참인 명제 만들기'

정혜윤(2010)은 거짓인 명제를 참인 명제로 재구성한 후 참이 되는지를 다시 확인하여 반성해 보는 활동이 필요하다는 것을 강조한다. 거짓 명제를 제시하고 반례를 찾아보는 활동과 더불어 그 명제가 참이 되게 만들어 봄으로써 가정의 조건에 따라 성립할 수 있는 결론의 조건을 생각하게 하여 수학적 연결성을 학습하는 기회를 갖게 된다고 하였다. 따라서 본 연구에서는 조건의 인식과 수학적 사고력, 비판적 사고를 길러주고자 하는 교육 전략으로서 반례를 활용하기 위하여 새로운 참인 명제를 구성하는 기회를 제공하였다.

| |
|---|
| 명제: 임의의 실수 $x, y$에 대하여 $[x+y]=[x]+[y]$이다. (단, $[x]$는 $x$를 넘지 않는 최대의 정수) |
| 1. 위 명제가 무엇을 의미하는가? |
| 2. 위 명제의 참, 거짓을 판별하여라. |
| 3. 위 명제가 거짓이라면 되도록 많은 반례들을 들어 보아라. |
| 4. <반례의 탐색> 3의 반례들을 통해 어떤 것을 알 수 있는가? |
| **5. <참인명제 만들기>** |
| **4의 반례의 탐색을 통해 위 명제가 참이 되도록 만들어 보아라.** |

[그림 IV-1] 참인명제 만들기 활동 예시

다. ‘거짓 명제 만들기’

Mason & Klymchuk(2008)은 학습자의 인지적 갈등을 야기시키는 방법으로 참인 명제를 가지고 거짓 명제를 만들어 탐구하는 활동을 제시하였다. 이는 명제의 정당화, 논증 추론과 비판적 사고 등의 수학적 사고의 본질을 경험할 수 있다는 것이다. 참인 명제를 가지고 거짓 명제를 만드는 방법은 다양하다. Polya(1981)가 제시한 발견술을 참고하면 가정의 조건 하나를 삭제하여 만들기, 가정의 조건 하나를 첨가하여 만들기, 결론에서 하나의 주장을 삭제하기, 결론에서 하나의 주장을 첨가하기 등이 있다. 거짓 명제를 만드는 활동도 문제 만들기 활동과 유사한 교육적 의의를 담고 있다. Brown과 Walter(1993)는 문제 만들기 활동은 원래의 문제를 재해석하고 해결할 수 있는 단서를 찾는 과정에서 원래의 문제를 이전과는 전혀 다른 새로운 관점에서 볼 수 있게 됨으로써 수학적 개념과 의미를 보다 명확하게 이해할 수 있게 된다. 이처럼 참인 명제를 가지고 조건을 변형하여 거짓 명제를 만들어 보는 것은 문제 만들기 활동과 맥을 같이 한다고 볼 수 있다. 그러한 의미에서 볼 때 거짓 명제 만들기 활동은 조건을 재탐색하는 경험을 통해 참인 명제에서의 조건의 필요성 등을 알게 하는 교육전략이라 할 수 있다.

| |
|---|
| 명제: 두 자연수 $a, b$에 대하여 $a^2+b^2$가 홀수이면 $ab$는 짝수이다. |
| 1. 이 명제가 의미하는 것은 무엇인가? |
| 2. 위 명제에서 가정과 결론을 나누어 써 보아라. |
| 3. 위 명제를 변형하여 거짓인 명제를 만들고 그 반례를 찾아라. |
| (단, 되도록 거짓인 명제를 많이 만들어 보시오. 또한 반례는 가급적 여러 개 제시하시오) |

[그림 Ⅳ-2] 거짓명제 만들기 활동 예시

## Ⅴ. 반례 활용 수학 내용 학생 적용 사례

### 1. 연구 방법

가. 연구 절차

본 연구는 반례를 명제 학습 전략으로서의 역할을 강조하고자 하였다. 이에 대한 적용 사례로 고등학교 1학년 학생을 대상으로 수학Ⅱ 교과서에 나오는 명제 단원의 내용을 적용하였다.

본 연구는 명제 학습 전략으로서 반례의 활용에 대해 제안하고자 다음과 같은 연구 절차를 실시하였다. 먼저, 고등학교 1학년 학생을 대상으로 사전검사를 통해 명제 이해도를 알아보았다. 이러한 사전검사 결과를 토대로 명제 단원에서의 반례를 활용한 학습지를 수준별로 개발하여 학생들에게 수업을 실시하였다. 총 실험 수업 차시는 상위 그룹 3차시, 중위, 하위그룹은 6차시 실시하였다. 수업은 매주 금요일 방과 후 1시간씩, 두 달 가량 진행되었다. 매 차시 수업 후에는 학생들과 비 구조화된 인터뷰를 간단히 실시하였다. 이는 반례를 활용한 명제 수업에 대한 학생들의 반응을 통해, 수업 내용이 학생들에게 적합한지를 판단하여 수업 자료를 수정·보완하기 위함이다. 마지막으로 실험 수업이 모두 끝난 이후 학생들에게 수업에 대한 설문과 명제 내용에 대한 사후 검사를 실시하였다. 이는 반례를 활용한 명제 수업이 학생들의 인지적, 정의적 영역에 미치는 효과를 파악하기 위함이다.

나. 연구 대상

실험 수업 대상자는 전국 성취도 수준이 최상위에서 하위 학생들까지 고루 분포되어있는 인문계 고등학교 학생들이다. 이 학교의 1학년 학생들 중에서 실험 수업에 참여할 뜻을 밝힌 학생들을 대상으로 1학기말 학교 성적

으로 구분하여 상위, 중위, 하위그룹으로 나누었다.

사전 검사와 사전 인터뷰를 통해, 상위 그룹 학생들은 학업성취도와 수학에 대한 자신감이 높은 편이며, 중위 그룹 학생들은 성적이 양호하나 수학은 어려운 과목이라고 생각하는 경향이 있고, 마지막으로 하위그룹 학생들은 학업성취도와 수학에 대한 흥미나 자신감이 낮은 상태임이 나타났다. 다음은 선정된 연구 참여자의 1학기말 학교 성적을 나타낸 것이다.

<표 Ⅴ-1> 연구 참여자의 성적 분포

| 학생 / 수준 | G1 | G2 | G3 |
|---|---|---|---|
| 최상위 그룹 | 98.18 | 97.73 | 97.55 |
| 중상위 그룹 | 86.70 | 81.98 | 63.76 |
| 하위 그룹 | 50.03 | 51.30 | 52.61 |

다. 수집 자료

반례 활용 수업 자료를 적용하면서 수집한 자료 수집 내용은 다음과 같다; 첫째, 사전 검사 결과. 사전검사는 세 그룹의 명제에 대한 이해와 명제의 참, 거짓의 판별의 정도를 알아보기 위하여 사용하였다. 상위 그룹과 중위 그룹의 학생들에게는 학교 수학에서 다루는 명제 중 난이도가 높은 것을 선택하여 구성하였고 검사할 명제의 수도 더 많이 제시하였다. 하위그룹의 학생들은 학교 수학에서 다루는 명제 중에서도 비교적 쉬운 명제를 제시하고 명제의 수도 적게 제시하였다. 사전 검사를 통해 참여자들 수준에 적합하지 않는 명제라 판단된 것에 대해서는 반례 적용 교수·학습 자료를 수정·보완하는데 참고하였다. 둘째, 수업 적용 중 얻은 정보. 학생의 수준에 맞추어 개발된 자료를 가지고 수업을 하는 과정에서 학생들의 학습 활동지, 수업 중 자신이 만든 반례와 명제에 대해 토론하는 내용의 대화가 녹취되어 수업 분석에 활용되었다. 셋째, 사후 검사 결과와 사후 인터뷰 내용. 사후 검사와 비구조화된 사후 인터뷰를 통해 학생들에게 실험 수업 후 명제 개념에 대한 인지적 측면에서의 변화를 알아보고자 하였다. 또한 연구 참여자의 정의적 영역 측면에서의 변화를 분석하기 위하여 반례를 활용한 수업에 대한 반응과 소감을 알아보았다.

## 2. 실험 수업 결과 분석

가. 상위 그룹 학생의 수업 결과 분석

1) 사전검사 결과

사전검사 결과를 살펴보면 세명의 학생 모두 모든 명제에 대한 참과 거짓을 제대로 판별하였으나 명제 [$x, y$는 0이 아닌 실수에 대하여 $x \geq y$ 이면 $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$ 이다]에 대해서는 한명은 옳은 답을 하지 못했다. 반면에 반례를 말하는 문제에서는  또 G2학생과 G3학생은 반례를 들지 않고 거짓인 되는 조건들을 적어 놓기도 하였다. 반례의 정확한 의미를 알고 답을 하기 보다는 성립되지 않는 조건만으로도 표현해도 된다고 생각하고 있었던 듯하다. 상위 그룹의 학생들의 사전 검사 결과에 따르면 대체적으로 학생들은 명제의 진위 판별과 거짓인 명제에 대하여 반례를 들어 보이는 것에 큰 어려움은 없었다.

2) 반례 활용 수업 사례

가) 거짓 명제 만들기 활동

거짓 명제 만들기의 활동에서는 다양한 거짓 명제를 기술하였다. 처음에는 학생들이 어떻게 명제를 변형해야

할지 몰라 고민하는 모습이 보였고 가정과 결론을 모두 변형하면서 명제와 전혀 다른 의미를 가지는 명제를 구성하는 경우도 있어서 교사는 가정의 조건과 결론의 조건의 변형에 대한 발문을 제기하였다. 학생들이 기존 명제와 전혀 다른 의미의 명제로 변형하거나 단순한 조건만을 변형하는('>'의 부등호를 '<'로 변형하는 등) 것이 아닌 다양한 거짓 명제를 생각해 보도록 유도해 나갔다. 참인 명제 [양의 실수 $a, b$에 대하여 $a < b$이면 $|a| < |b|$이다.]에 대한 거짓 명제 만들기 활동에서, G1학생은 주어진 가정의 조건을 변형하기도 하였으나 하나의 반례만을 들어 놓았다. 반례는 거짓 명제에 대한 반증의 방법으로써 사용하기 때문에 하나만으로 충분해서라기보다는 한 개의 반례만 존재한다고 생각하고 있었다. 이후 교사의 요청으로 다른 반례도 더 찾고 난 후 결론을 변형한 즉, 절댓값의 크기 비교를 가우스 기호로 변형하여 거짓 명제를 만들었다.

교사: 양의 실수를 그냥 실수라고 변형했네요.
G1: 네. 조건만 변형했어요.
교사: 단순히 조건만으로 변형하기 보다는 가정의 조건이나 결론의 조건을 변형하는 것은 어떨까?
G1: 음…
교사: 가우스 기호로 변형을 했네요.
교사: 그럼 거짓 명제가 되나요? 반례가 어떤 것이 있지?
G1: 네. $1 < 1.1$ 이지만 $[1] = [1.1]$이므로 명제는 성립하지 않아요.
교사: 음...그렇게 되는군요. 여러 가지 반례를 생각할 수 있을까?
G1: 네. 크기는 다르지만 정수부분이 같으면 가우스 기호의 값은 같으니까 그런 것들이 반례가 될 것 같아요.
교사: [실수 $a, b$에 대하여 $a < b$ 이면 $a^2 < b^2$ 이다.]의 명제가 아닌 이 명제의 역을 거짓 명제로 들었네?
G1: 그 명제도 거짓이 되는데 그 명제는 너무 당연한 것 같아서. 또 그리고 명제의 역은 거의 거짓인 경우가 많아서 역을 써 봤어요.
교사: 이 명제는 지수개념까지 가고 있는데?
G1: 네. $a^2 < b^2$ 했으니까 제곱대신에 $n$제곱 넣어서 생각했어요. $n$을 정수로 하고.
교사 : 반례를 많이 생각해 볼 수 있겠는데요.
G1: $n = -1$일 때도 안 되고 $n$이 짝수일 때는 $a, b$에 따라 성립되지 않는 것도 있고. 그런데 이 명제가 맞는 것인지 잘 모르는데. 이거 맞아요?

위 대화에서 G1 학생은 자신이 만든 거짓 명제로 많은 반례들이 있음을 스스로 찾을 수 있었다. 또한 결론의 변형으로 $a^2 < b^2$을 생각했고, 명제의 역을 다시 생각하여 거짓 명제를 만들어 나갔다. 이 뿐만 아니라 결론을 변형하는 과정에서 다양한 수학적 개념을 사고하고 있음을 보여주는 것이 지수 개념이었다. 지수의 개념은 아직 교육과정상 학습하지 않은 경우이지만 역수가 크기 보존이 안 됨을 가지고 지수로 확장시켜 생각해 보았다는 것은 거짓 명제를 만들어 보는 과정에서 수학의 개념에 있어 확산적 사고가 일어났다고 볼 수 있다.

G2 학생은 여러 가지 거짓 명제를 만들었고 단순히 명제의 역에서 그치지 않고 다른 결론의 조건을 생각하여 표현하였다. 그러나 반례를 써야 하는 문제에서는 반례가 아닌 역이 성립되지 않는 조건을 썼고, 거짓 명제의 반증으로서의 반례에 익숙하지 않은 듯 보였다.

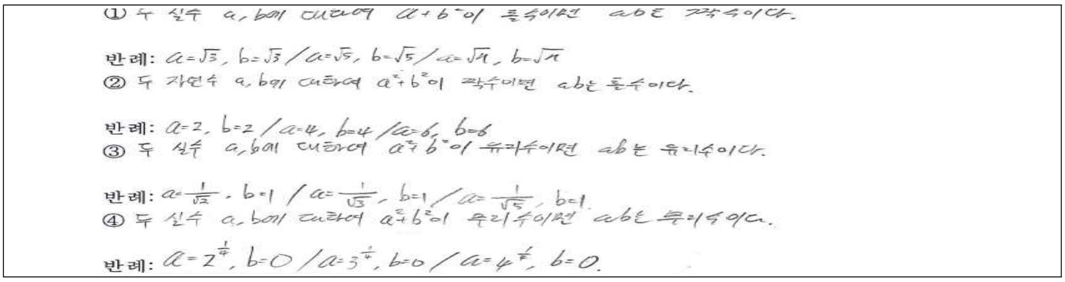
G2: 저는 기본적으로 역이 성립되지 않는걸 보였어요..
G2: $|a| < |b|$이고 $a > 0, b < 0$ 인 경우요..
교사: 만약 성립되지 않는 경우를 보면 $a < 0, b < 0$이지만 $|a| < |b|$인 경우도 있지.

G2: 머리에 떠오르는 것을 썼는데 그런 경우도 있네요..
교사: 그런데 반례에 반례가 아닌 역이 성립되지 않는 조건을 썼네.
G2: 그렇네요. 그러면 $a=1, b=-2$ 인 경우가 있어요.
교사: 반례가 어떤 것인지는 알고 있는데 왜 이렇게 적었지?
G2; 성립되지 않는 조건이 더 먼저 생각나서 썼어요.
G2: $|a|<|b|$일 때 $a^3<b^3$도 $|a|<|b|$일 때 $a<b$인 경우와 비슷해서 이것도 적어봤는데 조건을 써버렸네요. 반례를 찾으면 $a=-1, b=-2$이예요.

G3학생은 명제의 역이나 부정 등은 쉽게 했고 결론을 바꾸어 다른 명제를 만들려는 노력을 기울였다. 거짓 명제를 만드는 것은 기호하나만 바꾸더라도 만들 수 있지만 자칫 전혀 다른 의미의 명제가 될 수 있음을 학생들에게 설명해 주었다. G3 학생은 크기에 대한 것이 조작적 식에 의해 보존이 될 수 있기도 하지만 그렇지 않을 수도 있다고 설명하면서 다양한 변형을 위해 생각하는 것이 어려웠다고 했다.

교사: 명제의 역이나 부정을 이용한 변형은 쓰지 않았네요.
G3: 네. 그런 것이 너무 쉬운 것 같아서요..
교사: 가정의 조건을 그대로 두고 결론의 조건을 바꾼 경우이네요.
G3: 두 수의 크기를 그대로 두고 결론을 바꾸기 위해 여러 가지 고민을 했어요.

다음은 명제 [두 자연수 $a, b$에 대하여 $a^2+b^2$가 홀수이면 $ab$는 짝수이다.]에 대한 거짓 명제를 만들기에서 G1 학생은 [그림Ⅴ-1]에서와 같이 조건의 수에서 어떤 특정한 경우만 성립하지 않는 경우를 반례라고 들어 보았다.


① 두 실수 $a, b$에 대하여 $a^2+b^2$이 홀수이면 $ab$는 짝수이다.
반례: $a=\sqrt{3}, b=\sqrt{3}$ / $a=\sqrt{5}, b=\sqrt{5}$ / $a=\sqrt{\pi}, b=\sqrt{\pi}$
② 두 자연수 $a, b$에 대하여 $a^2+b^2$이 짝수이면 $ab$는 홀수이다.
반례: $a=2, b=2$ / $a=4, b=4$ / $a=6, b=6$
③ 두 실수 $a, b$에 대하여 $a^2+b^2$이 유리수이면 $ab$는 유리수이다.
반례: $a=\frac{1}{\sqrt{2}}, b=1$ / $a=\frac{1}{\sqrt{3}}, b=1$ / $a=\frac{1}{\sqrt{5}}, b=1$.
④ 두 실수 $a, b$에 대하여 $a^2+b^2$이 무리수이면 $ab$는 무리수이다.
반례: $a=2^{\frac{1}{4}}, b=0$ / $a=3^{\frac{1}{4}}, b=0$ / $a=4^{\frac{1}{4}}, b=0$.

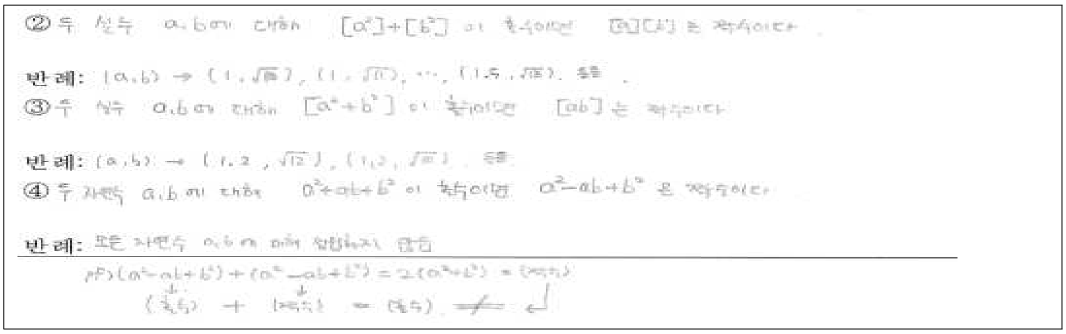
[그림 Ⅴ-1] G1 학생이 만든 거짓 명제

이것은 홀수와 짝수의 개념은 정수라는 것을 잊고 조건 변형을 한 경우로 홀수와 짝수의 개념을 다시 한 번 되짚어보기도 했다.

G2학생은 [그림Ⅴ-2]처럼 짝수나 홀수를 변형하는 것이 제한적이어서 결론의 조건을 변형했다고 했다. 주어진 명제의 거짓 명제를 만들고 그 반례를 찾아보는 것이 주어진 명제의 이해를 높이고 명제의 조건을 정확하게 인식하게 되는 기회가 되었다.

교사: 이번엔 거짓 명제를 명제의 역이나 가정의 조건의 부정을 하는 등으로 보였네요..
G2: 네. 이 명제는 조건의 변형을 할 게 없어서요.
교사: 그렇죠. 짝수와 홀수 개념은 조건을 확장에 제한적이니까
G2: 네. 그래도 짝, 홀 대신에 3의 배수와 $a^2+b^2$을 $a^3+b^3$으로 변형했어요.

G3학생의 거짓 명제는 [그림Ⅴ-6]에서 보듯이 조건을 실수로 하면서 가우스 기호를 사용하여 명제를 만들었다. 두 번째 만든 명제는 자신이 만든 첫 번째 명제를 참고하여 또 다른 변형의 형태를 만들어 구성하였다.



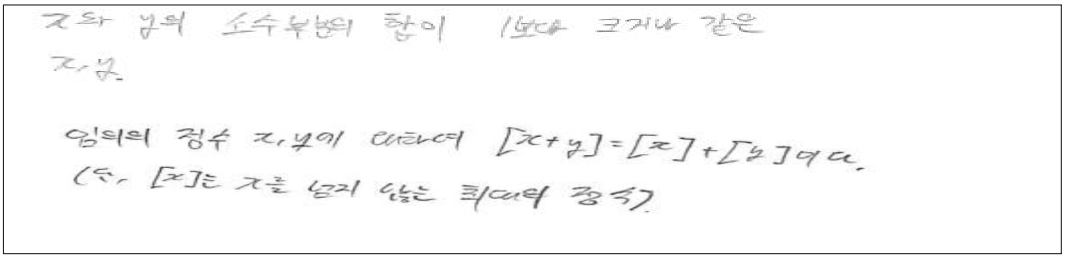

[그림Ⅴ-2] G3 학생이 만든 거짓 명제

전반적으로 상위 그룹의 학생들은 명제의 조건에 주목하고 가정의 조건과 조건의 속성들을 주의 깊게 살피며 다양하게 변형하였다. 처음에는 반례 대신 성립되지 않는 조건을 쓴 학생도 두 번째 수업부터는 반례를 잘 표현하고 지수개념과 연관지어 거짓 명제로 만드는 등의 모습도 보였다. 아직 교육과정상 지수와 지수함수까지 학습한 상태가 아니지만 거짓 명제를 만들면서 지수개념을 자연스럽게 사고할 수 있는 경험을 하게 되었다. 즉, 상위 그룹 학생들의 거짓 명제는 대수적 명제뿐만 아니라 해석적인 함수로 확장하여 생각한 결과라 볼 수 있다. 이는 거짓 명제 만들기 활동을 통해 확장된 수학적 개념과의 연결이 이루어졌다고 볼 수 있다.

나) 참인 명제 만들기 활동

참인 명제 만들기는 거짓 명제가 주어지고 참인 명제를 만드는 활동에서는 거짓인 명제의 반례들을 찾아보고, 성립하지 않는 반례를 탐색해 보고 그 특징을 파악한 후에 참인명제로 바꾸는 활동이다. 예를 들어 주어진 명제 [모든 실수 $x, y$에 대하여 $[x+y]=[x]+[y]$이다.]에서 세 학생은 명제가 거짓임을 판단할 수 있었다.

G1학생은 [그림Ⅴ-3처럼 자신이 든 다양한 반례들을 탐색한 결과 두 수를 합하면 두 수의 정수부분의 합과 달라진다는 것을 착안하여 참인 명제에 접근하기 위해 노력하였다.



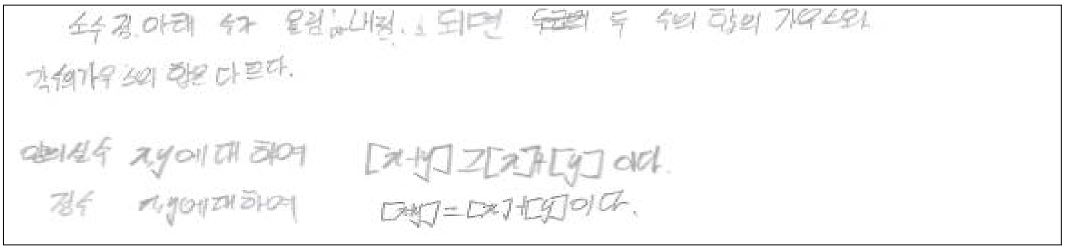

[그림Ⅴ-3] G1 학생의 반례 탐색 및 참인 명제 만들기 결과

교사: 이 반례들의 특징은 뭘까?
G1: 모두 반올림되는 수들인 것 같아요.

교사: 두 수의 합했을 때 소수자리의 수가 원래 두 수의 정수부분의 합에 영향을 주는 거네.
G1: 맞아요. 그래서 정수부분이 달라져요.
교사: 그럼 이런 반례들을 제거하면 참인 명제가 나오지 않을까?
G1: 아 그렇긴 한데...그걸 어떻게 써야 할지 잘 모르겠어요.
교사: 좀 더 생각해 볼까?

G2학생은 소수점 아래의 수로 인해 두 수의 합의 기우스 기호값과 각각의 가우스 기호값의 합이 달라짐을 [그림Ⅴ-4]와 같이 반례 탐색 후 참인 명제를 만들었다.

G2학생은 주어진 거짓 명제가 $x, y$가 정수조건일 때는 $[x+y]$와 $[x]+[y]$의 경우가 항상 같음을 알 수 있다는 것이다. 이것은 반례들을 제거해 나가는 과정에서 얻은 명제이다. 또한, $x, y$ 조건이 실수라면 $[x+y]$와 $[x]+[y]$의 값이 항상 같지는 않고 $[x+y] \geq [x]+[y]$이 성립한다는 것이다. 이는 반례를 수용다면 어떤 결과가 생길지를 생각해보면서 얻은 명제라고 할 수 있다.




[그림Ⅴ-4] G2 학생의 반례 탐색 및 참인 명제 만들기 결과

교사: 다양한 반례들의 공통점은 무엇일까요?
G2: 소수점 아래의 수가 올림, 내림이 되면 왼쪽과 오른쪽이 달라져요..
교사: 그럼 이런 반례들을 가지고 참인 명제를 만들 수 있을까?
G2: 저는 두 가지 경우로 생각했어요. 이런 경우를 만들지 않으면 되니까 $x, y$ 정수로 제한하면 될 것 같아요. 또 실수 $x, y$가 어떤 경우든 $[x+y] \geq [x]+[y]$ 이 되니까.

3) 인지적 영역 측면에서의 실험 수업 후 학생 반응

사후 검사와 사후 인터뷰를 통해 학생들의 명제에 대한 개념의 변화 및 수업에 대한 반응을 파악하고자 하였다. 우선, G1학생은 난이도 측면에서 기존의 명제 수업보다는 반례를 활용해서 수업하는 것이 더 쉽다고 하였다. G2학생과 G3학생은 조건을 상세히 보게 되었다는 말을 하면서 반례를 활용하여 학습하는 것이 명제의 구조와 맥락을 더 상세히 인식할 수 있었다고 한다.

교사: 어려운 것은 없었나요?
G1: 전에 해 봐서 그런지 쉽게 느껴지는데요.
G2: 저도요. 문제뿐만 아니라 이젠 조건을 더 잘 보이고 반례를 들어 보이는 것이 자연스럽다고 할까요? 아. 또 거짓 명제 만들어 보면서 다른 수학적 개념을 많이 생각해서 그런지 만약 $a < b$이러한 가정 조건이 있으면 이것을 단순히 두 수의 크기를 나타내는 것으로도 보이고 여러 함수의 정의역의 원소로도 생각돼서 결론의 조건만 봐도 참, 거짓 판별이 쉬워진 것 같아요.
G3: 전에는 깊이 있는 생각보다 그냥 참, 거짓을 판별했다면 지금은 조건을 자세히 보게 되고 이런 조

건일 때는 명제의 반례가 생기겠구나 하고 생각을 조금 더 하게 되는 것 같아요.

G1학생은 거짓 명제 만들기 활동에서 가정과 결론의 변형을 통해 어떻게 변형해 볼까하는 생각을 하면서 지금까지 배운 여러 개념과 정리를 생각해 보는 기회를 갖게 되었다고 답했다. G1학생이 수학적 사고를 한 예시를 구체적으로 제시하면, 가정의 조건의 수의 범위를 변형시키는 과정에서 범위를 확장시켜 사고해 볼 수 있게 되었다는 것이다. 예를 들어 가정의 조건이 유리수이면 수의 범위가 무리수까지 확장 가능할까를 생각해 보는 기회를 갖게 되었고,. 거짓 명제의 반례를 단순히 하나만을 제시하는 것이 아니고 여러 개를 생각해 봄으로써 반례를 일반화시켜보는 활동 중에 많은 수학적 사고를 하였다는 것이다.

G2학생은 사후검사에서는 정확한 반례를 들고 명제가 거짓임을 반박했다. 사전검사에서 보인 반례의 부정확한 개념이 수업 활동으로 개선된 것으로 보인다. 또한 거짓 명제를 만드는 활동이 어려웠지만, 명제를 이루고 있는 조건에 대해 깊게 생각해 보는 경험이 자신의 개념적 오류에 대해 살펴볼 수 있는 기회가 되었음을 말했다.

G3 학생의 경우 거짓 명제 만들기 활동을 통해 참인 명제들의 조건 또는 식을 조금씩만 바꾸어도 거짓 명제가 될 수 있음을 경험하면서 앞으로는 명제를 가지고 참, 거짓을 체계적으로 따질 수 있게 되었다고 말한다. 또한 참, 거짓 명제들을 만들면서 전에 학습했던 수학적 개념들을 되짚어 생각해 보는 과정에서 복습의 효과를 보았다고 했다. 명제의 참, 거짓 판별을 위해 반례를 찾는 부분에서 종종 놓치는 부분들이 있었는데 거짓 명제 만들고 다양한 반례를 찾아보는 과정에서 보완할 수 있었다고 한다.

4) 정의적 영역 측면에서의 학생 반응

G1 학생은 특별히 명제에 대한 학습의 흥미나 자신감 등의 정의적 영역에는 큰 도움은 없었다고 했다. 정의적 영역에서의 영향보다는 수학적 사고력과 개념학습에 영향을 받았다는 것이다.

반면 G2학생은 거짓 명제 만들기와 참인명제 만들기 활동을 통해 명제 학습의 흥미와 자신감을 갖게 되는가를 묻는 물음에, 다양한 개념을 가지고 명제를 생각해 보는 기회를 갖게 되어 많은 명제를 보는 시각이 달라졌다고 답했다. 예전에는 명제를 참과 거짓만을 판별하는 것으로 끝났는데 이 활동을 통해 조건을 명확히 생각할 수 있었고 앞으로 더 잘할 수 있을 것 같다고 말한다.

G3학생은 가정의 조건이나 결론의 조건을 조금씩 변형해 보는 거짓 명제 만들기 활동은 어떻게 변형하면 어떤 결과가 나올 것이라는 예상이 될 정도로 명제 학습에 자신감이 생겼다고 한다.

나. 중위 그룹 학생의 수업 결과 분석

(1) 사전검사 결과

사전 검사 결과 G1학생은 한 문제를 제외하고 모두 옳게 답하였다. 거짓인 명제에 대해 반례를 들어 보이는 것에는 반례를 적은 것도 있지만 반례의 의미를 정확히 알고 있지는 않았다. G2학생은 두 문제 제외한 8개의 문제는 맞았으나 반례에 대한 예는 적절치 않았다.

이로 인해 연구자는 반례의 의미를 충분히 설명하고 연구를 진행해 나갔다. G2학생이 가정의 조건에서 실수 조건의 인식하지 못하고 수의 부호가 같을 때만을 가지고 판단한다거나 하는 등 조건을 주의 깊게 보지는 못하는 경향이 있었다. G3학생은 한 문제를 제외한 모든 명제에 대하여 옳은 판단을 하고 반례도 적절히 들었으나 G2학생과 같이 조건을 유의 깊게 보지 못하는 경향이 있었다.

2) 반례 활용 수업 사례

다음은 G1학생이 만든 거짓 명제 중에는 [그림Ⅴ-5]처럼 거짓 명제 만들기 활동을 잘못 이해하고 있는 부분이 있었다.

| |
|---|
| 명제: 자연수 $x$에 대하여 $x$가 3의 배수이면 $x^2$도 3의 배수이다. |
| ② 모든 수 $x$에 대하여 $x^2$이 3의 배수이면 $x$도 3의 배수이다<br>(e) $x=\sqrt{3}$ |
| 명제: 두 자연수 $a,b$에 대하여 $a^2+b^2$가 홀수이면 $ab$는 짝수이다. |
| ② 두 실수 $a, b$에 대하여 $\lvert a\rvert^2+\lvert b\rvert^2$이 홀수이면 $\lvert a\rvert\lvert b\rvert$는 짝수이다<br>반례: $a=1$, $b=0$ |

[그림Ⅴ-5] G1 학생이 만든 거짓 명제

이것은 조건의 변형을 통해 거짓 명제로 만든 후 반례를 생각하는 것이 아닌 특정한 예를 먼저 생각하고 그 예가 명제를 거짓으로 만든다고 생각하고 만든 경우이다. 또한 홀수와 짝수의 개념은 정수 개념에서 다루기 때문에 전체 집합을 실수로 변형한 것은 주어진 명제의 의미에서 벗어나는 것이기도 했다.

G2학생은 가정과 결론의 조건을 부정하거나 명제의 역을 생각하면서 거짓 명제를 만들었다([그림Ⅴ-6]). 다양한 조건의 변화를 통해 반례를 찾고 반증하고 있음을 알 수 있다.

| |
|---|
| 명제: 두 자연수 $a,b$에 대하여 $a^2+b^2$가 홀수이면 $ab$는 짝수이다. |
| ① 두 자연수 $a,b$에 대하여 $a^2+b^2$이 짝수이면 $ab$는 짝수이다<br>반례: $a=3$, $b=3$ 이면 $a^2+b^2=18$ 이고 $ab$는 홀수이다.<br>② 두 자연수 $a,b$에 대하여 $ab$가 짝수이면 $a^2+b^2$은 홀수이다.<br>반례: $a=4$, $b=3$이면 $ab=12$이고 $a^2+b^2=25$ 이다. |
| 명제: 실수 $a,b$ 에 대하여 $a<b<0$이면 $-\frac{1}{a}< -\frac{1}{b}$이다. |
| ① 실수 $a,b$에 대하여 $a<b<0$ 이면 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 이다.<br>반례) $a=-4$ 이고 $b=-3$ 이면 $\frac{1}{-4} > -\frac{1}{3}$ 이기 때문이다.<br>② 실수 $a,b$에 대하여 $a>b>0$이면 $-\frac{1}{a}<-\frac{1}{b}$이다.<br>반례) $a=5$, $b=3$이면 $-\frac{1}{5} > -\frac{1}{3}$ 이기 때문이다.<br>~~③ 실수 $a,b$에 대하여 $a<0<b$ 이면 $\frac{a}{b} > \frac{b}{a}$ 이다.~~<br>반례) $a=-4$, $b=2$ 이면 $-2 < -\frac{1}{2}$ 이기 때문이다. |

[그림Ⅴ-6] G2 학생이 만든 거짓 명제

G3학생의 경우 처음에는 거짓 명제를 어떻게 만들어야 할지 잘 몰라 어려움이 있었는데 조건을 변형하는 예에 대한 설명을 듣고 난 후, 정확하게 반례를 찾아 반증하고 거짓 명제를 만들 때 가정의 조건 또는 결론의 조

건을 부정하여 만들거나 명제의 역을 이용하여 만들었다.

| |
|---|
| 명제: 실수 $a,b$ 에 대하여 $a<b<0$이면 $-\frac{1}{a}< -\frac{1}{b}$이다. |
| ③ 실수 a.b에 대하여 $a<0<b$ 이면 $-\frac{1}{a}<-\frac{1}{b}$ 이다.<br>반례⇒ $a=-2$, $b=2$ , $\frac{1}{2}<-\frac{1}{2}$ (거짓)<br>④ 실수 a.b에 대하여 $-\frac{1}{a}>-\frac{1}{b}$ 이면 $a<b<0$ 이다.<br>반례⇒ $-\frac{1}{a}>-\frac{1}{b}$, $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ , $a=2$, $b=1$<br>$\frac{1}{2}<\frac{1}{1}$ , $(a>b)$ (거짓) |
| 명제: 실수 $a,b$에 대하여 $a>1$ 이고 $b>1$이면 $a+b>2$ 이다. |
| ① 실수 a.b에 대하여 $a>1$이고 $b>1$이면 $a+b\le 2$이다.<br>반례: $a=2$, $b=3$ , $a+b=5\le 2$ (거짓)<br>② 실수 a.b에 대하여 $a\le 1$ 또는 $b\le 1$ 이면 $a+b>2$이다.<br>반례: $a=1$ , $b=1$, $a+b=2>2$ (거짓)<br>③ 실수 a.b에 대하여 $a\le 1$ 또는 $b\le 1$ 이면 $a+b\le 2$이다.<br>반례: $a=1$ , $b=3$ , $a+b=4\le 2$ (거짓)<br>④ 실수 a.b에 대하여 $a+b>2$이면 $a>1$이고 $b>1$이다.<br>반례: $a=3$ , $b=0$ , $a+b=3>2$ , $a>1$ , $b<1$ (거짓) |

[그림Ⅴ-7] G3 학생이 만든 거짓 명제

G3: 거짓 명제를 만드는 것은 어떤 것을 말하나요?
교사: 거짓 명제 만드는 것은 여러 가지 경우가 있죠. 만약에 $a<b$라는 조건이 있으면 $a>b$ 바꾸거나 $a\le b$ 이렇게 없는 조건을 추가하게 되면 어떻게 되겠지?
G3: 참이 안 되겠죠.
교사: 그렇지. 가정이나 결론의 조건의 변형은 거짓인 명제가 될 수 있을 거야.
G3: 아. 그렇구나. 그럼 할 수 있을 것 같아요.
중략
G3:: 그럼 선생님..우리가 배운 명제의 역도 참이 아닐 수 있잖아요. 그럼 그것도 생각해 볼까요?
교사: 그럼. 명제의 역의 진위가 명제의 진위와 항상 같다고 할 수 없으니까 좋은 방법이 되지.

이와 같이 G3의 학생은 가정의 조건과 결론의 조건을 바꾸거나 없는 조건을 추가해서 바꾸는 것이 처음 1차시는 거짓 명제를 2가지 정도밖에 만들지 못하였는데 2차시부터는 어려움이 없이 4가지를 모두 만들었다.

3) 인지적 영역 측면에서의 학생 반응

실험 수업 이후 명제의 진위판별과 거짓 명제에 대한 반례를 들어 거짓임을 설명하는 사후 검사를 실시하였다. 세 명의 학생들은 대체적으로 명제의 진위판별을 옳게 하고 거짓인 명제에 대해서도 반례를 들고 거짓임을 설명하였다. 사후검사는 사전검사보다 난이도가 높았지만 학생들은 모두 문제를 해결할 수 있었다. 이는 수업에서 명제의 조건을 살펴보고 조건을 변형시키는 활동을 통해 명제에 대해 잘 알 수 있었기 때문이라고 학생들은 입을 모은다. 그리고 거짓인 명제의 반례를 들고 명제를 반증하는 부분도 자연스럽게 표현할 수 있는 것도 발전된 변화라고 말한다.

교사: 어려운 것은 없었나요?
G1: 수업에서 만들어 보았던 것이라 생각하기가 조금 쉬웠어요.

G2: 이젠 명제 문제가 나오면 잘 풀 것 같은데. 예전엔 막연한 생각으로 참, 거짓을 말했는데 지금은 명제를 어떻게 보고 판단해야 하는지 조금 알 수 있는 것 같아요. 그래서 빨리 풀었어요.(하하)
G3: 예전엔 명제는 싫었는데. 지금도 너무 좋아진 건 아니지만 그래도 거부감은 많이 사라졌어요. 수업에서 해 봐서 그런지 익숙하기도 하고 내가 만든 것이 보여서 바로 반례를 찾았어요. 참, 수를 가지고 역수취하고 부호를 반대로 하고 해서 크기 비교하는 것도 지금은 잘 할 수 있을 것 같아요.

개별 인터뷰에서 G1학생은 명제에 주어진 조건이 어떻게 바뀌어질 때 명제가 거짓이 되는지를 알 수 있게 된 것을 긍정적으로 평가한다고 말하였다. G2학생은 수업을 통해 명제와 명제의 역을 학습하고 그 진위가 보존되지 않는다는 것을 얻었다는 것에 만족감을 표현했다. 또한 반례를 통해 사고의 확장을 경험하게 되고 조건의 수 범위에 따라 진위판별을 할 수 있게 되었다고 평가했다.

G3학생은 수의 범위, 명제의 기호에 집중하게 되었고 개념을 상기해서 명제를 이해하게 되었다고 한다. 하나의 반례가 아닌 다양한 반례를 생각하는 활동이 진위판별에 정확성을 가지게 되었고 이전의 명제를 이해하지 못하고 암기를 통해 기억하고 있었던 것에 반해 명제를 제대로 이해하는 기회가 되었다고 한다.

4) 정의적 영역 측면에서의 학생 반응

G1학생과 G2학생은 조건의 인식의 부족과 개념 형성이 잘 되어 있지 않아서 명제를 판별하는 데 어려움이 있었지만, 수업에서 거짓 명제 만들기를 하면서 조건에 변화를 주면서 명제의 진위판별을 생각해 보고 반례를 찾아보는 활동으로 인해 명제에 대해 자신감이 생겼다고 한다. G3학생 역시 여러 조건들을 이해하고 개념을 이해하는 능력이 생겨났다고 스스로 생각하고 있었다.

다. 하위 그룹 학생의 수업 결과 분석

1) 사전검사 결과

하위그룹의 사전검사지는 난이도가 비교적 낮은 수준의 명제로 구성하였다. 검사결과는 학생들이 비교적 쉬운 명제 진위판별은 잘 하고 있는 것으로 나타났다.

G1학생은 명제의 진위 판별에 있어 정확한 판단을 하고 있었다. 거짓인 명제에 대한 반례를 찾는 문제에 단순히 명제의 역을 기술해 놓은 답도 볼 수 있었다. 이는 반례의 정확한 의미를 인지하고 있지 못한 것으로 보인다. G2학생의 사전검사결과는 대부분 명제의 진위판별을 잘 했으나 명제 [$x$가 4의 배수이면 $x$는 2의 배수이다.]는 명제의 가정과 결론을 바꿔 생각해서 거짓인 경우로 생각하기도 하였다. 학생들이 명제에서 가정과 결론을 판단하지 못해 진위판별을 하지 못하는 경우의 예라고 볼 수 있다. 또한 G2학생 역시 반례의 뜻을 정확히 알고 표현하지는 못하였다. 반면, G3학생은 모든 명제에 대해 정확하게 진위판별과 거짓인 명제의 반례를 들어서 명제가 거짓임을 정확히 반증하고 있음을 볼 수 있었다.

2) 반례 활용 수업 사례

하위그룹의 학생들은 거짓 명제 만들기 활동을 6차시로 나누어 진행하였다. 처음에는 학생들이 어떻게 해 나가야 될지 몰라 어려움을 겪기도 하였다.

G1: 거짓 명제를 만드는 것을 어떻게 해야 될지 잘 모르겠어요.
교사: 지금 주어진 명제는 참이야 거짓인가요?
G2: 참이요.

교사: 명제는 가정과 결론이 나누어져 있죠?
학생들: 네.
교사: 그럼 가정의 조건이나 결론의 조건을 이것이 아닌 다르게 변형하면 거짓으로 바뀌겠지요.
G2: 아!
교사: 명제의 역은 명제가 참이면 항상 참인가요?
G1: 항상은… 거짓인 경우도 있었던 것 같아요.
교사: 맞아요. 항상 참이라고 할 수 없죠. 그럼 거짓 명제를 만드는 있어 명제의 역을 생각해 보는 것은 어떨까?
G3: 아 네. 그렇게 해 볼게요.

하위 그룹 학생들은 명제를 이해하는 부분에서 부족함도 보였고 거짓 명제를 만드는데 있어 수학적 문장의 속성을 생각하지 않고 주어진 명제와는 전혀 관계없는 문장을 만들거나 조건들을 의미 없이 변형한 경우도 있었다.

G1: 거짓 명제 만들기가 어려웠는데 이제 좀 어떻게 해야 할지 알겠어요. 또, 친구와 같이 얘기하면서 하니까 더 많은 것을 알게 되는 같기도 하구요.
G2: 거짓 명제 만드는 것은 어려워요. 하지만 조건을 바꾸고 예를 찾아보는 것은 재미있네요.
G3: 저도요. 그런데 전에 명제가 싫었는데 지금은 조금 알 것 같아요.

2차시까지는 학생들이 거짓 명제 만들기 활동의 의미를 잘 알지 못하고 있는 경우가 많았으나, 차츰 가정이나 결론의 조건을 변형하여 거짓 명제를 만드는 활동을 무리없이 해 나갔다. 예를 들어, G1학생은 [그림Ⅴ-8]처럼 두 수가 홀수가 됨을 두 수의 합으로 변형하는 명제도 만들었다. 두 수가 홀수이지만 합은 홀수가 되지 않음을 조건의 변형을 통해 얻을 수 있었던 것이다.

| |
|---|
| 명제: 두 자연수 $m$, $n$에 대하여 $mn$이 홀수이면 $m$과 $n$은 모두 홀수이다. |
| ② 두 자연수 m, n중 mn이 홀수이면 m+n도 홀수이다.<br>반례: m=1 n=3 1+3=4. |

[그림Ⅴ-8] G1 학생이 만든 거짓 명제

G2 학생은 1차시 수업 때는 거짓 명제를 어떻게 만들어야할지 어려워했지만 [그림Ⅴ-9]처럼 가정의 조건, 결론의 조건에서 부등호의 변화를 주고 거짓 명제를 만들어 나갔다.

| 명제: 실수 $a,b$에 대하여 $a<b<0$ 이면 $-\frac{1}{a} < -\frac{1}{b}$이다. |
|---|
| 1. 실수 a,b에대하여 $0<a<b$ 이면 $-\frac{1}{a} > -\frac{1}{b}$ 이다<br>반례: $a=3$ $b=10$ $-\frac{1}{3} < -\frac{1}{10}$ (×)<br>2. 실수 a,b에 대하여 $a<0<b$이면 $-\frac{1}{a} < -\frac{1}{b}$ 이다<br>반례: $a=-4$ $b=6$ $\frac{1}{4} > -\frac{1}{6}$ (×) |

[그림Ⅴ-9] G2 학생이 만든 거짓 명제

G3학생은 가정의 부정을 생각해서 만들었다고 하였는데, 이것은 부정에 대한 개념 오류로 볼 수 있다. 하지만 거짓 명제를 만드는 과정에서는 이것도 의미는 있어 보여 명제의 부정에 대한 개념만 수정할 수 있도록 하였다.

| 명제: 세 실수 $a,b,c$에 대해 $a>b>c>0$ 이면 $ab>bc$이다. |
|---|
| ① $a\le b\le c\le 0$. 이면 $ab\le bc$이다.<br>**반례:** $a=-5$ $b=-3$ $c=-1$, $15\ge 3$. |

[그림Ⅴ-10] G3 학생이 만든 거짓 명제

이와 같이 하위 학생들이 만든 거짓 명제의 수는 다른 그룹의 학생들보다 적었고 단순한 조건 변형을 통해 만든 것들이 많았다. 또한 거짓 명제 만들기를 어려워하는 모습도 보였고 명제에 대한 거부감도 나타냈다. 그러나 교사의 도움으로 가정의 조건을 변형해 보는 것으로 시작해서 학생 스스로 명제의 역과 부정으로 만들어 보고 반례도 찾아보는 활동을 무리 없이 잘 진행하였다.

3) 인지적 영역 측면에서의 학생 반응

사후 검사에서 세 학생 모두 어려움 없이 문제를 잘 해결해 나갔다. 이는 거짓 명제 만드는 활동을 통해 명제에 익숙해졌기 때문에 거짓 명제의 반례를 드는 것도 어렵지 않았다고 한다. 사전검사에서는 반례의 의미를 잘 알지 못했거나 반례가 아닌 설명을 해 놓은 경우가 있었던 것에 반해 사후 검사에서는 모두 정확한 진위판별과 반례를 들고 그 반례를 통해 거짓임을 반증하였다.

교사: 어려운 것은 없었나요?
G1: 지난번보다 조금은 쉬워진 것 같아요.
G2: 예전엔 어렵다는 생각이 먼저 들어서 별로 하기 싫었는데 지금은 재미있어요.
G3: 반례가 확실히 무엇인지 알게 돼서 좋아요. 시험에서도 명제 부분은 잘 풀 수 있을 것 같은데.

세 학생 모두 공통적으로 명제의 역을 이용해 거짓 명제를 만들고 반례를 찾는 것으로 인해 조건에서 수의 범위가 실수, 정수, 자연수 등 수의 범위를 생각해 볼 수 있었고, 명제의 역을 사용한 점 등이 명제단원의 개념 학습에 도움이 되었다고 하였다.

4) 정의적 영역 측면에서의 학생 반응

G1학생은 명제의 진위판별에서 그치지 않고 거짓 명제를 만들어 보는 활동에 재미와 흥미를 느꼈다고 하였다. 이런 활동이 평소 수업과 달라서 재미있었고 앞으로도 계속 했으면 좋겠다고 하였다. G2학생 역시 거짓 명제 만들기 활동을 통해 전에 어려웠던 명제가 쉽게 느껴졌고 자신도 명제 문제를 잘 풀 수 있다는 자신감도 생겼다고 대답하였다. G3 학생은 자신이 명제를 만든다는 것이 재미있고 신기했다고 말했다. 또한 차시가 진행됨에 따라 명제를 변화시키는 것이 쉽게 느껴졌을 뿐만 아니라 훨씬 더 빠르게 할 수 있었다고 대답하였다.

라. 결과 분석

세 그룹의 사전 검사 결과를 통해 학생들은 반례의 의미를 잘 알지 못하고 반례 표현에 서툴러서 거짓 명제를 반례를 들어 반증하는 것에 어려움을 겪는다는 것을 알았다. 그러나 사후 검사의 결과를 살펴보면 명제에 대한 정확한 진위판별과 더불어 반례 표현과 반례를 통해 거짓 명제의 반증을 할 수 있었다.

세 그룹의 반례 활용 수업에서의 주요 내용을 정리하면 다음과 같다.

먼저, 상위그룹에서 실시한 참인명제 만들기 활동은 다양한 반례 탐색을 통해 그 반례들을 모두 수용하거나 제거한다면 어떤 참인명제가 만들어질 수 있을 것인가 등의 사고를 할 기회가 되었다.

또한 거짓 명제 만들기 활동은 거짓 명제를 단순히 명제의 역과 이 만을 이용해 만드는 것이 아니라 조건의 변형을 통해 또 다른 수학적 개념과 연결하고 그 개념을 확장해 볼 수 있었다는 것에 의의를 둘 수 있다. 예를 들어, 거짓 명제를 만들 때 대수적 명제를 함수로 바라보고 다양한 함수로 접근하는 등의 창의적인 모습도 보였다는 것에 주목할 만하다. 상위 그룹의 학생들은 정의적 영역에서의 변화보다는 수학적 개념에 대한 깊은 사고의 경험에 학생 스스로 더 큰 의의를 두고 있었음이 나타났다.

둘째, 중상위 그룹에서는 인지적 영역과 정의적 영역 모두에서 긍정적 변화를 볼 수 있었다. 명제가 참이나 거짓이 되는 예를 생각하고 찾아보는 활동이 명제의 진위판별을 하는데 도움을 주었다고 한다. 또한 거짓 명제 만들기 활동은 명제를 단순히 암기하는 태도에서 벗어나 명제를 이해하고 조건을 여러 가지 형태로 변형하면서 생각할 수 있는 기회가 되었다. 예를 들어 수 범위를 확장하면서 수의 범위나 기호에 따라 참과 거짓이 됨을 인식할 수 있었고, 이를 통해 조건의 역할과 중요성을 인식하게 되었다.

셋째, 하위그룹에서는 반례 활용의 수업을 통해 명제에 대한 불안감이 감소하고 흥미가 행기는 등의 등 정의적 영역에서에의 변화에 주목할 수 있다. 학생 스스로 명제 단원에 친숙해졌고 명제를 더 잘 이해할 수 있는 기회가 되었다고 하였다. 반례에 대한 개념의 정확한 이해를 돕고 관련된 개념을 다시 생각해 보는 활동으로 명제에 대한 흥미와 불안감을 없애는 등 정의적 영역에까지 영향을 주었다는 것에 의의를 둘 수 있다.

네 번째, 이 실험수업을 통해 교사교육에서의 시사점도 나타났다. 이러한 활동을 하는 데 있어서 명제에 따라서는 단순히 수 집합을 변형하는 것이 가정과 결론의 조건과는 의미가 맞지 않는 경우도 있었기 때문에 거짓 명제를 만들기 활동 전에 명제의 가정과 결론의 조건을 충분히 인지하고 개념을 파악한 후 조건들을 변형하는 등의 활동을 해야 할 것이다. 또한 반례교육은 학습자의 수학적 수준에 따라 교수학적으로 달라야 한다고 한다 (Zazkis & Chernoff, 2008). 따라서 교사들은 어떤 반례가 학습자의 학습 상황에서 적절한지를 충분히 고민해야 할 필요가 있다.

## Ⅵ. 결론

반례를 찾는 활동을 통해 이전의 추측에서는 생각하지 못한 부분을 생각해 보게 함으로써 사고의 엄밀성을 강화시킬 수 있고 결과에 이르게 된 과정이나 관련된 지식과 개념을 다시 생각해 보는 의미 있는 활동이 가능

하다(Klymchuk, 2008).

본 연구는 참인 명제에 대해서는 명제를 변형하여 거짓 명제를 만들어 보는 활동, 거짓 명제에 대해서는 다양한 반례를 찾고 그 반례를 탐구하여 참인 명제를 만들어 보는 활동을 통해 명제에 대한 유연한 사고 경험과 명제를 깊이 있게 수학적으로 탐구할 수 있는 기회를 제공하고자 하였다. 실험수업으로 실시한 세 그룹 모두 거짓 명제 만들기의 활동을 통해 조건에서 보이는 수학적 개념들을 상기하고 조건의 연결성에 주목하며 반례를 창출해 내는 활동을 경험하였다. 이를 통해, 전에는 보지 못했던 조건에서의 세부적인 기호나 수의 범위 등 까지도 인지할 수 있었고 명제에 대한 개념변화와 문제를 해결하는 도구(Zazkis & Chernoff, 2008).로서 역할을 하였다고 판단할 수 있다.

또한 단순한 반례를 제시하는 것에서 그치지 않고, 다양한 반례들을 탐구하여 반례들을 제거하고 수용하는 과정에서 다양한 수학적 개념의 엄밀한 정의와 그에 따른 정리까지 생각해 볼 수 있었다. 예를 들어 크기 보존에 대한 명제를 대수적으로 생각하기도 하고 함수로 접근하기도 하면서 다양한 거짓 명제를 만들기도 하였다. 이것은 Klymchuk(2008)이 말한 거짓 명제 구성에 창의성이 나타나는 부분이라고 해석할 수 있고 또한 반례학습이 수학에서 논리적 사고 학습에 효과적이라는 주장(Mason & Klymchuk, 2008)을 뒷받침해주는 결과라 할 수 있다.

# 참 고 문 헌

강문봉 (1993). Lakatos의 수리철학과 교육적 연구. 서울대학교 박사학위논문.

Kang, M. (1993). (An) *educational study on the Lakatos's philosophy of mathematics.* Ph.D. Thesis, Seoul National Universuty, Seoul, Republic of Korea.

김남희 외 (2006). 수학교육과정과 교재연구. 서울 : 경문사.

Kim, N., Na, G., Park, K., Lee, K.., Jung, Y. & Hong, J. (2006). *Mathematics Curriculum and Instructionanl Material Studies.* Kyungmoonsa Publishers, Seoul.

김창동 외 (2014). 고등학교 수학Ⅱ. 서울 : 교학사.

Kim, C., Chang, K., Kim, E., Moon, K., Lee, B., Lee, C., Cha, S., Park, Y., Lee, S., Jung, J., Lee, B., Kim, S., Ju, J., Kwon, P. & Jang, I. (2014). *Mathematics II for High Schoo*l. Kyohaksa Publishers, Seoul.

김창동 외 (2014). 고등학교 미적분Ⅰ. 서울 : 교학사.

Kim, C., Chang, K., Kim, E., Moon, K., Lee, B., Lee, C., Cha, S., Park, Y., Lee, S., Jung, J., Lee, B., Kim, S., Ju, J., Kwon, P. & Jang, I. (2014). *Calculus I for High School.* Kyohaksa Publishers, Seoul.

마효원 (2013). 고등학교 미분 단원의 증명 수업에 Lakatos의 증명과 반박을 이용한 수학적 발견술 적용 방안. 고려대학교 석사학위논문.

Ma, H. (2013). *A Study on Application of Mathematical Heuristics using Lakatos´a proof and refutation in the Differential Section in high school.* Master's Thesis, Korea university, Seoul. Republic of Korea.

박경미 (2009). Lakatos의 증명과 반박 방법에 따른 기하 교수-학습 상황 분석 연구. 학교수학, 11(1), 55-70.

Park, K. (2009). A Research on the Teaching and Learning of Geometry Based on the Lakatos Proofs and Refutation Method. *School Mathematics,* 11(1), 55-70.

박교식 (2003). (고등학교) 수학용어 다시보기. 서울 : 수학사랑.

Park, G. (2003). *(For high school) Mathematics Terminology.* Mathlove, Seoul.

박남연 (2010). Lakatos의 증명과 반박을 적용한 고등학교 순열과 조합 단원의 지도에 관한 연구. 부산대학교 석사학위논문.

Park, N. (2010). (A) *Study on Application of Lakatos Method in Teaching Permutation and Combination*. Master's Thesis, Pusan National university, Pusan, Republic of Korea.

박희정 (2012). 문제 만들기 활동 수업이 중위권 학생의 학업 성취도 및 수학적 태도에 미치는 영향. 고려대학교 석사학위논문.

Park, H. (2012). *Effects of teaching with Mathematical Problem-Posing Activities on Academical Achievement, Learning Attitude for middle grade students: Focusing on a Function of high school*. Master's Thesis, Korea university, Seoul. Republic of Korea.

송승화 (2009). 고등학교 1학년 학생들의 대수와 기하영역에서 반례 제시 능력 실태조사. 한국교원대학교 석사학위논문.

Song, S. (2009). (A) *Study on Tenth Graders' Ability to Present Counter Examples in Algebra and Geometry Sections*. Master's Thesis, Korea National University of Education, Chungbuk. Republic of Korea.

신항균 외 (2014). 고등학교 수학Ⅱ. 서울 : 지학사.

Shin, H., Lee, K., Park, S., Shin, Y., Lee, G., Kin, J., Park, M., Yoon, J., Park, S., Seo, W., Jun, J. & Lee, D. (2014). *Mathematics Ⅱ for High School*. Jihaksa Publishers, Seoul.

신항균 외 (2014). 고등학교 미적분Ⅰ. 서울 : 지학사.

Shin, H., Lee, K., Park, S., Shin, Y., Lee, G., Kin, J., Park, M., Yoon, J., Park, S., Seo, W., Jun, J. & Lee, D. (2014). *Calculus Ⅰ for High School*. Jihaksa Publishers, Seoul.

오혜미・권오남 (2014). 고등학교 수학 교과서에서의 반례에 대한 학습가능성 탐색. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 53(1), 41-55.

Oh, H., Kwon, O. (2014). An investigation in learnability of counter-examples in secondary school mathematics textbooks. *The Mathematical Education*, 53(1), 41-55.

이강섭 외 (2014). 고등학교 수학Ⅱ. 서울 : 미래엔 교과서.

Lee, K., Hwang, S., Kin, B., Shim, S., Wang, G., Song, K., Kim, J., Kim, K., Joo, C., Yang, I., Cha, J., Jung, J., Kim, W., Cho, B. & Kim, W. (2014). *Mathematics Ⅱ for High School*. Mirae N Publishers, Seoul.

이강섭 외 (2014). 고등학교 미적분Ⅰ. 서울 : 미래엔 교과서.

Lee, K., Hwang, S., Kin, B., Shim, S., Wang, G., Song, K., Kim, J., Kim, K., Joo, C., Yang, I., Cha, J., Jung, J., Kim, W., Cho, B. & Kim, W. (2014). *Calculus Ⅰ for High School*. Mirae N Publishers, Seoul.

이동환 (2014). 학교 수학에서 반례 활용 방안 연구. 서울대학교 석사학위논문.

Lee, D. (2014). *A study on the utilization of counterexamples in school mathematics*. Master's Thesis, Seoul National Universuty, Seoul, Republic of Korea.

이정곤 (2012). 예비교사 교육에서 If-Not-What-Yes와 What-If-For를 통한 반례 생성과 명제의 정교화. 한국교원대학교 박사학위논문.

Lee, J. (2012). *Generating Counter-example for Refinement of Statements on If-Not-What-Yes and What-If-For : For Pre-service Teachers' Mathematics Education*. Ph.D. Thesis, Korea National University of Education, Chungbuk. Republic of Korea.

이정곤・류희찬 (2011). 예비 교사들을 대상으로 한 증명활동과 반례 생성 수행결과 분석 : 수열의 극한을 중심으로. 수학교육학연구, 21(4), 379-398.

Lee, J., Lew, H. (2011). Preservice Teachers' Writing Performance Producing Proofs and Counterexamples about Limit of Sequence. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 21(4), 37-398.

이준열 외 (2014). 고등학교 수학Ⅱ. 서울 : 천재교육.

Lee, J., Choi, B., Kim, D., Hyun, D., Jun, Y., Jang, H., Cho, S., Cho, S., Hwang, S. & Park, S. (2014). *Mathematics Ⅱ for High School.* Chunjae Publishers, Seoul.

이준열 외 (2014). 고등학교 수학Ⅱ 교사용지도서. 서울 : 천재교육.

Lee, J., Choi, B., Kim, D., Hyun, D., Jun, Y., Jang, H., Cho, S., Cho, S., Hwang, S. & Park, S. (2014). *(For Teacher) Mathematics Ⅱ for High School.* Chunjae Publishers, Seoul.

이준열 외 (2014). 고등학교 미적분Ⅰ. 서울 : 천재교육.

Lee, J., Choi, B., Kim, D., Hyun, D., Jun, Y., Jang, H., Cho, S., Cho, S., Hwang, S.& Park, S. (2014). *Calculus Ⅰ for High School.* Chunjae Publishers, Seoul.

이지혜·손희림·김성경 (2013). 중학교 1학년 교과서에서 다각형에 관한 예 분석 연구. 학교수학, **15(4)**, 743-758.

Lee, J., Son, H., Kim, S. (2013). An Analysis on the Examples of Polygons in the 1st Grade Middle School Mathematics Textbooks. *School Mathematics*, **15(4)**, 743-758.

우정호 외 (2014). 고등학교 수학Ⅱ. 서울 : 동아출판사.

Woo, J., Park, K., Lee, J., Park, K., Kim, N., Lim, J., Kwon, S., Nam, J., Kim, J., Kang, H., Lee, H., Park, J., Jun, C., Oh, h., Kim, S., Seol, E., Hwang, S., Kim, M., Choi, I., Ko, H., Lee, J., Choi, E., Kim, K., Yun, H. & Chun, H. (2014). *Mathematics Ⅱ for High School.* Donga Publishers, Seoul.

우정호 외 (2014). 고등학교 미적분Ⅰ. 서울 : 동아출판사.

Woo, J., Park, K., Lee, J., Park, K., Kim, N., Lim, J., Kwon, S., Nam, J., Kim, J., Kang, H., Lee, H., Park, J., Jun, C., Oh, h., Kim, S., Seol, E., Hwang, S., Kim, M., Choi, I., Ko, H., Lee, J., Choi, E., Kim, K., Yun, H. & Chun, H. (2014). *Calculus Ⅰ for High School.* Donga Publishers, Seoul.

정상권 외 (2014). 고등학교 수학Ⅱ. 서울 : 금성출판사.

Jung, S., Lee, J., Park, H., Hong, J., Park, B., Choi, H., Min, J. & Kim, H. (2014). *Mathematics Ⅱ for High School.* Kunsung Publishers, Seoul.

정상권 외 (2014). 고등학교 미적분Ⅰ. 서울 : 금성출판사.

Jung, S., Lee, J., Park, H., Hong, J., Park, B., Choi, H., Min, J. & Kim, H. (2014). *Calculus Ⅰ for High School.* Kunsung Publishers, Seoul.

정세연 (2009). 고등학교 1학년 학생들의 명제 이해에 관한 연구. 한국교원대학교 석사학위논문.

Jung, S. (2009). *(A) Study on the Understanding of Proposition for the First Grade Students in the High School.* Master's Thesis, Korea National University of Education, Chungbuk. Republic of Korea.

정은경 (2007). 수리 철학적 분석을 통한 증명지도의 방향 탐색. 인하대학교 석사학위논문.

Jumg, E. (2007). *The search for the direction of the teaching method of proofs based on mathematics philosophy.* Master's Thesis, Inha University, Incheon. Republic of Korea.

정지현 (2013). 명제 단원 문제 만들기 활동이 고등학생의 수학 학업성취도와 수학적 성향 및 학습태도에 미치는 효과. 경북대학교 석사학위논문.

Chung, J. (2013). *The Effect of the Problem Generating Programs of the Unit of Proposition On Mathematical Academic Achievement, Tendency and Learning Attitude For High School Students.* Master's Thesis, Kyungpook National University, Kyungpook. Republic of Korea.

정혜윤 (2012). 수학적 문장의 조건 조작에 따른 반례 찾기에 관한 연구. 서울대학교 석사학위논문.

Jung, H. (2012). *A study on the activity of finding counterexamples to a mathematical statement manipulated to miss a certain condition.* Master's Thesis, Seoul National University of Education, Seoul. Republic of Korea.

정혜진 (2010). 고등학교 1학년 학생들의 명제 이해 능력 실태조사. 한국교원대학교 석사학위논문.

Jung, H. (2010). *A Survey on the Understanding Abilities of Proposition for High School 1st Grade Students.*

Master's Thesis, Korea National University of Education, Chungbuk. Republic of Korea.
하현철 (2011). Lakatos의 증명과 반박의 원리를 활용한 교수-학습 상황에서 고등학교 1학년 학생들의 수학적 사고. 한국교원대학교 석사학위논문.
Ha, H. (2011). *A Study of High School Students' Mathematical Thinking on the Application of Lakatos' Proof and Refutation*. Master's Thesis, Korea National University of Education, Chungbuk. Republic of Korea.
황선욱 외 (2014). 고등학교 수학Ⅱ. 서울 : 좋은책 신사고.
Hwang, S., Kang, B., Kim, Y., Yun, G., Kim, S, Song, M., Lee, S., Do, J., Lee, M., Park, H. & Park, J. (2014). *Mathematics Ⅱ for High School*. Sinsago Publishers, Seoul.
황선욱 외 (2014). 고등학교 미적분Ⅰ. 서울 : 좋은책 신사고.
Hwang, S., Kang, B., Kim, Y., Yun, G., Kim, S, Song, M., Lee, S., Do, J., Lee, M., Park, H. & Park, J. (2014). *Calculus Ⅰ for High School*. Sinsago Publishers, Seoul.
George Polya (2005). 수학적 발견(Ⅱ). (우정호 외 옮김). 서울 : 교우사
Klymchuk, S.(2008). Using Counter-Example to Enhance Learners' Understanding of Undergraduate Mathematics. *Good Practice Publication Grants*. 1-9.
Komatsu, K. (2010). Counter-examples for refinement of conjectures and proofs in primary school mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, 29(1), 1-10.
Ko, Y. Y. & Knuth, E. (2009). Undergraduate Mathematics Majors' writing performance producing proofs and counterexamples about continuous functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 28(1), 68-77.
Lakatos, I. (2001). 수학 발견의 논리. (우정호 역). 서울 : 아르케. (원서출판1976)
Mason, J. & Klymchuk, S. (2009). *Using counter-examples in calculus*. London : Imperial College Press.
National Council of Teachers of Mathematics(NCTM). (2007). 학교수학을 위한 원리와 규준. (류희찬, 조완영, 이경화, 나귀수, 김남균, 방정숙 옮김). 서울 : 경문사 (원서출판 2000).
Peled, I. & Zaslavsky, O. (1997). Counter-Examples That (Only) Prove and Counter-Examples That (Also) Explain. *Focus on Learning Problems in Mathematics Summer Edition*, 19(3), 49-61.
Zazkis, R. & Chernoff, E. J. (2008). What makes a counterexample exemplary?. *Educational Studies in Mathematics*, 68(3), 195-208.

# A Study on the Development of Teaching Materials about Utilizing Counterexmples Focusing on Proposition in High School

**Oh, Se Hyun**
Taejang High School, Suwon, 166-98, Korea
E-mail : hystella@hanmail.net

**Ko, Ho Kyoung†**
Graduate School of Education, Ajou University, Suwon, 443-749, Korea
E-mail : kohoh@ajou.ac.kr

Theory and fundamentals of mathematics consist mostly of proposition form. Activities by research of the proposition which leads to determine the true or false, justify the true propositions and refute with counterexample improve logical reasoning skills of students in emphases on mathematics education. Also, utilizing of counterexamples in school mathematics combines mathematical knowledge through the process of finding a counterexample, help the concept study and increase the critical thinking. These effects have been found through previous research. But many studies say that the learners have difficulty in generating counterexamples for false propositions and materials have not been developed a lot for the counterexample utilizing that can be applied in schools. So, this study analyzed the current textbook and examined the use of counterexamples and developed educational materials for counterexamples that can be applied at schools. That materials consisted of making true & false propositions and students was divided into three groups of academic achievement level. And then this study looked at the change of the students' thinking after counterexample classes.

As a study result, in all three groups was showed a positive change in the cognitive domain and affective domain. Especially, in top-level group was mainly showed a positive change in the cognitive domain, in upper-middle group was mainly showed in the cognitive and the affective domain, in the sub-group was mainly found a positive change in the affective domain. Also in this study shows that the class that makes true or false propositions in education of utilizing counterexample, made students understand a given proposition, pay attention to easily overlooked condition, carefully observe symbol sign and change thinking of cognitive domain helping concept learning regardless of academic achievement levels of learners. Also , that class gave positive affect to affective domain that increase interest in the proposition and gain confidence about proposition.

* ZDM classification : B5, C9
* 2000 Mathematics Classification : 97C70
* key words : counterexample, exploring, counterexamples, making true and false proposition
† corresponding author