韓國數學敎育學會誌 시리즈 E <數學敎育 論文集>
http://dx.doi.org/10.7468/jksmee.2016.30.3.335
제 30집 제 3호, 2016. 9. 335-351

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 30, No. 3, Sep. 2016. 335-351

'페르마 점'을 활용한 중학교 수학 영재 교수·학습 자료 개발 및 적용1)

윤 준 호 (한국교원대학교 대학원)
윤 종 국 (한국교원대학교)†

본 연구의 목적은 '페르마 점'을 활용하여 중학교 일선에서 영재 교육을 담당하고 있는 영재 담당 교사들을 위한 교수·학습 자료를 개발하고 그 적용 사례를 분석하는 것이다. 이를 위해 연구자는 먼저 영재 교수·학습 모형, 영재프로그램의 유형에 관한 문헌을 고찰한 후 교수·학습 자료의 소재 및 주제로 페르마 점을 선정하고 이에 대한 교수·학습 자료를 개발하였다. 개발한 자료를 현장에 적용한 후 수업에 대한 피드백을 통해 자료를 수정·보완하였으며 이를 현장에 적용하였을 때 나타나는 학생들의 수학적 사고과정을 분석하였다.

Ⅰ. 서론

제3차 영재교육진흥종합계획에 의하면 우리나라 영재교육 수혜자는 2012년 1.76%로 이미 수혜목표치 1%를 초과달성한 상황이다. 이와 같이 영재교육의 양적 팽창이 많이 이루어진 상황에서 이제는 영재교육의 양적·질적 측면에서의 균형적 확대가 필요하고, 질적 성장을 위해서는 영재교육 담당교원 및 일반교원의 연수기회 확대 및 다양한 영재교육 프로그램 개발 및 보급 등이 필요하다.

특히 영재교육이 원활히 운영되고 질적으로 향상되기 위해서는 실제로 운영할 수 있는 수학영재 교수·학습 자료의 개발이 중요하다. 그러나 영재교육을 위해 개발된 자료들은 데이터베이스화가 잘 되어있지 않고 공개되지 않는 것도 많다. 또한 실제 영재교육이 이루어지는 많은 곳에서 매년 새로운 주제나 최신의 이론을 토대로 새로운 수업자료를 개발하는 것은 쉽지 않기 때문에 연구자가 소속되어 있었던 영재교육원에서도 대부분의 교사들은 기 개발된 자료를 그대로 인용하거나 약간의 수정만으로 수업을 진행하였다. 이렇게 이전에 개발되어 있던 자료들은 내용이 서로 중복되거나 새롭게 바뀌는 학교교육과정과 맞지 않는 부분도 있으므로 지속적인 수학영재 교수·학습 자료 개발의 필요성이 중요하다.

이와 같은 맥락에서, 평면에 주어진 세 점 A,B,C에 대하여 $\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CP}$의 합이 최소가 되는 점 P 즉, 페르마 점은 그 자체로도 수학적으로 흥미 있는 문제이기도 하지만 통신, 칩 디자인, 컴퓨터 공학 등 응용 가능성의 범위 또한 넓어서 아주 매력적인 주제이다. 페르마 점의 최소성은 삼각형의 합동조건과 정삼각형의 성질, 원에 외접하는 사각형의 성질 등 다양한 도형의 성질을 활용하여 증명되는 문제이므로 학습자의 폭넓은 사고를 유도할 수 있다. 또한 중학교 1학년 수준의 작도 지식만으로도 얼마든지 페르마 점을 작도할 수 있고 페르마 점의 개념을 일반화하여 스타이너 트리(Steiner tree)로의 확장 까지 사고해 볼 수 있어 영재교육 자료로서 많은

* 접수일(2016년 5월 4일), 심사(수정)일(1차: 2016년 8월 5일, 2차: 2016년 8월 13일), 게재확정일(2016년 9월 8일)
* ZDM분류 :D40, U30
* MSC2000분류 : 97D40
* 주제어 : 페르마 점, 수학영재
† 교신저자 : jgyun69@knue.ac.kr
1) 본 논문은 윤준호(2016)의 석사학위 논문을 요약정리 한 것임.

가치를 지니고 있다.

페르마 점을 활용한 기존의 연구들을 살펴보면, 먼저 윤경원(2013)은 수학-과학 통합수업의 소재로 페르마 점을 이용하여 과학고등학교 1학년 3명을 대상으로 수업을 하고 이때 나타나는 학생들의 수학적 사고를 분석하였다. 페르마 점의 정당화과정을 수학적, 과학적으로 각각 접근 해보는 과정에서 나타나는 학생들의 사고를 귀납적, 연역적, 유추적, 비판적 사고를 중심으로 분석하였다. 또 하현철(2011)은 Lakatos의 증명과 반박의 원리를 활용한 교수학습 상황에서 나타나는 학생들의 수학적 사고를 관찰하기 위해 고등학교 1학년 4명을 대상으로 페르마 점을 찾는 문제를 이용하였다.

영재 수업 또는 영재 학생을 위한 자료로 페르마 점을 활용한 연구는 검색결과 많이 나타나지 않았고, 한국교육개발원에서 개발한 자료에도 페르마 점을 활용한 교수·학습 자료는 검색되지 않았다. 페르마 점이 교육과정에 포함된 내용이 아니고 그 증명과정에서 다양한 수학적 내용을 다룰 수 있기 때문에 주로 상위학년을 위한 교수·학습에 많이 이용되고 있고 검색된 위의 두 연구도 고등학생을 대상으로 한 연구였기 때문에 중학교 영재도 학습 가능한 교수·학습 자료가 필요하다고 생각된다. 또 위의 두 연구는 주로 페르마 점의 정당화 과정에서 나타나는 학생들의 수학적 사고를 분석한 것으로 페르마 점을 활용한 다른 내용이나 활동에 대한 부분이 부족하다.

이에 본 연구는 페르마 점을 활용하여 중학생을 위한 수학 영재 교수·학습 자료를 개발하고자 한다. 그리고 개발한 교수·학습 자료가 중학생의 영재 교육 현장에서 활용될 수 있도록 실제 수업에 적용하여 수업 상황에서 학생들의 수학적 사고과정이 어떠한지를 분석해 보고자 한다. 이에 다음과 같은 연구문제를 설정하였다.

1. 페르마 점 문제를 활용한 중학교 수학 영재 교수·학습 자료를 어떻게 구성할 것인가?
2. 페르마 점 문제를 활용한 수학 영재 교수·학습 자료의 적용 과정에서 나타난 중학교 영재 학생들의 수학적 사고과정은 어떠한가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. 영재 교수·학습 모형

영재 학생들의 창의성, 도덕성, 자기 주도적인 학습력 등을 육성하고, 학습에 대한 흥미를 유발하면서 개개 학생들의 학습 양식에 적합한 수업 방법을 사용하며, 학생들의 능력과 자질을 고려한 개별화된 수업을 실시하기 위해서는 적합한 교수·학습 방법을 사용해야 한다(구자억 외, 1999). 영재 교수·학습 방법 모형 및 방법으로 제시되고 있는 것들 중에서 가장 널리 쓰이는 Renzulli의 삼부심화학습 모형(Enrichment Triad Model)은 소수 영재들만을 대상으로 하던 영재교육 개념에서 벗어나 보다 많은 학생들을 대상으로 하는 영재교육을 시도하며, 학교 전체 교육의 질 향상을 도모하고 있다는 점에서 높이 평가되고 있으며, 여러 영재교육과정 모형 중 가장 널리 활용되고 있다.

삼부심화학습 모형은 1단계 심화인 일반적인 탐색 활동(general exploratory activities), 2단계 심화인 집단 훈련 활동(group training activities), 그리고 마지막으로 3단계 심화인 개인 또는 소집단의 실제 문제 해결 및 연구 활동(individual & small group investigations of real problems)으로 구성된다. 1단계 심화인 일반적인 탐색 활동 단계에서는 정규 수업에서 다루지 않는 다양한 주제와 흥미로운 분야를 학생들이 접하게 함으로써 폭넓은 지식의 영역으로 초대한다. 이와 같은 1단계 심화 활동이 ‘내용’ 위주의 심화 학습이라면, 2단계 심화 활동은 ‘방법’을 보다 중요시하는 전략적인 심화 학습이 이루어지는 단계라고 할 수 있다. 이 단계는 다양한 소집단 단위의 프로그램을 통해 1) 사고력, 창의력 및 문제해결력, 2) 학습 기능 및 연구 기능(청취, 관찰, 인터뷰, 설문, 자료

분석 및 해석 등), 3) 참고 자료 활용 기능, 4) 다양한 의사소통 기능의 계발과 향상을 목표로 한다.

3단계는 상당한 수준의 창의력, 지적 능력, 그리고 과제 집착력이 요구되기 때문에 주로 소수의 영재들이 대상이 된다. 개인이나 소집단 중심으로 이루어지는 3단계 심화 활동은 Renzulli의 삼부심화 학습 모형에서 가장 핵심적인 활동이며, 영재 학생들의 잠재 능력을 계발시킬 수 있는 가장 적합한 학습 방법 중 하나로 평가된다.

2. 수학영재 프로그램의 유형

수학적으로 특수한 재능을 가진 학생들에게 가장 가치가 있는 그리고 그들의 호기심과 흥미와 지적 욕구를 충족시켜 줄 수 있는 내용의 수학은 어떤 것인가에 대한 대답은 판단하기가 매우 어렵다. 다만 지금까지 국내외에서 이루어지고 있는 학습 프로그램의 내용을 분석하여 3가지로 분류한다면, 문제 해결형 프로그램, 주제 탐구형 프로그램, 과제(Project)해결형 프로그램으로 나눌 수 있다. 이들 프로그램의 공통적인 성격은 학생들의 창의적인 사고력의 개발에 있으며, 프로그램 사이의 명확한 구별은 어려우나 다음과 같은 특징이 있다(남승인, 2000).

① 문제 해결형 프로그램

정규 수학 교육과정의 연장선상에서 이루어지는 프로그램으로 이미 학습한 내용에 대한 통합 및 이를 심화·발전시킬 기회의 제공, 보다 창의적이고 다양한 문제 해결 전략의 개발, 수학에 대한 이해의 촉진과 확장, 지적 호기심 및 도전의식의 자극을 통한 수학적 재능을 개발하는 것을 목적으로 한다.

② 주제 탐구형 프로그램

교과 내용과 연계된 과제에 대해서 귀납적 또는 연역적 탐구활동을 통해 학생이 주체가 되어 학생 스스로 수학적 개념과 원리·법칙 등을 일반화할 수 있는 기회의 제공, 기존의 문제 해결 접근 방법과 달리 학생들이 독창적인 탐구활동을 통해 새로운 문제 해결 전략의 일반화 및 수학적 원리와 법칙의 창안과 확장에 초점을 둔다.

③ 과제 해결형 프로그램

학생 개개인이 갖고 있는 기존의 범교과적인 모든 지식과 도구를 활용하여 비교적 장기간에 걸쳐서 실생활과 관련된 독립된 문제를 해결하는 과정에서 보다 고차적인 수학적 사고력과 창의적인 아이디어를 개발·신장시키고자 하는 프로그램이다.

3. 수학적 사고과정

여러 가지 수학적 사고 기능 및 전략 중에서 황혜정(2001)은 ①기초적 사고 기능으로 관찰, 비교, 분류, 분석. ②발달적 사고 기능으로 귀납적 사고, 연역적 사고, 유추적 사고. ③복합적 사고 기능으로 비판적 사고와 창의적 사고 등의 평가요소를 탐색하였으며 이와 같은 분류의 기준은 수학 교과에서 올바른 수학적 개념의 이해 및 문제해결 상황에서 요구되는 중요한 사고 기능 및 전략으로 판단되었기 때문이라고 밝히고 있다(윤경원, 2013 재인용). 본 연구에서는 페르마 점을 이용한 수업을 통해서 나타나는 학생들의 수학적 사고를 황혜정(2001)의 분류에 따라 기초적 사고, 발달적 사고, 복합적 사고 중에서 비판적 사고를 중심으로 분석하고자 한다.

① 기초적 사고

우리가 첫 번째로 정보를 습득하는 가장 기본적인 방법은 관찰이다. 관찰은 단지 우리의 감각을 통해서 얻어지는 정보라 할 수 있다. 이처럼 관찰이 언뜻 보기에는 매우 직접적이고 간단한 기능 같아 보이지만, 자칫 잘못하면 경험, 감정, 지적 성향, 예측 등에 의해서 관찰 결과가 여과되거나 왜곡될 수 있기 때문에 관찰은 정확하면서도 구조적이고 포괄적이어야 한다. 이와 같이, 주어진 대상을 전체적, 구조적으로 보기 위해서는 확인, 차이, 유사성, 3변별 등의 관찰 능력 요소가 갖춰져야 한다(황혜정, 2001).

② 발달적 사고

관찰을 기초로 그것을 확대시켜 어떤 결론에 이르는 것이 추리이다. 추리는 이유들 사이의 관계를 규칙에 따라 '추론'하고 결론에 이르기 위한 것으로, 이러한 논리적 추론(추리)에는 '귀납'과 '연역'이라는 두 가지의 강력한 방향성이 있다. 연역 추리는 일반적인 형태에서 시작하여 어떤 구체적인 것에 대한 결론에 이르는 것을 말하며, 귀납추리는 몇 몇 경험을 통해 거기에서 일반적인 법칙을 발견 하거나, 그 법칙을 얻기 위해 자료를 모아 일반적인 법칙을 추구해 나아가는 것을 말한다. (황혜정, 2001).

③ 비판적 사고

비판적 사고는 주어진 상황이나 문제에 대하여 그에 관한 모든 것을 조사하고 상호 관련성을 파악하고 평가하는 사고이며, 이는 더 낫게 더 합리적으로, 그리고 더 생각해 보고 판단하기 위함이다. 따라서 비판적 사고는 학습하는 내용을 보다 깊게 이해하고, 그 내용을 따져보고 사정해 보고, 그것을 확대, 적용해 보도록 하는 과정을 거치면서 향상될 수 있는 기능이라 할 수 있다.(황혜정, 2001).

Ⅲ. 연구방법 및 절차

1. 교수·학습 자료 개발의 방향

영재 교수·학습 자료 개발은 다음과 같은 순서로 이루어졌다. 첫째, 교육 대상자 및 교육의 목표를 확인한다. 영재 학생들의 수준과 교육과정을 고려하여 교육 대상자를 선정하고 가르치고자 하는 것이 무엇인지를 분명히 한다. 둘째, 교수·학습 자료 개발을 위한 소재 및 주제 발굴이다. 흥미와 호기심을 불러일으키면서도 지속적인 성취감을 줄 수 있는 소재를 선정하되 속진보다는 심화학습에 비중을 두고 주제를 발굴한다. 셋째, 교수·학습 자료의 유형 및 모형을 결정한다. 선정된 소재 및 주제를 이용하여 교수·학습 자료를 만들기 위해 가장 적절하고 효과적인 교수·학습 자료의 유형 및 교수·학습 모형을 선택한다. 한국교육개발원에서 개발된 자료는 거의 Renzulli의 삼부심화학습의 모형으로 구성하고 있다. 본 자료 또한 영재 교수·학습 자료의 모형으로 가장 많이 쓰이는 Renzulli의 삼부심화학습 모형이 적합하다고 판단하였다.

Renzulli의 삼부심화학습 모형은 일반적 탐색(1부), 사고기능의 훈련(2부), 자기주도적인 탐구활동(3부)로 이루어져 있다. 1단계 일반적 탐색단계에서는 삼각형의 성질에서 학습한 내용을 상기하고 실생활에서 활용되는 부분을 접한 다음 페르마 점의 도입을 위한 문제를 탐색하고자 한다. 2단계 사고기능의 훈련단계에서는 페르마 점의 작도와 성질과 관련한 과제를 통하여 사고력, 문제해결력, 의사소통 기능의 계발과 향상을 목표로 한다. 3단계 자기주도적 탐구활동에서는 이상 학습한 내용으로 네 점에서의 페르마 점을 각자 구성해보고 그 방법에 대해 연구 활동을 할 수 있도록 구성하고자 한다.

2. 연구 대상

개발된 교수·학습 자료로 수업이 가능한 연구 대상은 삼각형의 외심, 내심, 무게중심 등에 관한 사전 지식 혹은 이 개념들을 이해하고 활용할 수 있는 사고 수준의 학생이므로 교육과정상 중학교 2학년 과정을 이수한 학생이다. 이에 중학교 3학년 학생들을 대상으로 각각 1차, 2차 현장 적용이 이루어졌다. S시 교육청 영재교육원 중학교 3학년 학생 9명을 대상으로 1차 적용을 하였고, 1차 적용한 내용을 토대로 자료를 수정, 보완하여 B시 S 교육청 소속 D중학교 영재학급 3학년 5명을 대상으로 2차 적용을 하였다.

3. 수업일정 및 자료 수집

본 연구에서는 개발된 교수·학습 자료의 현장 적용을 통한 오류 여부, 적합성 등을 알아보기 위하여 참여관찰, 면담, 기록물을 통하여 자료를 수집하였으며 모든 수업과정은 동영상 촬영으로 기록하였다. 본 연구를 위한 실험수업 일정은 <표 Ⅲ-1>과 같다.

<표 Ⅲ-1> 실험수업 일정

일시	대상
2015.06.20.(토) 09:00 - 12:30	S시 교육청 영재교육원 중학교 3학년 9명
2015.09.12.(토) 09:00 - 12:30	B시 D중학교 영재학급 수학반 3학년 5명

① 참여관찰

본 연구에서는 개발된 교수·학습 자료를 이용하여 연구자가 직접 수업에 적용하였다. 본 연구자가 수업의 진행자이며 관찰자가 되어 현장에 적용했을 때의 특징과 오류 등을 분석하였다.

② 면담

모든 학생을 대상으로 한 개별 면담은 하지 않았고 수업 중 관찰, 활동지에서의 반응을 바탕으로 특징적인 반응을 보인 학생에 한해 실시하였다. 연구 대상자들이 수업에 집중할 수 있도록 수업 후나 휴식시간에 면담이 이루어 졌다.

③ 기록물

연구 대상자들이 수업에 참여하면서 작성한 활동지, 수업 중에 활동한 결과물, 수업 과정 동영상 등의 자료를 수집하였다. 이 자료들을 통해 학생들의 반응을 분석해 보고 교수·학습 자료의 타당성을 평가하였다.

4. 자료 분석

본 연구에서는 개발된 자료가 영재 교수·학습 자료로써 적합한 자료인지를 확인하기 위하여 총 2차례에 걸쳐 현장 적용을 하였다. 1차 적용한 결과를 토대로 자료를 수정·보완하여 교수·학습 자료를 개발하였으며, 2차에 적용한 학생들을 대상으로 수업을 하였을 때 나타나는 사고 과정에 대하여 분석 하였다. 사고 과정 분석은 황혜정(2001)의 수학적 사고 과정의 평가 요소를 참고하여 기초적 사고, 발달적 사고, 복합적 사고의 세 가지 유형의 범주로 나누어 분석 기준을 설정하였다.

Ⅳ. 자료개발 및 적용결과분석

1. 교수·학습 자료의 구성

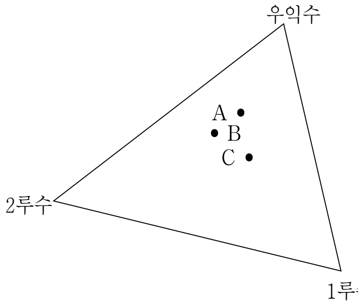
본 연구에서 개발한 자료는 주제 탐구형 교수·학습 자료로서 Renzulli의 삼부심화학습모형으로 1단계 일반적인 탐색활동(행운의 안타), 2단계 사고기능의 훈련 활동(페르마 점, 페르마 점의 성질, 나폴레옹과 페르마 점) 그리고 마지막 3단계 자기주도적 탐구활동(사각형에서의 페르마 점)으로 구성하였다. 개발한 자료의 주제와 활동 내용은 <표 Ⅳ-1>과 같다.

<표 Ⅳ-1> 주제 및 활동내용

Renzulli의 심화단계	주제명	내 용
1단계 일반적 탐색	행운의 안타	실생활 자료를 통한 흥미 유발
2단계 사고기능의 훈련	페르마 점	페르마 점을 찾기 위한 추측활동 및 증명
	페르마 점의 성질1	삼각형의 외접원과 페르마 점의 관계에 관한 성질
	페르마 점의 성질2	한 내각이 120° 보다 큰 경우의 페르마 점
	나폴레옹과 페르마 점	나폴레옹의 정리
3단계 자기주도적 탐구	사각형에서의 페르마 점	사각형에서 페르마 점 찾기

가. 행운의 안타

페르마 점을 학습하기 전 흥미롭고 호기심을 불러일으킬 만한 실생활의 문제를 제시하였다. 야구경기에서 행운의 안타가 생기는 장면을 [그림 Ⅳ-1]과 같이 보여주고 이런 일이 일어날 확률이 가장 높은 곳의 위치를 추측해 보는 활동을 한다. 학생들은 이 활동을 통해, 중학교 2학년 때 학습했던 원과 삼각형의 여러 성질들에 대해 내용을 상기시키면서 문제를 해결하고 페르마 점의 학습에 필요한 내용들을 환기시킬 수 있도록 구성하였다.



공의위치	1루수	우익수	2루수
A	4.1	1.8	3.2
B	4.2	2.5	2.7
C	3.3	2.7	2.7

[그림 Ⅳ-1] 행운의 안타: 공의 위치와 수비수까지의 거리

나. 페르마 점

본격적인 페르마 점에 관한 소개를 하기 전에 페르마 점을 활용할 수 있는 상황을 제시한 후 학생들이 스스로 거리 합의 최솟값을 추측해 보도록 한다. 학생들은 자신이 생각한 점의 위치와 그 이유에 대해 발표해 본 후 교사는 페르마 점에 대해 소개하고 점을 찾는 방법에 대한 한 가지 증명방법을 제시한다. 후에 학생들이 직접 작도를 통하여 페르마 점을 찾아보는 활동을 하도록 구성하였다. 작도활동이 끝난 후에는 표면장력을 이용한 비누 막 실험 동영상을 제시하고 이와 같은 활동에 대한 소개와 이 활동의 결과로 얻을 수 있는 페르마 점에 대한 수학적 정당화를 해 보도록 구성하였다. 또 페르마 점이 각 꼭짓점들과 이루는 각이 120° 임을 추리해보도록 하고 이를 증명해 보도록 구성하였다.

다. 페르마 점의 성질

페르마 점의 몇 가지 성질을 이해하고 증명해 본 후 이를 이용하여 새로운 사실을 학습할 수 있도록 구성하였다. 먼저 주어진 삼각형의 각 변을 한 변으로 하는 정삼각형을 작도하고, 이때 새롭게 생긴 꼭짓점에서 마주보는 꼭짓점까지의 길이가 모두 같음을 증명하고 발표해 보도록 한다. 그 후 삼각형의 한 점이 움직일 때 페르마

점의 자취를 추측해 보도록 하고, 이를 통해 페르마 점이 삼각형의 각 변을 한 변으로 하는 세 정삼각형의 외심의 교점이라는 사실을 발견할 수 있도록 구성하였다. 마지막으로 삼각형의 한 내각의 크기가 120° 이상일 때 페르마 점의 위치를, 앞서 학습한 작도법을 이용하여 찾아보고 삼각형의 외부에 생기는 이유에 대해 추측해 보게 한다. 그 후 한 내각의 크기가 120° 이상인 삼각형에서 페르마 점은 어디인지 토론해 보는 활동으로 세 지점에서의 페르마 점의 위치를 찾는 활동을 마무리 하도록 하였다.

라. 나폴레옹과 페르마 점

평소 기하학에 관심이 많고 기하학공부를 즐겼다고 알려진 나폴레옹은, 삼각형의 각 변을 한 변으로 하는 세 정삼각형의 외심을 연결한 새로운 삼각형을 만들면 이 삼각형은 정삼각형이 된다는 사실을 발견했다고 한다. 이와 관련하여 삼각형과 사각형의 성질 등을 이용하여 학생들의 논리적 사고능력을 향상시키고 소집단 토의로 수학적으로 의미있는 추측과 토론이 이루어 질 수 있도록 구성하였다.

마. 사각형에서의 페르마 점

페르마의 점을 찾는 문제는 세 도시를 연결하는 효율적인 도로망을 설계하는 문제로 제시할 수 있다. 이 때 도시의 수를 일반화하여 네 개, 다섯 개의 도시를 연결하는 효율적인 도로망이 어떤 모습일지 추측해 볼 수 있다. 학습지 마지막 장은 네 점 비누 막 실험의 결과가 실린 사진이 있어 먼저 제시하지 않고 학생들로 하여금 네 점을 잇는 효율적인 도로망 설계를 먼저 구성해보도록 하였다. 개인별 도로망 설계를 발표해보고 후에 비누 막 실험의 결과를 제시하고 자신이 구상한 도로망과 비교, 분석해 보도록 하였다.

또 비누 막 실험의 결과를 사진을 통해 확인한 후 페르마 점과 관련하여 도로의 특징을 찾아보게 하고 연역적 증명을 하도록 구성하였다.

2. 주제별 적용결과 및 사고과정 분석

가. 행운의 안타

세 명의 수비수 가운데 공이 떨어질 때 행운의 안타가 될 가능성이 높은 곳을 추측하는 활동이다.

<발췌문 1>

(1.1)교사 : 세 명의 수비수가 있을 때 행운의 안타가 나올 가능성이 가장 높은 위치는 어디일까요? 삼각형의 성질과 관련지어서 설명해볼 사람 있나요?

(1.2)학생2 : 외심이요.

(1.3)교사 : 왜 그렇게 생각했죠?

(1.4)학생2 : 일단 두 사람의 입장에서 보면, <u>두 사람의 가운데에 공이 떨어지면 안타가 될 가능성이 가장 높은데, 이거는 선분의 수직 이등분선이거든요. 그래서 두 사람씩 수직이등분선을 그으면 외심이 되요.</u>

(1.5)교사 : 혹시 보충 설명 해줄 사람 있나요?

(1.6)학생3 : <u>두 사람이 있을 때 두 사람으로부터 같은 거리에 있는 점들이 수직이등분선이니깐 결국 세 점의 수직이등분선의 교점을 구하면 되고 이 점이 삼각형의 외심이에요.</u>

1) 발달적 사고

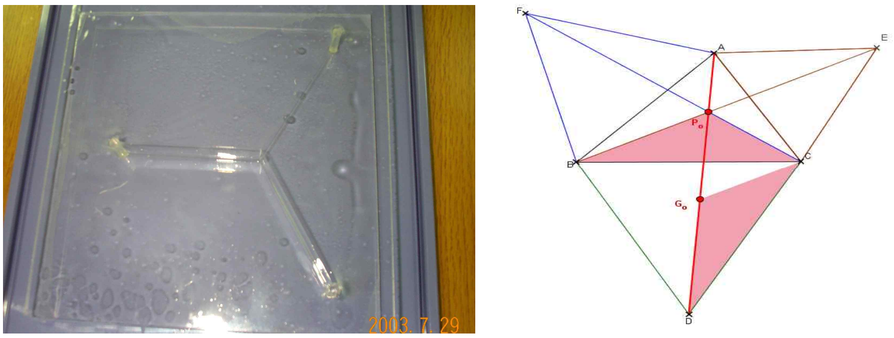
학생2와 학생3은 (1.4), (1.6)에서 행운의 안타가 될 가능성이 높은 곳은 두 점으로부터 거리가 같은 곳이라는 결론을 이끌어 내고, 이는 두 점을 잇는 선분의 수직이등분선이라는 사실을 이용하여 세 명의 수비수로부터 행운의 안타가 될 가능성이 가장 높은 곳은 세 점의 수직이등분선의 교점인 외심이 문제의 정답이라고 추론하

였다.

실제로 이 활동과정에서 학생 5명 모두가 세 명의 수비수가 있을 때, 행운의 안타가 나올 가능성이 가장 높은 위치를 삼각형의 외심이라고 답하였다. 이는 문제 상황에서 표로 나타낸 공의 위치 세 곳 중 공과 가장 가까운 수비수와 공의 거리가 가장 긴 C의 위치가 행운의 안타가 될 가능성이 높다고 판단하고 이를 근거로 모든 학생들이 삼각형의 외심의 위치가 행운의 안타가 나올 가능성이 가장 높은 위치라고 추측하였다.

나. 페르마 점

세 점 비누 막 실험결과 생기는 점이 바로 페르마 점임을 확인하고 이때 세 선분이 만나는 각이 120° 임을 증명하는 과정이다.



[그림 Ⅳ-2] 비누 막 실험과 페르마의 점

<발췌문 2>

(2.1)교사 : 이 사진은 조금 전에 본 동영상을 캡처 한 사진입니다. 비누막이 한 점에서 만나는 게 보이죠? 자, 그렇다면 저 점이 페르마 점임을 알겠나요?

(2.2)학생1 : 비누막이 무슨 모양이지?

(2.3)학생4 : 옆에서 보면 직사각형 아닌가?

(2.4)학생3 : 직사각형 넓이는 가로 곱하기 세로잖아. 그런데 선생님, 직사각형 3개가 세로 길이는 모두 같은 거 아니예요?

(2.5)교사 : 그렇죠. 세로길이는 두 판사이의 거리니깐 일정합니다.

(2.6)학생3 : 그러면 결국 가로길이가 작아야 넓이가 최소가 되니깐 가로길이의 합이 최소가 되도록 비누막이 생기겠네요. 그러니깐 페르마 점이예요.

(2.7)학생1 : 아 그렇네. 그런데 선생님, 제가 이 사진을 보고 각도기로 재봤는데요, 이루는 각이 전부 120° 인데요?

(2.8)교사 : 선생님이 안 그래도 그거 얘기하려고 했는데. 사진에서 보듯이 비누 막으로 생긴 페르마 점이 꼭짓점과 이루는 각이 신기하게 전부 120° 가 되요. 신기하죠? 왜 그렇게 될까요??

(반응 없음)

(2.9)교사 : 자, 선생님이 힌트를 좀 줄게요. $\angle CG_0A$의 크기는 얼마죠?

(2.10)학생들 : 60° 요.

(2.11)교사 : 왜 60° 가 되죠? 설명해줄 사람?

(2.12)학생2 : $\triangle CP_0G_0$가 정삼각형이요. 아, 그러면 $\overline{AD}$가 직선이니까 $\angle CG_0D$가 120° 이 되겠네요.

(2.13)학생4 : 그러면 BP_0C, CP_0A, BP_0A 모두 $120°$가 되겠네요.

1) 기초적 사고

학생4는 (2.3)에서 비누 막 실험의 결과로 생긴 비누 막의 모양을 추측하는 과정에서 비누 막을 옆에서 보았을 때 그 모양이 직사각형이 됨을 관찰하였다. 또 (2.7)에서 학생1은 세 점 비누 막 실험의 결과로 얻은 두 장의 사진을 이용하여 직접 각도기를 이용해 비누 막 사이의 각을 측정하는 활동으로부터 페르마 점이 꼭짓점과 이루는 각이 $120°$임을 관찰을 통해 확인하였다.

2) 발달적 사고

모든 학생들은 교사의 안내로 $\angle CG_0A$의 크기가 $60°$가 됨을 알게 되었다. 이를 이용하여 $\triangle CP_0G_0$가 정삼각형이 되고 $\overline{AD}$가 직선이므로 따라서 $\angle CG_0D$가 $120°$가 된다는 사실을 연역적으로 증명하였다. 그리고 이를 통해 $\angle BP_0C$, $\angle CP_0A$, $\angle BP_0A$의 크기가 모두 $120°$가 되어 페르마 점과 세 꼭짓점이 이루는 각이 $120°$임을 증명하였다. 이는 전제로부터 논리적 규칙을 써서 결론을 도출한 경우로 연역추리에 해당하는 사고이다.

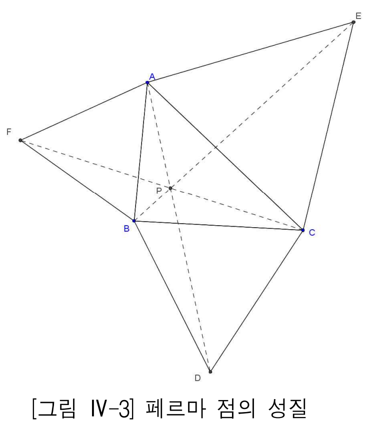
3) 비판적 사고

(2.4), (2.6)에서 학생3은 세 점 비누 막 실험의 결과물을 확인한 후 세 개의 직사각형의 세로길이는 모두 동일하므로 넓이가 최소가 될 때는 가로길이의 합이 최소가 될 때임을 사고하였다. 따라서 비누막이 만나는 한 점이 페르마 점이 됨을 보였다. 이는 주어진 상황에서 그에 관한 모든 것을 조사하여 그것들의 상호관련성을 파악하고 평가한 사고로써, 결론을 뒷받침하는 전제가 적절하고 타당하고 그것으로부터 결론을 이끌어 낸 경우이므로 비판적 사고에 해당한다.

비누 막 실험의 결과로 얻어지는 점이 페르마 점이 되는 이유를 학생들끼리 대화하는 과정을 통하여 알게 되었다. 이후 관찰을 통해 페르마 점이 세 꼭짓점과 이루는 각이 $120°$임을 알게 되었고 연역적으로 증명하여 정당화 할 수 있었다.

다. 페르마 점의 성질 1

페르마 점을 작도하는 과정에서 각 변을 한 변으로 하는 정삼각형을 작도한 후 새로 생긴 한 꼭짓점에서 마주보는 원래의 삼각형의 한 꼭짓점을 이은 세 선분의 길이가 같음을 수학적으로 증명해보는 과정이다.



[그림 Ⅳ-3] 페르마 점의 성질

<발췌문 3>

(3.1)교사 : 자, 이 그림은 우리가 페르마 포인트를 작도했을 때 봤던 그림이죠? 이제 이 그림에서 선분 DA, BE, FC의 길이가 모두 같다는 사실을 한 번 증명해 봅시다. 어떻게 하면 될까요? 토의해 봅시다.

(3.2)학생2 : 두 선분의 길이가 같다는 걸 증명하려고 할 때, 어떻게 하지?

(3.3)학생4 : 그 선분을 포함하는 삼각형을 찾아서 합동이 되는 걸로 증명을 했던 것 같은데?

(3.4)학생2 : 아. 그러면 일단 DA와 FC를 포함하고 있는 삼각형 중에서 합동인 삼각형이 있을까?

(3.5)학생1 : 삼각형 FBC와 ABD가 합동이네.

(3.6)학생3 : 왜?

(3.7)학생1 : FB와 AB는 정삼각형의 각 변이라서 길이가 같고, BC랑 BD도 BCD가 정삼각형이니깐 길이가 같지. 또 각 $\angle$FBC와 $\angle$ABD은 $\angle$ABC를 포함하고 60°씩 더했으니깐 같은 거지.

(3.8)학생2 : 아 그러면 삼각형 FBC와 ABD가 SAS 합동이니깐 FC와 AD가 길이가 같겠네. 그럼 나머지 한 경우는?

(3.9)학생3 : 삼각형 ADC와 EBC가 합동이 되니깐, 방금 했던 과정을 비슷하게 적용하면 BE와 DA가 같게 될 것 같은데?

1) 기초적 사고

학생4는 (3.3)에서 두 선분의 길이가 같다는 사실을 증명하고자 할 때, 자신이 과거에 해결하였던 경험을 떠올려서 두 선분을 각각 포함하는 두 개의 삼각형을 찾고 그 두 삼각형이 합동이 됨을 증명하는 방법을 제안하고 있다. 이는 유사성을 가진 자료를 보거나 사용한 경험을 이용하여 원하는 자료와 공통적인 사실을 찾아낸 사고이므로 기초적 사고에 해당한다.

2) 발달적 사고

문제가 처음 주어졌을 때 연역적 증명을 많이 접해보지 못했던 학생들은 길이가 같다는 사실을 어떤 방법으로 증명 과정을 구성해야 할지 몰랐고, 학생4가 (3.3)과 같이 과거에 증명한 방법을 떠올리자 학생1은 (3.7)과 같이 두 변의 길이가 각각 정삼각형의 한 변으로써 같고 그 끼인각이 같으므로 SAS합동 조건에 의해 두 삼각형이 합동이 됨을 사고하고 있다. 이후에는 학생들이 페르마 점에서 세 꼭짓점까지의 거리 합의 최소 길이를 나타내는 세 변의 길이가 모두 같음을 수학적으로 정당화 시키는 과정을 삼각형의 합동을 이용하여 증명할 수 있었다.

학생3은 (3.9)에서 $\triangle$FBC와 $\triangle$ABD가 합동이 됨을 이용하여 $\overline{FC} = \overline{AD}$임을 증명한 방법을 이용하여 이와 구조가 비슷한 $\triangle$ADC와 $\triangle$EBC가 합동이 되고 따라서 $\overline{DA} = \overline{BE}$가 성립하게 될 것이라 추측하였다. 이는 두 삼각형사이의 합동조건이 동일하다는 공통적인 사실로부터 문제 상황을 해결하는데 동일한 방법을 사용한 사고로 유추적 사고에 해당하는 사고이다.

이 주제에서 학생들은 학생 스스로 연역적 증명과정을 거쳐서 증명을 완성한 학생도 있었지만 그렇지 못한 학생도 있었다. 그러나 연역적 증명을 스스로 완성하지 못한 학생도 교사가 약간의 힌트를 제공하였을 때에 증명을 완성할 수 있었다. 하지만 증명과정에서의 수학적 기호의 사용이 매끄럽지 못하고 구성과정이 다소 빈약한 점이 아쉬웠다.

라. 페르마 점의 성질 2

한 내각의 크기가 120°이상인 삼각형에서 페르마 점을 작도해 보고 페르마 점이 삼각형 외부에 생기는 이

유에 대해 알아보는 과정이다.

<발췌문 4>

(4.1)교사 : 이번에는 한 내각이 120° 보다 큰 경우에 페르마 점이 어떻게 되는지 한번 보겠습니다. 학습지에 주어진 삼각형에 페르마 점을 한 번 찾아보세요.

(각자 작도)

(4.2)학생1 : 선생님. 작도를 해서 페르마 점을 찾았는데 이 점은 거리 합이 최소인 점은 아닌 것 같아요. 왜냐하면 $\overline{PB}$가 $\overline{AB}$보다 길고 $\overline{PC}$가 $\overline{AC}$보다 길어서 거리 합이 더 길게 나오니까요.

(4.3)교사 : 작도로 찾은 점은 어디에 위치해 있죠?

(4.4)학생2 : 점 A 위에요. 삼각형 밖에 있는데요?

(4.5)학생5 : 왜 점이 삼각형 밖에 생기지?

(반응 없음)

(4.6)교사 : 페르마 점이 꼭짓점과 이루는 각이 몇 도였죠?

(4.7)학생3 : 아, 선생님. 앞에서는 페르마 점이 꼭짓점과 120° 로 만나면서, 삼각형의 내부에 위치했어요. 그런데 페르마 점이 이 성질이 계속 만족한다고 하면 내각이 120° 보다 커버리면 그 각의 꼭짓점을 뺀 나머지 두 각을 바라보는 각도가 120° 보다 커져야 하니까 밖에 생기는 거 아니에요?

1) 기초적 사고

학생들은 전 차시에 학습한 방법을 이용하여 스스로 자와 컴퍼스를 이용하여 페르마 점을 직접 작도해 보고 한 내각의 크기가 120° 보다 큰 삼각형의 경우에는 이와 같은 방법에 의해 생긴 페르마 점이 삼각형외부에 위치한다는 사실을 관찰하고 (4.4)의 반응처럼 의아해 하였다. 이는 직관적으로 생각하였을 때에도 거리의 합이 최소가 되는 점은 삼각형의 내부에 위치하는 것이 적당하나 다소 의외의 결과가 나왔기 때문이다.

2) 발달적 사고

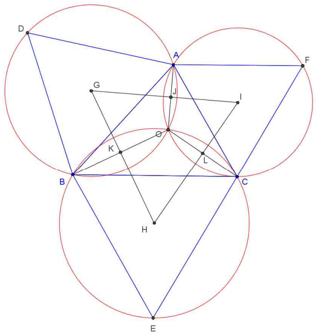
학생들은 한 내각의 크기가 120° 보다 큰 삼각형의 경우 먼저 학습한 작도법에 의해 생긴 점의 위치는 삼각형 밖이라는 사실은 관찰하였지만 그 이유에 대해서는 설명하지 못하였다. 교사가 (4.6)에서 페르마 점의 성질이 꼭짓점과 이루는 각이 120° 라는 사실을 이용하라는 힌트를 준 후에, 학생3은 (4.7)에서와 같이 내각의 크기가 120° 보다 큰 경우에는 그 각을 제외한 나머지 두 점에서 페르마 점을 잇는 각이 120° 보다 커지기 때문에 페르마 점이 삼각형 외부에 생긴 것이라 추측하였다.

3) 비판적 사고

비판적 사고는 학습하는 내용을 따져보고 그것을 확대, 적용하는 과정을 거치면서 향상되는 사고로써 타당한 결론에 이르는 그 전제가 적절한지 부적절한지 등을 사정하는 단계가 필요한데 학생1은 이런 모습을 잘 보여주고 있다. 학생1은 (4.2)에서 전 차시에 학습했던 페르마 점의 작도 방법에 의해 생긴 점 P는 페르마 점이 아니라고 주장하였다. 그 근거로 점 P에서 삼각형 ABC의 각 꼭짓점에 이르는 거리 합보다 점 A에서 B, C에 이르는 거리가 더 짧다는 사실을 들었다. 이는 학습과제를 해결하고 이를 확인하는 반성적 사고 과정에서 오류를 발견하였으므로 고차적 사고를 했다고 볼 수 있다.

마. 나폴레옹과 페르마 점

[그림 Ⅳ-4]을 제시하고 △GHI가 정삼각형이 됨을 증명해보는 과정이다.



[그림 Ⅳ-4] 나폴레옹과 페르마 점

<발췌문 5>

(5.1)교사 : 자, 이제 이 사실을 증명을 해봅시다. 어떻게 하면 될까요?

(5.2)교사 : 어디서부터 뭘 생각해야 할지 막막하죠? 선생님이 힌트를 좀 줄게요. $\angle AOB$는 크기가 얼마였죠?

(5.3)학생들 : 120° 요.

(5.4)교사 : 자, 그럼 여기서 사각형 GBHO는 어떤 사각형이고, 이 때 $\angle GKO$는 크기가 어떻게 되죠?

(5.5)학생2 : 마름모?

(5.6)학생1 : 마름모 아니지 않나? $\overline{BG}$랑 $\overline{BH}$가 원의 반지름이니깐 다를 수도 있잖아.

(5.7)학생3 : 아, 그렇네. 나도 마름모인줄 알았는데, 아닌 것 같다.

(5.8)학생1 : 선생님. GBHO는 특별한 이름이 있나요? 그냥 이등변 삼각형 두 개가 붙어 있는 것 같은데요?

(5.9)교사 : 네, 맞아요. 특별한 이름은 없습니다. 그럼 어떤 특징이 있지요?

(5.10)학생2 : $\overline{GO}$랑 $\overline{GB}$가 같고 $\overline{OH}$랑 $\overline{BH}$가 같으니까 $\triangle GOH$랑 $\triangle ABH$가 합동인데?

(5.11)학생1 : 아, 그러네...그럼 $\angle GKO$가 직각인데요, 선생님?

(5.12)교사 : 왜 직각이죠?

(5.13)학생1 : $\angle BGO$를 이등분하는 선은 $\overline{BO}$에 수직이등분 하니까요.

(5.14)교사 : 그렇지요. 자, 그러면 그 다음은 어떻게 하면 될까요?

(5.15)학생3 : $\angle GJO$도 직각인거 같은데요?

(5.16)교사 : 왜죠?

(5.17)학생3 : 사각형 GAIO도 방금 한 거랑 똑같잖아요. 똑같이 하면 $\angle GJO$도 직각 나오는데요?

(5.18)학생1 : 아, 그러면 사각형 GJOK에서 각 K랑 각 J가 90°고, O는 120°이니까 각 G가 60° 되는데요.

(5.19)학생4 : 똑같이 하면 각 I랑 각 H도 60° 나와서 $\triangle GHI$가 정삼각형 되겠네.

1) 기초적 사고

학생들이 처음부터 연역적 증명을 하기엔 어려워했기 때문에 교사가 (5.4)에서처럼 발문을 통해 사각형 GBHO의 특징에 대해 관찰하게 하였다. 학생1는 (5.8)에서 사각형 GBHO의 모양을 관찰 후 이등변 삼각형 두 개가 붙어 있는 모습이라고 분석하였고, 그 이후 활발한 사고를 학생들이 할 수 있었다.

2) 발달적 사고

학생1이 사각형 GBHO의 특징을 분석한 후 학생2는 (5.10)에서 $\overline{GO}=\overline{GB}$이고 $\overline{OH}=\overline{BH}$이므로 $\triangle GOH$와 $\triangle ABH$가 합동임을 추리하여 $\angle GKO$가 직각임을 보였다. 이는 전제로부터 논리적 규칙을 써서 결론을 도출한 경우로 연역추리에 해당하는 사고이다.

학생3은 (5.17)에서 사각형 GBHO에 발견한 사실을 구조가 같은 사각형 GAIO에도 똑같이 적용하면 $\angle GJO$또한 직각이 됨을 추측하였다. 마찬가지로 학생4는 각 G가 60°가 된 일련의 추측을 삼각형 GHI의 다른 부분에 적용하면 삼각형 GHI가 정 삼각형이 될 것이라고 추측하였다. 이는 두 문제 상황사이에서 공통적인 사실과 구조적 유사성을 인식하여 설명하였으므로 유추적 사고에 해당한다.

3) 비판적 사고

사각형 GBHO가 마름모라는 추측을 한 학생2와 학생3의 의견에 학생1이 (5.6)에서 $\overline{BG}$와 $\overline{BH}$의 길이가 원의 반지름에 해당하는 길이이므로 두 길이는 다를 수도 있으니 사각형 GBHO는 마름모가 될 수 없다는 사실을 제시하여 사각형의 특징에 관한 관찰이 계속 이루어지도록 하였다. 이는 사각형 GBHO가 마름모라는 결론에 이르는 그 전제가 부적절함을 적절한 근거를 통하여 제시하고 있으므로 비판적 사고에 해당하는 사고이다.

주어진 힌트만으로 증명을 해내기에는 학생들이 어려워했기 때문에 교사의 발문으로 증명과정을 이끌어 내기 시작했다. 몇 번의 도움을 시작으로 학생들은 증명에 필요한 과정을 찾아갔으며 서로의 대화를 통해 증명을 완성하였다.

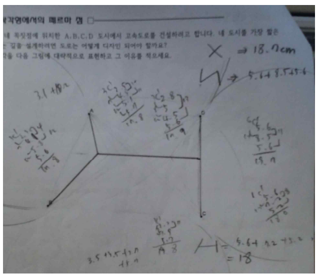
바. 사각형에서의 페르마 점

다음은 학생들이 네 점을 잇는 효율적인 도로망을 직접 구성, 발표해보는 장면이다.

<발췌문 6>

(6.1)교사 : 자신이 디자인한 도로망을 차례대로 발표해 봅시다.

(6.2)학생1 : 전 처음에는 X자 모양으로 디자인을 했는데, 그 길이가 18.7cm였어요. 그런데 길이를 조금 줄일 수 없을까 생각하다 그냥 H모양으로 해보았더니 길이가 18cm가 나와서, 이것보다 더 짧은 길이를 추측하다 보니 이런 모양이 나왔어요.

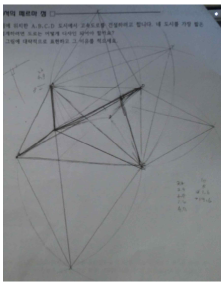


[그림 Ⅳ-5] 학생1의 디자인

(6.3)학생2 : 저도 처음에는 대각선이 가장 짧지 않을까 생각했는데, 각 도시를 잇기만 하면 되므로 가장 긴 변인 BC를 제외한 나머지 선분을 이으니 17.7cm이 나왔어요.

(6.4)학생3 : 저는 $\overline{AC}$ 대각선에 점 B와 D에서 수선을 각각 내리면 길이가 짧지 않을까 해서 이렇게 디자인 했어요.

(6.5)학생4 : 저도 처음에는 방금 발표한 애랑 똑같이 생각했는데, 저는 삼각형에서 페르마 점을 이용해야 할 것 같아서, 삼각형 두 개로 나누고 각 삼각형에서 페르마 점을 찾아 연결해서 디자인 했습니다.



[그림 Ⅳ-6] 학생4의 디자인

(6.6)학생5 : 앞에 얘기한 4번 친구랑 비슷한데, 저는 페르마 점이 하나일 거라고 생각하고 작도하여 찾아보았는데요, 다른 친구들이 다 두 개씩을 찾아서 제가 한 건 틀린 것 같아요. 저도 삼각형 두 개로 나누고 각각의 페르마 점을 찾아서 그 두 점의 중점을 또 찾았어요.

1) 기초적사고

(6.2)에서 학생1은 처음 디자인 한 모양의 길이보다 두 번째 디자인한 도로망의 길이가 짧았다는 사실을 분석하였다. 또한 두 번째 디자인한 도로의 모양에서 H의 왼쪽 선분을 오른쪽으로 옮길 때 길이의 합이 줄어듦을 관찰하고 [그림 Ⅴ-5]와 같은 모양으로 도로를 디자인 하였다. 또 (6.5)에서 학생4는 삼각형에는 페르마 점이 1개 존재하였다는 사실을 이용하여 네 점으로 이루어진 사각형은 삼각형 2개로 분리할 수 있고 따라서 각각의 삼각형에 페르마 점을 활용하여 [그림 Ⅴ-6]과 같이 도로망을 디자인 하였다.

2) 발달적 사고

(6.6)에서 학생5는 이미 학습한 내용인 삼각형에서 페르마 점은 항상 한 점 이라는 성질이 사각형에서도 마찬가지로 성립할 것이라고 추측하여 사각형을 두 개의 삼각형으로 나누고 각각의 페르마 점을 구한 후 그 두 점을 잇는 선분의 중점을 구하여 그 점이 페르마 점이 될 것이라 추측하였다. 이는 세 점 도로망 설계와 네 점 도로망 설계가 점의 개수는 다르지만 최소 길이의 도로망을 설계하는 본질적인 사실은 일치한다는 인식하에 네 점에서의 도로망 설계를 해결하는데 동일한 결론을 가질 것이라는 추측을 이용하여 일반화 하는 사고를 하고 있는 과정이다.

페르마의 점을 찾는 문제를 네 도시를 연결하는 효율적인 도로망을 설계하는 문제로 제시하고 학생들로 하여금 네 점을 잇는 효율적인 도로망 설계를 구성해보도록 하였다. 그 결과 학생들은 다양한 방법으로 다양한 모양의 도로망을 구성하였다. 세 점에서의 페르마 점을 이용하지 않은 학생도 있었고, 나름의 논리나 학습한 내용을 활용하여 도로망을 구성하였으나 페르마 점이 꼭짓점과 이루는 각이 120°라는 성질을 이용하여 네 점에서의 페르마 점을 추리해보는 학생은 없었다.

Ⅴ. 결론 및 논의

개발된 교수·학습 자료로 수업을 진행하는 과정을 분석한 결과를 바탕으로 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었

다.

첫째, 페르마 점을 활용한 영재 수업은 학생들에게 흥미와 호기심을 불러일으켰으며 학생들에게 도전해 볼만한 문제로 생각되어졌다. 페르마 점의 도입이 실생활과 연관되었을 때 학생들은 흥미를 느끼는 동시에 그 내용이 유용하다 라는 인식을 하였고, 개발된 자료의 내용이 너무 어렵지 않게 구성되어 학생들이 수업에서 뒤쳐지거나 낙오되는 상황이 없었다.

둘째, 학생들은 해결해야 하는 과제를 처음 접하였을 때 자신들이 가지고 있는 선행지식을 바탕으로 과제를 관찰, 분석, 추측 하였다. 행운의 안타가 나올 위치를 묻는 문제에서 학생들은 공과 가까운 수비수가 공을 잡을 것이라는 일반적인 생각을 가정 하에 과제를 분석하고 있다. 페르마 점의 위치를 추리하는 상황에서는 학습자들이 알고 있는 삼각형의 오심 중에 한 점을 추측하였고, 한 내각의 크기가 120° 이상인 삼각형의 페르마 점을 찾는 과제에서는 이미 학습한 작도방법을 이용하면 페르마 점의 위치가 삼각형 외부에 생기는 사실을 관찰하였다. 나폴레옹의 정리에서 사각형 GBHO를 분석, 관찰 후 특정한 이름을 갖는 사각형이 아니므로 학생1은 이등변삼각형을 이용하여 사각형의 특징을 설명하였다.

셋째, 관찰을 기초로 그것을 확대시켜 어떤 결론에 이르는 과정에서 학생들은 연역적사고, 유추적 사고를 하였다. 두 점 사이에 같은 거리에 있는 위치에 공이 떨어질 때 행운의 안타가 될 가능성이 높음으로 삼각형의 세 수직이등분선의 교점, 즉 외심이 세 명의 수비수 사이에 행운의 안타가 될 확률이 높은 곳이라고 일반화 하였다. 또 네 점을 잇는 도로망을 디자인하는 상황에서 학생5는 삼각형에서 페르마 점이 유일하게 한 점 이라는 성질이 사각형에서도 그대로 성립할 것이라고 추측하여 도로망을 디자인 하였다.

넷째, 추측을 반박하는 과정에서 학생들은 비판적 사고를 하였다. 한 내각의 크기가 120° 이상인 삼각형에서 페르마 점을 찾는 과정에서 학생1은 이전에 학습한 페르마 점의 작도 방법에 의해 생긴 점 P가 페르마 점이 아니라고 주장하는 근거로, 점 P보다 점 A에서 삼각형의 각 꼭짓점에 이르는 거리가 더 짧다는 사실을 들고 있다.

이와 같이 영재 교수·학습 모형의 이론에 근거하여 개발된 영재 교수·학습 자료는 아직 완전한 것은 아니며 새로운 교수자나 학습자의 필요나 요구에 의해 언제든지 수정되고 보완되어 질 수 있다. 또한 좋은 영재 교수·학습 자료가 되기 위해서는 반드시 적용과 관찰·분석이 필요하다. 교육 자료가 의미 있게 개발되고 공유될 때 영재 교육은 본래의 취지를 실현할 수 있을 것이며, 서로 관련성 없는 고난도 문제풀이 위주의 영재교육은 학생 스스로에게나 교사, 사회 모두에게 좋은 경험을 제공하지 않을 것이다. 따라서 당장의 성과에 연연하지 말고 수학교육적으로 의미 있는 자료를 많이 개발하고 지속적으로 향상시키는 것에 주목하려는 노력이 필요하다.

참 고 문 헌

구자억 외 (1999). 영재교육과정 개발연구(Ⅰ)-초·중학교 영재교육과정 시안 개발을 위한 기초연구. 한국교육개발원.

Koo, J. E. et al. (1999). *Development of curriculum for gifted students(Ⅰ)-Basic research of curriculum development for gifted students in elementary school and middle school.* Korean Educational Development Institute.

남승인 (2000). 초등학교 저학년 영재지도 방안. 수학교육 학술지 5, 21-37.

Nam, S. I. (2000). Teaching method for gifted students' in lower grade of elementary school. Studies in Mathematical Education *Journal of Korean Soc. Math Ed. Ser. F: Studies in Mathematical Education*, 5, 21-37.

윤경원 (2013). ‘페르마 점’을 활용한 수학-과학 통합수업에서 학생들의 수학적 사고. 한국교원대학교 석사학위논문.

Yun, G. W. (2013). *Students' mathematical thinking in science integrated class-observation about 'Fermat Point'*, Master's thesis, Korea National University of Education.

윤준호 (2016). '페르마 점'을 활용한 수학 영재 교수·학습 자료 개발 및 적용, 한국교원대학교 석사학위논문.

Yun, J. H. (2016). *Development and application of teaching-learning materials of Fermat Point for mathematically gifted students*, Master's thesis, Korea National University of Education.

이경화 (2003). 수학 영재교육 자료의 개발과 적용 사례 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 D <수학교육연구>, 13(3), 365-381.

Lee, K. W. (2003). Development and application of mathematical activities for gifted students, *Journal of educational research in mathematics*, 13(3), 365-381.

전선미 · 유원석 (2011). 중등 수학영재 교수·학습자료 개발 동향 분석. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 25(1), 79-97.

Jun, S. M., Yoo, W. S. (2011). An analysis on the development tendency of teaching and learning materials for the gifted students in the middle school, *Journal of Korean Soc. Math Ed. Ser. E: Communications of mathematical education*, 25(1), 79-97.

조연순 (2001). 창의성 계발을 위한 교수 · 학습 및 평가방법, 창의성 계발을 위한 교육전략 연구 세미나. 한국교육개발원, 연구자료 RM 2001-32.

Cho, Y. S. (2001). *Teaching-learning and evaluation method for fostering creativity*, Korean Educational Development Institute, Research data, RM 2001-32.

하현철 (2011). Lakatos의 증명과 반박의 원리를 활용한 교수·학습 상황에서 고등학교 1학년 학생들의 수학적 사고. 한국교원대학교 석사학위논문.

Ha, H. C. (2011). *A study of high school students' mathematical thinking on the application of Lakatos' proof and refutation*, Master's thesis, Korea National University of Education.

황혜정 (2001). 수학적 사고 과정 관련의 평가 요소 탐색. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 40(2), 253-263.

Hwang, H. J. (2001). Evaluation factor related to thinking skills and strategies based on mathematical thinking process, *The mathematical education*, 40(2), 253-263.

Development and application of teaching - learning materials for mathematically gifted students by using Fermat Point -

Yoon, Joon-Ho
Graduate School, Korea National University of Education, Cheongju, Chungbuk, Korea
E-mail : sea2sea83@naver.com

Yun, Jong-Gug†
Department of Mathematics Education, Korea National University of Education, Cheongju, Chungbuk, Korea
E-mail : jgyun69@knue.ac.kr

The purpose of this study is to develop Project-Based Teaching-Learning materials for mathematically gifted students using a Fermat Point and apply the developed educational materials to practical classes, analyze, revise and correct them in order to make the materials be used in the field.

I reached the conclusions as follows.

First, Fermat Point is a good learning materials for mathematically gifted students. Second, when the students first meet the challenge of solving a problem, they observed, analyzed and speculated it with their prior knowledge. Third, students thought deductively and analogically in the process of drawing a conclusion based on observation. Fourth, students thought critically in the process of refuting the speculation.

From the result of this study, the following suggestions can be supported.

First, it is necessary to develop Teaching-Learning materials sustainedly for mathematically gifted students.

Second, there needs a valuation criteria to analyze how learning materials were contributed to increase the mathematical ability.

Third, there needs a follow up study about what characteristics of gifted students appeared.

* ZDM Classification : D40, U30
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40
* Key words : Fermat's point, mathematically gifted student
† corresponding author