

## SageMath를 활용한 ‘대화형 공학수학 실습실’의 개발과 활용

이 상 구 (성균관대학교)

이 재 화 (한림대학교)<sup>†</sup>

박 준 현 (성균관대학교)

김 용 기 (성균관대학교)

본 연구에서는 ‘대화형(interactive) 공학수학 실습실’의 개발 과정과 내용 및 활용을 다룬다. 본 실습실에는 공학수학 전 범위에 걸쳐서 각 장별로 하나의 html 파일을 활용하여 공학수학 예제 및 연습문제, SageMath 명령어를 실행할 수 있는 SageMath 셸, 장별 요점 강의 녹화 파일로 연결되는 링크가 포함되어있다. 또한 기존에 만들어 놓은 SageMath 명령어가 동시에 제공되므로 실습 때마다 매번 명령어를 따로 입력해야하는 번거로움 없이 마우스로 [실행(Evaluate)]을 클릭하면서 미리 입력된 코드를 실행하고, 그와 유사한 다른 문제에 대하여는 함수와 조건을 바꾸면서 바로 사용할 수 있도록 하였다. 이렇게 웹 주소를 이용하여 공학수학을 지도하는 실습실의 장점은 첨단 모바일 기기의 사용이 증가하고 있는 추세에 맞추어 각 장 별 실습내용을 시간과 장소의 제약 없이 쉽게 프로그래밍을 학습 및 실행이 가능하므로 실습 효과를 높일 수 있다는 것이다. 본 실습실은 이론과 실습이 병행되어야 하는 공학수학 강의에서 학생들이 언제 어디서나 손쉽게 이용할 수 있으므로 공학수학 강좌의 효과적인 실습실 모델이 될 수 있다.

### I. 서론

공학수학<sup>1)</sup>은 공학과 과학의 여러 전공분야에 필요한 수학적 기초를 제공하는 학문이다. 따라서 공학수학은 선형대수, 미분방정식, 라플라스 및 푸리에 변환, 벡터미적분, 편미분방정식, 복소해석 등 공학과 과학의 다양한 문제를 해결하는 데 사용되는 광범위한 주제들을 다룬다. 그러나 고교 수학교육과정의 변화와 대학의 다양한 입시 전형으로 인해 공과대학에 입학하는 학생들의 수학 실력의 편차가 커졌다. 이에 따라 대학에서는 공학수학 교과과정을 효율적으로 운영하기 위한 노력이 필요하다. 공학수학을 수년간 가르쳐온 본 연구진의 전담 교수가 매 학기 말 공학수학을 수강하면서 느낀 점들을 학생들로부터 취합한 결과, 학생의 입장에서 공학수학은 서로 연관이 없는 독립적인 내용들을 공부한다는 의견이 많았다. 또한 내용을 전개할 때 수학의 엄밀성만 추구하다보면 그 내용이 가지고 있는 물리적인 의미보다는 증명이나 정형화된 문제 풀이에 치우친 재미없는 과목이 되기 쉽다. 이를 극복하기 위한 다양한 선행연구가 있어왔다.

특히 공학인증제도(ABEEK)의 도입으로 기존의 수학 전공학생들을 위한 교육과정이 공학 전공생들에게 맞지 않아 공학 전공생들을 위한 대학수학교육과정 개발에 대한 연구의 필요성이 꾸준히 대두되었으며, 김성욱(2000), 김성욱(2005), 김성욱 외(2009)는 일련의 연구를 통해 공학 분야 전공과정을 분석하고 공학전공자를 위한 대학수

\* 접수일(2016년 4월 22일), 심사(수정)일(1차: 2016년 5월 23일, 2차: 2016년 6월 9일), 게재 확정일(2016년 6월 10일)

\* ZDM 분류 : M55, I75, I85

\* MSC2000 분류 : 97C80, 97U70

\* 주제어 : 공학수학(공업수학), 실습실, 모델, 세이지(SageMath)

<sup>†</sup> 교신저자 : jhlee2chn@hallym.ac.kr

1) Engineering Mathematics. 공업수학으로 번역되기도 한다. 본 논문에서는 공학수학으로 통일하였다.

학교교육과정 및 교과목 개발을 시도하였다. 특히 공학을 비롯한 수학 외 전공에서 수학은 도구로 여겨지고 있으므로, 중요한 수학적 관점에서 공학 교육과정에 활용되고 있는 내용을 충실하게 포함하고, 모든 과목에 걸쳐서 매우 명료하게 기술되도록 모듈화 하는 데에 초점을 맞추었다. 공학인증제에 관한 자세한 내용은 2008년 대한수학회 소식지에 소개되었다.<sup>2)</sup> 정수연·송영무(2011)는 공학전공 교과내용의 연관성 및 수학 교과내의 선수학습 내용과의 연관성을 이용하여 공학수학 학습자료를 개발하여 학생들에게 공학수학 학습에 대한 동기를 부여하였다. 그리고 정애경 외(2011)는 전문대학 공학계열 학생들의 공학수학에서 요구되는 기초적인 수학 지식의 부재를 인식하고, 협력적 문제해결을 위한 수업모형을 설계하였으며, 최경미(2014)는 미적분학 다음 단계로 이어지는 공학수학 1에서 미적분학 복습시험을 실시하여, 학생들 스스로 미적분학을 복습하도록 하는 공학수학 수업모형을 제시하였다.

언급한 선행연구에서 제시한 공학수학 교육 방안 중 본 연구진이 주목한 내용은 다음과 같다.

① “교수와 학생간의 인터랙티브한 학습자 중심의 수업과 자신에게 적합한 수준별 학습을 제공할 수 있는 온라인 교수/학습 시스템의 개발이 뒷받침되어야 한다. 또한 다양성을 수용하여 내실 있는 공학수학 교육이 이루어지기 위해서는 관련 수학교과목별로 체계적인 콘텐츠를 구축해야 한다.” (미적분학 콘텐츠, 선형대수 콘텐츠, 이산수학 콘텐츠, 미분방정식 콘텐츠, 확률 및 통계 콘텐츠, 벡터해석학 콘텐츠, 수치해석 콘텐츠) (전재복, 2008)

② “매주 강의주제에 맞는 온라인 콘텐츠를 제공하여 학생들이 학습 목표와 학습 속도에 따라 수준별로 학습하도록 돕는다. 수학의 기본 개념과 반복훈련을 통해서 기초 수학 능력을 높이고, 최근 온라인과 모바일 환경에 익숙한 학습자들이 자기 주도적으로 학습할 수 있는 환경을 제공하는 것이다.” (정애경 외, 2011)

김성옥 외(2009)는 MATLAB을 활용한 교재와 과목을 개발하여 학생들에게 수학 내용의 이해도를 높이고자 하였으나, MATLAB 사용의 단점(비용, 언어 환경, 명령어 숙지, 모바일 환경 사용 등)으로 말미암아 여러 한계가 있어 보인다. 이에 본 연구진은 이미 세계 최고 수준의 모바일 인프라를 갖추고 있는 한국의 장점을 이용하여 시간과 장소에 구애받지 않고 웹(Web) 도구를 이용하여 누구나 무료로 수학 연산 및 시뮬레이션 실습을 할 수 있는 공학수학 실습실<sup>3)</sup>을 개발하였다. 실습실에 제시된 온라인 콘텐츠를 사용하면 학습자의 학습 목표와 속도에 따라 수준별로 반복 학습을 할 수 있으며, 같은 유형의 다양한 문제를 해결하게 되어 기초 수학 능력을 높일 수 있다. 또한 모바일에서도 언제나 자기 주도적으로 학습할 수 있다.

본 연구진은 이미 수 년 동안 공개 소프트웨어인 SageMath<sup>4)</sup>를 기반으로 자체적으로 구축한 연산서버를 통해, 미적분학, 선형대수학 및 통계학 교육을 위한 웹 콘텐츠와 모바일 콘텐츠를 개발하였고, 이들은 모두 교재에 반영되어 교육에 꾸준히 활용되고 있다(고래영 외, 2009; 이상구·이재화·김경원, 2014; 이상구 외, 2015; Lee et al, 2014). 또한 콘텐츠에 사용된 명령어를 미리 공개함으로써 앞서 언급한 MATLAB과 같은 유료 소프트웨어의 사용으로 생길 수 있는 단점은 모두 해결하였다. 이렇게 개발된 공학수학 실습실을 활용하므로 기존의 판서 형식의 강의보다 훨씬 절약된 시간은 교수자가 공학 수학 이론의 개념과 원리를 설명하고 토론하는데 사용할 수 있으므로 학생들이 깊이 있게 생각하고 응용할 수 있고, 배운 내용이 실제로 어떻게 활용되는지를 볼 수 있어 공학 전공으로 진입하는 데 어려움을 줄여줄 수 있을 것이다.

<sup>2)</sup> 이상구·황인성 (2008), 성균관대학교의 공학인증제와 관련한 수학교육 커리큘럼—공학인증(ABEEK)과 대학의 수학강좌, 대한수학회 소식 제 121호, 10-15. <http://mathnet.kaist.ac.kr/file/news121.pdf>

<sup>3)</sup> <http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/>

<sup>4)</sup> <http://www.sagemath.org/> 파이어폭스 및 크롬, 사파리 등의 브라우저에서 무료로 모든 실습이 실시간으로 가능하다.

본 연구에서는 그동안 축적된 SageMath 활용의 기술력을 공학수학에 적용하여 공학수학 실습실을 개발한 과정과 그 내용을 소개한다.

## II. 본론

### 1. 공학수학 실습실의 기본 구조와 웹 주소

본 연구진이 개발한 공학수학 실습실은 각 장별로 하나의 html 파일로 구성되어 있다. 각 html 파일에는 공학수학 예제 및 연습문제, SageMath 명령어를 실행할 수 있는 SageMath 셸, 장별 요점 강의 녹화 파일로 연결되는 링크가 포함되어 있다. 그리고 SageMath 명령어의 실행은 아래 <표 II-1>과 같은 계산 서버를 이용하여 수행한다.

<표 II-1> 계산 서버와 개발된 공학수학 실습실



공학수학 실습실은 아래 <표 II-2>에 제시된 것과 같이 대학 공학수학 강좌에 맞는 대부분의 콘텐츠를 모두 포함하여 구성되어 있다. 물론 학생의 수준과 강좌의 특징에 따라 교수자 (또는 학습자)가 내용의 일부를 선별적으로 선택하여 강의 (또는 실습)하여도 된다.

&lt;표 II-2&gt; 공학수학 장별 내용과 실습실 웹사이트 주소

장 별	실습 내용	실습실
1	행렬과 선형대수	<a href="http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/1_chap1.html">http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/1_chap1.html</a>
2	미분방정식의 기초	<a href="http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/1_chap2.html">http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/1_chap2.html</a>
3	1계 미분방정식	<a href="http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/1_chap3.html">http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/1_chap3.html</a>
4	2계 미분방정식	<a href="http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/1_chap4.html">http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/1_chap4.html</a>
5	고계 미분방정식	<a href="http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/1_chap5.html">http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/1_chap5.html</a>
6	연립 미분방정식	<a href="http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/1_chap6.html">http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/1_chap6.html</a>
7	급수해법	<a href="http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/1_chap7.html">http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/1_chap7.html</a>
8	라플라스 변환	<a href="http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/1_chap8.html">http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/1_chap8.html</a>
9	벡터미분	<a href="http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/2_chap9.html">http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/2_chap9.html</a>
10	벡터적분	<a href="http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/2_chap10.html">http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/2_chap10.html</a>
11	푸리에급수 및 변환	<a href="http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/2_chap11.html">http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/2_chap11.html</a>
12	편미분방정식	<a href="http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/2_chap12.html">http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/2_chap12.html</a>
13	복소함수	<a href="http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/2_chap13.html">http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/2_chap13.html</a>
14	복소적분	<a href="http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/2_chap14.html">http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/2_chap14.html</a>
15	급수와 유수	<a href="http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/2_chap15.html">http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/2_chap15.html</a>
16	등각사상	<a href="http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/2_chap16.html">http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/2_chap16.html</a>

본 실습실은 오픈 소스인 파이썬(Python) 기반의 SageMath 언어를 이용하여 모든 실습이 가능하도록 만들었으므로 기존의 상업용 공학수학 소프트웨어(Mathematica, Maple, MATLAB 등)가 가진 한계점(비용, 소프트웨어의 유지 및 보수, 프로그래밍 언어 학습 등)을 극복하여 누구나 시간과 장소의 제약 없이 무료로 활용할 수 있다. 또한 본 연구진의 선행연구논문(이상구 외, 2015)에서 사용한 방법과 같이 예제와 설명 및 기존에 만들어 놓은 SageMath 명령어를 동시에 제공하여 실습 때마다 매번 명령어를 따로 입력해야 하는 번거로움 없이 마우스로 [실행(Evaluate)]을 클릭하면서 미리 입력된 코드를 실행하고, 그와 유사한 다른 문제에 대하여는 함수와 조건을 수정하여 바로 사용할 수 있도록 하였다. 이렇게 웹 주소를 이용하여 공학수학을 지도하는 실습실의 장점은 스마트 폰과 같은 휴대용 모바일 기기의 사용이 증가하고 있는 추세에 맞추어 각 장 별 실습내용을 시간과 장소를 불문하고 쉽게 프로그래밍을 학습, 수정 및 실행이 가능하므로 실습 효과를 높일 수 있다는 것이다. 효과적인 공학수학 강의를 위해서는 이론과 실습을 병행하여야 하는데, 컴퓨터 실습을 위해서는 Maple, Mathematica, MATLAB 등 고가의 프로그램이 필요하다. 그러나 정작 실습수업을 수강하는 학생들은 이런 패키지를 자유롭게 이용하지 못하고 있는 실정이다. 따라서 SageMath는 기존의 유료 소프트웨어를 수입하여 사용할 때의 현실적인 어려움을 제거할 뿐만 아니라 많은 학생들이 손쉽게 이용할 수 있을 것이다.

물론 현재까지 응용수학계 및 공학계 우리나라 대학원 과정에서는 고가의 국외 소프트웨어인 MATLAB이 가장 많이 사용되고 있지만, MATLAB은 미국에서조차 학부의 수학 교육에 보편적으로 쓰이는 도구가 아니다. 학부의 수학교육에서는 이보다 좀 더 보편적이고 비용이 저렴하며, 특히 특정 컴퓨터 언어가 아니라 Python 기반의 오픈소스 프로그램이 대세이다.<sup>5)</sup> 본 연구에서 사용한 Python 언어 기반의 SageMath는 비교적 복잡하지 않은 코드만으로도 많은 고급 수학 계산을 할 수 있고, 이 언어 전체가 무료로 개발 및 제공되고 있어 대학 학부 수준의 계산을 위해서는 충분히 유용한 언어이다. 이 도구의 상대적 수월성에 대하여는 이미 많은 보고가 있

<sup>5)</sup> <http://cacm.acm.org/blogs/blog-cacm/176450-python-is-now-the-most-popular-introductory-teaching-language-at-top-us-universities>

었다. 원고 'Bye Matlab, hello Python, thanks Sage'<sup>6)</sup>, 'Open source is now ready to compete with Mathematica for use in the classroom' (2016년 2월 10일)<sup>7)</sup>과 'Why Sage'<sup>8)</sup>에서 보듯이, 이미 미국에서 SageMath는 MATLAB, Mathematica와 차별화된 장점을 가진 주류의 도구로 인정받았다. SageMath 노트북 서버가 설치된 대학의 리스트(Sage Notebook Servers)<sup>9)</sup>만 보아도 알 수 있듯이 SageMath는 MIT를 포함하여, 아이오와 주립대, 워싱턴 대, 켄터키 주립대, 매사추세츠 주립대, 뉴질랜드의 캔터베리(Canterbury) 대, 네덜란드 라이덴(Leiden) 대 등 이미 미국, 유럽, 러시아, 중국, 한국, 호주, 남미 등 전 세계 수백 개의 대학과 수십만 명의 학생들이 가장 싸고 편리하게 사용하는 도구로 자리 잡았다. 그리고 SageMath가 가진 공개(Publish) 기능으로 실제 교수 학습 과정에서 생산된 결과물이 웹 상에서 쉽게 공유되어 학생들이 학습하다가 막힐 때 사용할 수 있는 자료가 MATLAB과 같은 상업적인 어떤 소프트웨어보다 풍부한 것도 큰 장점이다.

## 2. 공학수학 실습실의 활용 예시

아래는 본 연구진이 개발한 실습실에서 활용 가능한 공학수학 예시의 일부이다. 이 밖에도 라플라스 변환, 벡터미적분, 복소해석 등의 실습이 가능하다(<표 II-2>참조).

① 미분방정식 (2계 미분방정식) [http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/1\\_chap4.html](http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/1_chap4.html)

미분방정식  $y'' - 3y' - 4y = 12e^{2x}$ 의 일반해를 구하라.

**풀이**  $y'' - 3y' - 4y = 0$ 의 특성방정식  $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda + 1)(\lambda - 4) = 0$ 에서 특성근은  $\lambda = -1, \lambda = 4$ 이므로 일반해는  $y_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x}$ 이다.

$r(x) = 3e^{2x}$ 이므로 특수해  $y_p(x) = Ce^{2x}$ 이라 하면  $y_p'(x) = 2Ce^{2x}, y_p''(x) = 4Ce^{2x}$ 을 대입하여 다음을 얻는다.

$$y_p''(x) - 3y_p'(x) - 4y_p(x) = 4Ce^{2x} - 6Ce^{2x} - 4Ce^{2x} = 12e^{2x}$$

양변의 계수를 비교하면  $-6C = 12$ 에서  $C = -2$ 이다. 특수해는  $y_p(x) = -2e^{2x}$ 이다. 따라서 일반해는  $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x} - 2e^{2x}$ 이다.

Sage 코딩

```

1 x = var('x')
2 y = function('y', x)
3 solve(diff(y, x, 2)-3*diff(y, x) -4*y == 12*exp(2*x), y)

```

실행(Evaluate)

Language: Sage  Syntax Highlighting

Permalink, Shortened Temporary Link

$k1*e^{(4*x)} + k2*e^{(-x)} - 2*e^{(2*x)}$

Powered by **SAGE**

6) <https://vnoel.wordpress.com/2008/05/03/bye-matlab-hello-python-thanks-sage/>

7) <http://sagemath.blogspot.kr/2016/02/open-source-is-now-ready-to-directly.html>

8) <http://www.sagemath.org/library-why.html>

9) <https://wiki.sagemath.org/sagenb>

② 선형대수 (행렬식) [http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/1\\_chap1.html](http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/1_chap1.html)

다음 행렬의 행렬식을 계산하라.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \\ 1 & -8 & -2 \end{bmatrix}$$

풀이  $\det A = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = (-4)(-2) - (1)(-3) = 11$

$$\det B = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \\ 1 & -8 & -2 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 96 - 0 - (-40) - (16) = 122$$

Sage 코딩

```
1 A=matrix(QQ, 2, 2, [-4, 1, -3, -2])
2 print A.det() # 행렬식 계산
3 B=matrix(QQ, 3, 3, [5, 2, 3, -4, 0, 1, 1, -8, -2])
4 print B.det() # 행렬식 계산
```

실행(Evaluate)

Language: Sage

Syntax Highlighting

[Permalink, Shortened Temporary Link](#)

11  
122

Powered by **SDGE**

③ 편미분방정식 [http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/2\\_chap12.html](http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/2_chap12.html)

**9-11** 주어진 보조조건을 이용하여 방정식  $3u_x + 4u_y$

$= 0$ 의 해를 구하고, 그 결과를 그래프로 나타내라.

9  $u(x, 0) = \sin 2x$

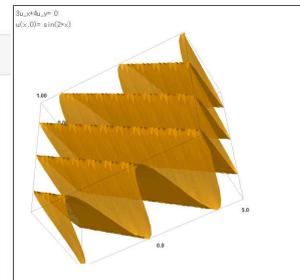
Sage 코딩

```
1 x, y = var('x, y')
2 u(x, y) = sin((4*x-3*y)/2)
3 ux=diff(u(x, y), x);uy=diff(u(x, y), y)
4 print "3u_x+4u_y=", 3*ux+4*uy
5 print "u(x,0)=", u(x,0)
6 plot3d(u, (x, -5, 5), (y, -5, 5), color='orange', opacity=0.8)
```

실행(Evaluate)

Language: Sage

Syntax Highlighting



Powered by **SDGE**

④ 푸리에 급수 [http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/2\\_chap11.html](http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/2_chap11.html)

$\phi(x) = 1$  ( $0 < x < l$ )을 푸리에 사인 급수로 나타내라.

풀이 식 (11.1.3)을 이용하여 푸리에 사인 계수를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{l} \int_0^l 1 \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x dx = -\frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{l} x \Big|_0^l \\ &= -\frac{2}{n\pi} (\cos n\pi - 1) = \frac{2}{n\pi} \{1 - (-1)^n\} \end{aligned}$$

따라서  $B_n$ 은  $n$ 이 짝수이면 0이고, 홀수이면  $\frac{4}{n\pi}$ 이다. 이를 이용하여  $\phi(x) = 1$ 의 푸리에 사인 급수를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$1 = \frac{4}{\pi} \left[ \frac{\sin \frac{\pi}{l} x}{1} + \frac{\sin \frac{3\pi}{l} x}{3} + \frac{\sin \frac{5\pi}{l} x}{5} + \frac{\sin \frac{7\pi}{l} x}{7} + \dots \right] \quad (11.1.4)$$

CAS 이를 Sage로 살펴보면 다음과 같다. 여기서 푸리에 급수의 항이 증가할수록 그 합이 점차  $\phi(x) = 1$ 에 가까워지는 것을 알 수 있다.

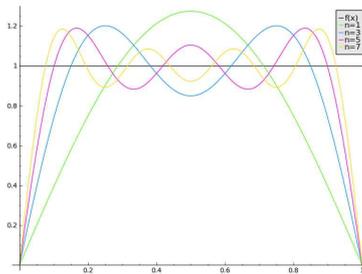
Sage 코딩

```

1 var('x, n, l')
2 f(x) = 1
3 def b(n,l):
4     coeff = 2/l*integral(f(x)*sin(n*pi*x/l), (x,0,l))
5     return coeff
6
7 def FS(n,l):
8     return sum(b(i,l)*sin(i*pi*x/l), i, 1, n)
9 # l = 1로 놓음
10 q=sum([plot(FS(n,l), (x,0,l), color=hue((n+1)/7.0), legend_label='n'+str(n))
11 for n in range(1,9,2)])
12
13 p=plot(f(x), (x, 0, l), color='black', legend_label='f(x)')
14 [p*q].show()

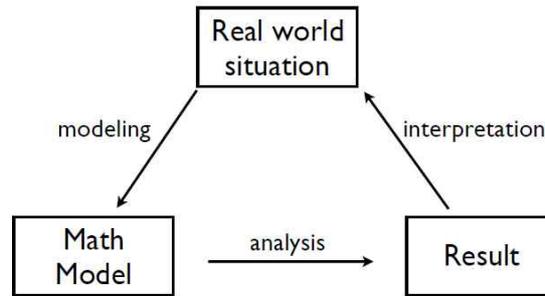
```

실행 (Evaluate)

Language: Sage  
 Syntax Highlighting

## 3. 대화형 공학수학 실습실의 장점

공학 수학에서는 학생들에게 주어진 문제의 해법뿐만 아니라 현실에서 접하는 여러 상황들을 수학적으로 표현하는 모델링과 그 모델을 해석하여 구한 해를 현실의 문제에 비추어 분석하는 능력 또한 가르쳐야 한다. 이를 위해서는 아래 [그림 II-1]에 나와 있는 것처럼 모델링, 해석, 그리고 분석의 세 분야가 교육 과정 내에서 조화롭게 이루어져야 한다.



[그림 II-1]

하지만 기존의 교과서에서 볼 수 있는 문제 풀이 위주의 교육으로는 이러한 종합적인 사고 능력을 배양하는 것이 매우 힘들다. SageMath를 이용한 공학 수학 실습실의 활용은 학생들로 하여금 결과를 눈으로 보고 여러 다른 상황을 손쉽게 시도해 볼 수 있게 함으로써 학생들에게 모델링과 분석에 대한 능력을 키우는데 큰 도움을 준다. 다음은 S대 공학수학 강의에서 사용된 예로 이를 통해 본 SageMath를 이용한 공학수학 실습실을 활용한 강의를 수강한 학생들이 공학수학 내용을 어떻게 이해하고 활용하였는지 살펴보자. 학생들은 이전 강의에서 외부의 온도( $T_e$ )가 일정할 때 집안의 온도( $T$ ) 변화가 다음과 같은 식에 의해 결정된다는 것을 배웠다.

$$\frac{dT}{dt} = k(T_e - T) \quad (1)$$

또한 내부의 온도가 외부의 온도를 따라가는 정도는 집안의 보온성을 나타내는 계수  $k$ 에 의해 결정된다는 것도 알고 있다. 이제 학생들은 외부 온도가 더 이상 일정하지 않은 경우를 다루게 된다. 외부의 온도 변화에 대한 모델을 우선 다음과 같이 만들고<sup>10)</sup> 위 식을 이용하여 이에 따른 집안의 온도 변화를 구한다.

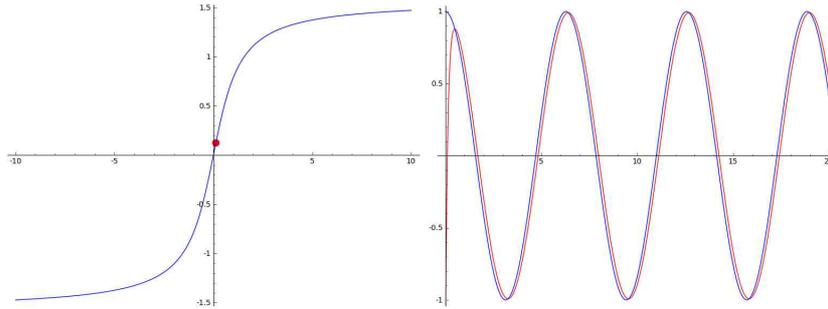
$$T_e = \cos \omega t \quad (2)$$

[그림 II-2]의 SageMath 모듈<sup>11)</sup>은 학생들이 직접 문제를 풀기 전 계수  $k, \omega$ 를 변화시키며 외부의 온도 변화에 따른 집안의 내부 온도가 어떻게 변하는지 그림으로 나타내준다. 다양한 계수 값에 대해 외부와 내부 온도의 관계를 살펴보며 학생들은 자신들이 세운 모델이 그들의 물리적 직관과 부합하는지 파악한다.



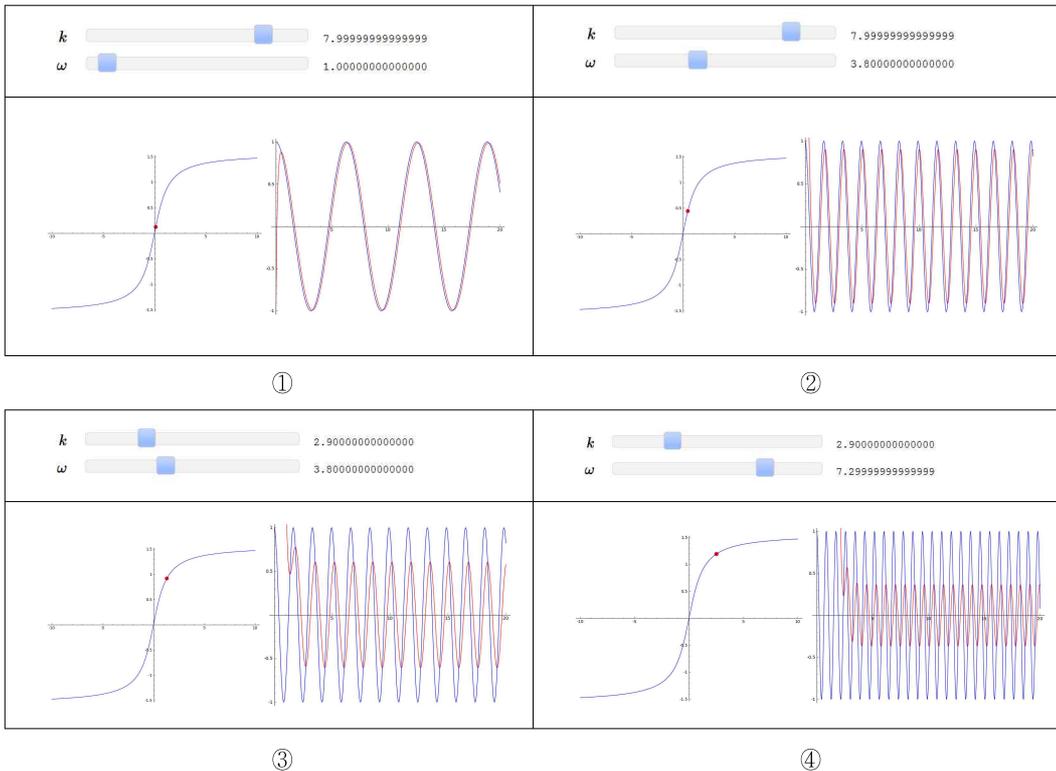
<sup>10)</sup> 일반적인 경우는  $T_e = A + B\cos(\omega t - \delta)$ 로 나타나지만 계산의 편의를 위해 식 (2)를 사용하였다.

<sup>11)</sup> <http://matrix.skku.ac.kr/E=Math/Newton-Law-Cooling.htm>



[그림 II-2]

우선  $k$ 가 큰 경우 (집의 보온성이 떨어지는 경우) 내부의 온도가 외부의 온도에 매우 가깝게 변화하는 것을 알 수 있다. ([그림 II-3]의 ①, ② 참조) 반면  $k$ 가 작은 경우 내부의 온도는 외부 온도에 비해 작은 범위에서 변화하며 외부 온도의 변화를 바로 따라가기 보다는 시간을 두고 따라감을 알 수 있다. ([그림 II-3]의 ③, ④ 참조)



[그림 II-3]

마찬가지로 계수  $\omega$ 에 대해서도 동일한 실험을 하면 그에 대한 영향을 파악할 수 있다. 이와 같은 활동이 끝나면 학생들은 식 (1)의 해를 구한다. 이때 정상해(steady-state solution)와 위상 지연(phase lag)은 다음과 같다.

$$T = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{k}\right)^2}} \cos(\omega t - \phi), \quad (3)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{k}\right) \quad (4)$$

학생들은 SageMath 모듈을 통해 얻은 물리적 직관이 식 (3)에 어떻게 드러나는지 살펴보고 해의 분석 능력을 키우게 된다. 계수  $k$ 의 값이 커지면 식 (3)의 분모가 작아지며 이는 정상해의 진폭이 커짐을 의미한다. 또한 위상 지연 값은 식 (4)로부터 작아지게 되며 (SageMath 모듈에서 직접 확인 가능) 이는 해를 구하기전 SageMath 모듈을 통해 파악한 것과 일치함을 알 수 있다. 이 결과를 실제 문제에 적용시켜보면 집의 보온성이 떨어지는 경우 집안의 온도는 외부의 온도 변화에 민감하게 변화하며 이는 두 온도 변화의 차이가 작고 내부의 온도가 외부의 온도를 빠르게 따라감을 의미한다.

이와 같이 대화형 공학 수학 실습실은 실제 현상을 해석하는데 필요한 다양한 조건의 경우에 대해 손쉽게 그 결과를 관측하고 분석할 수 있게 함으로써 공학을 전공하는 학생들에게 필요한 모델링, 해석, 그리고 분석과 같은 종합적인 사고 능력을 키우는데 큰 도움을 준다. 본 연구진은 최근 저자의 강의를 수강하는 수강생들을 대상으로 대화형 공학수학 실습실을 사용하도록 한 후 <부록>과 같이 설문조사를 실시하였다. 그 결과 약 95% 정도의 수강생들이 본 실습실이 공학수학 내용 이해에 도움이 되며, 공학수학 학습에 효과적으로 사용가능하다고 답하였다. 또한 공학수학 학습에서 본 실습실 활용을 통해 계산 능력 향상과 실제 문제 해결에 자신감을 갖게 되었다는 의견이 많았다. 그리고 실습된 결과물을 웹 상에 쉽게 공개할 수 있어 학생들이 학습하다가 막힐 때마다 검색을 통하여 참조할 수 있는 자료가 풍부한 것이 큰 장점이었다는 의견이 많았다. 본 공학수학 실습실은 공학수학 강좌의 전 범위를 다루며 시간과 장소의 제약 없이 쉽게 프로그래밍을 학습 및 실행이 가능한 본격적인 웹 실습실로 공학수학 강좌의 효과적인 실습실 모델이 될 수 있다고 여겨진다. 추후 공학수학 강의에 구체적으로 적용하면서, 실제 학생들의 공학교육에 어떤 긍정적인 영향을 미쳤는지에 대한 추가 연구를 통하여 개발된 실습실의 효과적인 이용이 더 높은 교육효과를 볼 수 있도록 지속적으로 연구 및 실습실 콘텐츠와 공학 예제 등의 진화가 진행될 것이다.

### III. 결론

공학수학은 공학과 과학의 여러 전공분야에 필요한 수학적 기초를 제공함과 동시에 그 주제의 광범위함 및 현실 문제에 대한 모델링 능력 및 분석 능력의 개발도 요구되어 이론과 실습이 병행되어야 하는 강의하기 어려운 과목이기도 하다. 이를 해결하기 위하여 공학수학 교수학습과 관련된 많은 선행 연구 및 소프트웨어를 활용한 강좌개발 등 여러 노력이 있었지만 여전히 어려움과 한계가 남아있다.

본 연구에서는 ‘대화형 공학수학 실습실’의 개발 과정과 그 활용을 다루었다. 구체적으로는 학생들이 모바일 기기를 통해 무료로 시간과 공간의 제약 없이 학습 및 실습이 가능한 양질의 실습실을 오픈 소스 프로그램인 SageMath를 활용하여 개발하고 실습한 내용을 소개하였다. 개발된 공학수학 실습실은 유료 소프트웨어의 단점을 극복하였고, 소프트웨어 활용을 위해 필요한 고급 파이썬(Python) 언어 습득 과정을 일거에 해결하였으며, 이

에 더하여 타이핑하는 수고마저도 없이 바로 실습이 가능하도록 하였다. 이를 활용하면 공학수학에서 다루는 다양한 주제의 수학적 내용의 습득에 보태어 계산과 시뮬레이션을 추가의 수고 없이 시행-실습하면서 시각적, 직관적으로 이해하고 분석할 수 있다. 특히 계산 및 코딩과 타이핑 과정에서 절약된 시간은 공학 수학이 다루는 광범위한 주제에 대하여 질문하고 답하면서 깊이 이해하여 활용하는데 사용된다. 이 실습실은 공학수학 강좌의 효과적인 실습실 모델의 하나가 될 수 있다고 판단한다. 특히 본 실습실은 이론과 실습이 병행되어야 하는 공학수학 강의에서 학생들이 언제 어디서나 손쉽게 이용하도록 클라우드 컴퓨팅 환경을 활용하여 노트북 PC 뿐만 아니라, 스마트폰, 갤럭시 탭, 아이패드 등을 포함한 다양한 모바일 기기에서 가능하도록 디자인되었다.

## 참 고 문 헌

- 고래영 · 김덕선 · 박진영 · 이상구 (2009). 모바일 환경에서의 Sage-Math의 개발과 선형대수학에서의 활용, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **23(4)**, 1023-1041.
- Ko, R.-Y., Kim, D.-S., Bak, J.-Y. & Lee, S.-G. (2009). Development of Mobile Sage-Math and its use in Linear Algebra, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, **23(4)**, 1023-1041.
- 김성욱 (2000). 대학에서의 공학전공자를 위한 수학교육, 한동대학교 한동논문집, **3(1)**, 19-32.
- Kim, S.-O. (2000). A study on college mathematics education for engineering students, *Handong J. of Handong University*, **3(1)**, 19-32.
- 김성욱 (2005). 공학전공자를 위한 대학수학교육과정과 교수, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **19(2)**, 409-416.
- Kim, S.-O. (2005). Development of a series of mathematics courses and its curriculum for engineering students, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, **19(2)**, 409-416.
- 김성욱 · 안경모 · 이종원 (2009). 공학전공자를 위한 대학수학교육과정 및 교과목 개발 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **23(4)**, 961-976.
- Kim, S.-O., Ahn, K.M. & Lee, J.W. (2009). A study for the development of curriculum and courses for mathematics for engineering majors, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, **23(4)**, 961-976.
- 이상구 · 이궁희 · 최용석 · 이재화 · 이지영 (2015). R을 활용한 '대화형 통계학 입문 실습실' 개발과 활용, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **29(4)**, 573-588.
- Lee, S.-G., Lee, G.-H., Choi, Y.-S., Lee, J.H. & Lee, J.J. (2015). Interactive Statistics Laboratory using R and Sage, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, **29(4)**, 573-588.
- 이상구 · 이재화 · 김경원 (2014). [빅북] 선형대수학, 교보출판사.
- Lee, S.-G., Lee, J. H. & Kim, K.-W. (2014). [BigBook] *Linear Algebra*, Kyobo Book.  
<http://matrix.skku.ac.kr/2015-Album/BigBook-LinearAlgebra-SGLee-New-2015.pdf>
- 전재복 (2008). 바람직한 대학기초수학 교육과정 운영방안—공학기초수학을 중심으로, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **22(4)**, 399-416.
- Jun, J.-B. (2008). Desirable Management of Basic Mathematics Curriculum in College, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, **22(4)**, 399-416.
- 정수연 · 송영무 (2011). 대학 공업수학 학습자료 개발 및 효과, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **25(2)**, 361-379.

- Jeong, S. & Song, Y. (2011). Investigation of the Effect of a Learning Program for University Engineering Mathematics, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, **25(2)**, 361-379.
- 정애경 · 이상희 · 홍유나 · 김능연 (2011). 협력적 문제해결능력 신장을 위한 공학수학 수업모형의 설계원리 개발, *전자공학회논문지*, **48(1)**, 36-44.
- Chung, A.K., Yi, S.-H., Hong, Y. & Kim, N.-Y. (2011). Development of The Design Principles for Engineering Mathematics Teaching Model for Improving Students' Collaborative Problem Solving Abilities in College, *Journal of the Institute of Electronics Engineers of Korea*, **48(1)**, 36-44.
- 최경미 (2014). 미적분학 복습시험을 포함하는 공업수학 수업모형 연구, *공학교육연구*, **17(2)**, 3-10.
- Choi, K. (2014). A Class Model of Engineering Mathematics Including a Calculus Review Test, *Journal of Engineering Education Research*, **17(2)**, 3-10.
- Lee, S.-G., Kim, E.-K., Ham, Y., Kumar, A., Beezer, R., Vu, Q.-P., Simon, L. & Hwang, S.-G. (2014). *Calculus with Sage*, KyungMoonSa. <http://matrix.skku.ac.kr/Cal-Book>

## Interactive Engineering Mathematics Laboratory

**Sang-Gu Lee**

Department of Mathematics, Sungkyunkwan University, Suwon 440-746, Korea

E-mail : sglee@skku.edu

**Jae Hwa Lee<sup>†</sup>**

Department of Mathematical Finance & Information Statistics, Hallym University, Chuncheon 200-702, Korea

E-mail : jhlee2chn@hallym.ac.kr

**Jun H. Park**

School of Mechanical Engineering, Sungkyunkwan University, Suwon 440-746, Korea

E-mail : jun.park@skku.edu

**Eung-Ki Kim**

Department of Mathematics, Sungkyunkwan University, Suwon 440-746, Korea

E-mail : upusup@skku.edu

This study deals with the content that was developed by the authors and the utilization of the 'Interactive Engineering Math Laboratory (IEmath Lab).' IEmath Lab provides online review lectures as well as a wide range of examples and exercises from the curriculum of engineering mathematics courses. The lectures come with pre-coded Python-based SageMath cells through which students can run and modify the code directly from this free laboratory. IEmath Lab is accessible via mobile devices so that the students can use it anywhere, anytime for maximum learning effectiveness and achievement. IEmath Lab would be an ideal tool for the effective learning and teaching of engineering mathematics, which combines theory and practice.

---

\* ZDM Classification : M55, I75, I85

\* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C80, 97U70

\* Key Words : Engineering Mathematics, Laboratory, Model, SageMath

<sup>†</sup> Corresponding author

## &lt;부록&gt;

**“대화형 공학수학 실습실”에 관한 의견 조사**

본 설문은 효과적인 공학수학 학습을 위하여 저희 연구진이 미적분학 실습실 <http://matrix.skku.ac.kr/Cal-Book/index.html>, 선형대수학 실습실 <http://matrix.skku.ac.kr/LA/>, 통계학 입문 실습실 <http://matrix.skku.ac.kr/2015-R-Statistics/R-Sage-Statistics-Lab-2.htm>에 이어 최근 개발한 “대화형 공학수학 실습실” <http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/>에 관한 평가 설문으로 학습자 여러분의 소중한 의견은 본 실습실을 개선하는데 소중한 활용될 것이며, 이외 다른 용도로 사용되지 않을 것임을 약속드립니다.

2016. 04 성균관대학교 이 상 구 교수

1. <http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/> 실습실이 공학수학 내용 이해에 도움이 되었나요? ( )

(1) 그렇다. (2) 아니다.

2. 본 실습실이 공학수학 학습에 효과적으로 사용 가능하다고 생각하십니까? ( )

(1) 그렇다. (2) 아니다.

만일 “(1) 그렇다”를 선택하셨다면 구체적으로 어느 부분이 효과적인가요? 아래 보기에서 1개를 선택해주시요. 만일 (2) 아니다를 선택하셨으면 그 이유는?

계산 능력 향상, 자기주도적 학습 능력 향상, 문제 해결 능력, 실제 문제 이해, 분석능력

3. 본 실습실을 활용한 공학수학 수업이 개설된다면 참여하고 싶으십니까? ( )

(1) 그렇다. (2) 아니다.

4. 아래 공학수학에서 다루는 분야 중 본 실습실이 좀 더 개선이 필요한 부분을 아래 보기에서 선택해주시요.

선형대수, 미분방정식, 라플라스변환, 벡터미적분학, 푸리에급수, 편미분 방정식, 복소해석

5. 본 실습실을 개선하기 위한 의견을 자유롭게 작성해주세요.

( )

다시 한 번 본 조사에 성심껏 응답해 주셔서 진심으로 감사드립니다.