

요인적재값 가중치를 사용한 평가 시스템에 대한 연구

이기원¹ · 심송용²

¹²한림대학교 금융정보통계학과

접수 2016년 7월 27일, 수정 2016년 8월 23일, 게재확정 2016년 8월 31일

요약

추상적 개념을 계량화 하기 위해 상대적으로 구체적인 여러 개의 문항을 조사한 후 이들 점수의 합 또는 이들 점수를 표준화한 후 합을 구하는 리커트 (Likert) 척도 (합산등급척도법)를 많이 사용한다. 합산등급척도법은 각 항목의 크기가 차이가 많이 나는 경우에 원자료가 아닌 표준화 값을 사용하여 합하기도 한다. 이와 같은 상황은 평가 시스템에서도 발생한다. 예를 들어 기초지방자치단체들을 발전정도에 따라 분류하기 위해 인구, 세수현황 등의 값을 표준화하고 이를 단순합산하여 분류의 기초로 사용할 수 있다. 본 연구에서는 위의 같은 추상적 개념의 수치화 또는 평가 시스템에 많이 적용되는 합산등급척도법의 문제점을 개선하는 한 방법으로 가중치를 자료에서 계산하는 데이터 구동 방식의 평가 시스템을 제안하고, 이 시스템을 실자료에 적용한다.

주요용어: 요인분석, 요인적재, 점수화 체계, 집락분석.

1. 서론

계량화할 추상적 개념 또는 평가시스템에서 얻어지는 평가점수를 X 라 하자. 이 때 일반적으로 많이 사용하는 방법은 추상적 개념의 정도를 등급화한 점수 또는 평가항목별 점수를 얻어 항목별 점수의 단순합 또는 표준화한 항목별 점수의 합으로 수치화하는 것이다. 이러한 방법의 추상적 개념의 수치화를 합산등급척도법 또는 리커트 (Likert) 척도라고 한다.

1.1. 가중합산등급척도

평가항목의 수를 p 라고 하고 i 번째 항목에 대한 점수를 X_i 라고 나타내면 리커트 척도에 의한 평가점수 X 는

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_p \quad (1.1)$$

가 된다. 리커트 척도의 적용 사례로는 Kim 등 (2016), 한국지방행정연구원 (Korea Research Institute for Local Administration, 2007) 외에 많은 사례가 있다.

리커트 척도를 사용할 때 측정 또는 평가하고자 하는 개념을 몇 개의 큰 영역으로 나누고 각 영역 내에서 구체적인 세부 영역으로 나누는 경우가 많다. 예를 들어 ‘행복지수’를 설계하고자 한다면 경제적인 요인, 가족관계 등을 포함한 몇 개의 영역을 설정하고, 각 영역 안에서 구체적인 문항을 설계하게 된다. 이 경우 경제적인 요인 안에 몇 개의 구체적인 문항이 포함될 것인지는 전적으로 지수를 설계하는 연구

¹ (200-702) 강원도 춘천시 한림대학길 1번지, 한림대학교 금융정보통계학과, 교수.

² 교신저자: (200-702) 강원도 춘천시 한림대학길 1번지, 한림대학교 금융정보통계학과, 교수.
E-mail: sysim@hallym.ac.kr

자의 주관에 의존하게 된다. 만일 경제적 요인에 더 많거나 작은 문항을 사용하면 경제적 요인은 좀더 많거나 작은 영향을 ‘행복지수’에 주게 되는데 이 문항의 개수에 대한 판단에 따라 더 크거나 작은 가중치를 주는 것과 같은 결과를 얻게 된다. 많은 경우 크론바흐 (Cronbach) α (Cronbach, 1951) 등을 사용하여 리커트 척도에 대한 정당성을 확보하지만 크론바흐 α 은 각 항목이 서로 양의 상관을 갖는지를 측정하는 도구이지 항목의 수에 대한 정당성을 담보하는 것은 아니다.

또한 각 점수 X_j ($j = 1, 2, \dots, p$)가 동일한 척도 (예 모든 X_j 가 5점 척도)가 아닌 경우 식 (1.1)를 사용하면 값이 큰 변수의 영향이 더 크게 반영되는 현상이 발생하며, 이런 경우 큰 값이 더 큰 영향을 주는 것이 타당하지 않다면 $Z_j = (X_j - \bar{X}_j)/S_j$ 를 사용하여

$$Z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_p \quad (1.2)$$

표준화 합산등급척도를 사용하는 것이 옳을 수 있다 (Sim, 2012). 표준화 합산등급척도는 항목의 수에 따라 값의 크기가 달라질 수 있으므로 표준화 값의 평균을 사용하는 경우도 많다 (Wilkinson과 Pickett, 2009).

리커트 합산등급척도법을 사용하는 경우 각 항목에 대한 가중치가 모두 1로 같아서 각 항목이 동일한 영향을 미치거나 항목값의 크기에 따라 각 항목의 전체 척도에 영향을 준다.

본 연구에서는 각 항목에 가중치를 주는 것을 포함하여

$$X = c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_pX_p \quad (1.3)$$

를 사용하는 것을 고려하고, 이들 가중치 c_i 의 값은 사전에 설정된 고정된 값이 아니라 자료에서 얻은 최적 (자료추동적; data driven)의 가중치를 찾아서 사용하는 것을 제안하고, 실제 자료에 이 결과를 적용한다. 이와 같이 가중치를 주는 방법 중의 하나가 구트만 (Guttman) 척도 (Guttman, 1950)이나 주로 이진 (binary) 응답에서 사용하며 실제 자료가 이론적인 구트만 척도를 만족하는 경우가 많지 않다.

1.2. n 개의 평가대상에 대한 평가 점수

이와 같은 방법은 점수화에도 사용할 수 있다. X_i 를 i 번째 평가대상의 평가점수라고 하고 X_{ij} 를 i 번째 평가대상의 j 번째 항목의 점수라고 할 때 X_i 는

$$X_i = c_1X_{i1} + c_2X_{i2} + \dots + c_pX_{ip} \quad (1.4)$$

로 얻을 수 있으며 ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, p$) 종종 $c_j = 1$ 로 동일한 가중치를 사용하며 단순 합을 사용하거나 $\bar{X}_j = \sum_{i=1}^n X_{ij}/n$ 와 $S_j^2 = \sum_{i=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_j)^2/(n-1)$ 를 각각 j 번째 평가 항목 점수의 평균과 분산이라 할 때 X_{ij} 대신에 표준화 점수인 $Z_{ij} = (X_{ij} - \bar{X}_j)/S_j$ 를 사용하여

$$Z_i = c_1Z_{i1} + c_2Z_{i2} + \dots + c_pZ_{ip} \quad (1.5)$$

를 i 번째 평가대상의 점수로 사용하는 경우가 많다 (Abdi와 Williams, 2010).

예를 들어 대학입시에서 지원자 i 의 점수는 세 과목의 표준화 점수 Z_{i1} , Z_{i2} 및 Z_{i3} 의 합 $Z_i = Z_{i1} + Z_{i2} + Z_{i3}$ 로 해당 지원자의 점수로 입학사정을 할 수 있으며 지원 영역에 따라 수학이나 영어의 점수에 가중치를 주려면 식 (1.4)의 c_j 의 값을 적절하게 설정하면 된다.

본 연구에서는 식 (1.5)에서

1. 각 평가항목에 대한 가중치 c_j 는 자료추동적 방법에 의해 얻는다.
2. 원래 자료 X_{ij} 대신 자료 추동적 방법으로 계산된 값을 사용한다.

의 방법으로 점수를 매기는 방법을 제안하고 실제 자료에 적용한다.

2. 요인분석과 요인 적재

확률벡터 \mathbf{X} 의 기댓값과 분산공분산행렬이 각각 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)'$ 와 $\boldsymbol{\Sigma} = (\sigma_{ij})_{i,j=1,2,\dots,p}$ 이고

$$\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu} = \mathbf{L}\mathbf{F} + \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.1)$$

로 요인분석모형을 얻을 수 있다고 하자. 여기서 $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_m)'$ 로 $m (< p)$ 개의 요인이며 $\mathbf{L} = (l_{jk})_{j=1,2,\dots,p; k=1,2,\dots,m}$ 은 요인적재 (factor loading) 행렬이다. 이 모형에서 \mathbf{L} 의 추정값을 얻는 방법 중의 하나로 주성분분석 방법이 많이 사용되며 요인 F_i 의 값들은 독립임을 가정하여 직교하도록 주성분 벡터를 회전하여 얻으며 각 변수값의 크기와 산포도의 영향을 배제하기 위해 X_j 대신 X_j 의 표준화값 Z_j 를 사용한다. 표준화한 변수를 사용하면 식 (2.1)은

$$Z_j = l_{j1}F_1 + l_{j2}F_2 + \dots + l_{jm}F_m + \epsilon_j \quad (2.2)$$

로 풀어 쓸 수 있다.

요인적재값을 얻으면 변수 Z_1, Z_2, \dots, Z_p 를 m 개의 그룹으로 분류하게 되는데 이때 기준은 요인적재 값의 크기이다. 편의상 첫 a_1 개의 변수는 첫 번째 그룹, 그 다음 a_2 개의 변수는 두 번째 그룹 및 마지막 a_m 개의 변수는 m 번째 그룹으로 분류하였다고 하자 ($\sum_{k=1}^m a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_m = p$). 주성분 요인 분석에서 고유치가 1보다 큰 개수만큼 요인으로 파악하는 경우가 많으므로 Z_i 의 분산공분산행렬의 고유치 λ_i 가 $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_m > 1$ 를 만족함을 가정한다.

이 방법으로 분류하면 j 번째 변수 (평가항목)가 k_0 번째 그룹으로 분류되면

$$L_{k_0} = \max_k \{l_{jk}\} = l_{jk_0}$$

이 된다. 대부분의 요인분석에 포함된 변수들은 양의 상관을 가지도록 조작적 정의를 하는 경우가 많으므로 편의상 의미있는 l_{jk} 는 양의 값을 갖는 것을 가정한다.

본 연구에서는 요인분석에 의해 i 번째 평가 대상의 k 번째 영역에 대한 점수로 $\sum_{j=a_{k-1}+1}^{a_k} L_j Z_{ij}$ 을 사용하고 이의 평균과 분산을 각각 m_k 와 s_k^2 이라고 할 때 $m_k = 0$ 이므로 이 변수의 표준화 값

$$\hat{F}_k = \frac{\sum_{j=a_{k-1}+1}^{a_k} L_j Z_{ij} - m_k}{s_k} = \frac{\sum_{j=a_{k-1}+1}^{a_k} L_j Z_{ij}}{s_k} \quad (2.3)$$

를 i 번째 평가 대상의 k 번째 영역의 표준화 점수로 설정한다.

요인분석 모형에서 F_k 의 추정량 \hat{F}_k 를 얻으면 i 번째 평가 대상의 전체 평가점수 T_i 는 다음

$$T_i = \frac{\sqrt{\lambda_1}\hat{F}_1 + \sqrt{\lambda_2}\hat{F}_2 + \dots + \sqrt{\lambda_m}\hat{F}_m}{\sqrt{\sum_{j=1}^m \lambda_j}} \quad (2.4)$$

과 같이 \hat{F}_k 의 가중평균을 사용한다. 여기서 λ_k 는 Z_j 의 분산공분산행렬 (또는 X_j 의 상관계수행렬)의 고유값 중 1보다 큰 m 개의 값들이다.

결과적으로 식 (2.3)과 식 (2.4)을 비교하면 식 (2.4)는

$$T_i = c_1 Z_{i1} + c_2 Z_{i2} + \dots + c_p Z_{ip} \quad (2.5)$$

로 Z_{ij} 들의 가중평균이며 j 번째 평가 항목이 k 번째 요인으로 분류될 때 Z_{ij} 에 대한 가중치 c_j 는

$$c_j = \frac{L_j}{s_k} \cdot \frac{\sqrt{\lambda_k}}{\sqrt{\sum_{j=1}^m \lambda_j}}$$

이다. 이 가중값 c_j 는 사전 정의된 값이 아니고 자료에서 얻은 자료추동 값이다.

이론적으로 요인 F_i 들은 독립이므로 식 (2.4) 또는 (2.5)의 분산은 1이어야 하지만 요인적재를 평가에 사용하는 경우 모든 항목이 실질적으로 하나의 특성을 측정하는 척도들 중의 하나이므로 이들의 상관 높을 것이며 따라서 식 (2.5)의 분산은 1이 아닐 가능성이 높다. 특히 양의 상관 및 양수인 고유값에 의해 분산이 1보다 클 개연성이 높아진다. 따라서 식 (2.5)를 직접 사용하지 않고 T_i 의 표준화 값

$$Z_{T_i} = \frac{T_i - \bar{T}}{s_T} = \frac{T_i}{s_T} \quad (2.6)$$

를 사용하는 것도 권장할 수 있다. 특히 서로 다른 속성의 크기를 비교하는 경우 유리하다. 여기서 $\bar{T} = \sum_{i=1}^n T_i/n$, $s_T = \sqrt{\sum_{i=1}^n (T_i - \bar{T})^2/(n-1)}$ 이다. 식 (2.6)를 사용한 것과 식 (2.4)를 사용하는 것은 실질적으로 원점수를 사용하느냐 아니면 표준화 점수를 사용하느냐의 차이만 있으므로 평가 대상의 순위에는 영향을 주지 않는다.

3. 사용 예

2006년 기준으로 전국의 $n = 234$ 개 기초지자체 (시군구)의 여건을 나타내는 14개의 변수로 평가하는 경우를 생각해 보자. 앞에서 제안한 평가 시스템이 적절한지 알아보기 위해 먼저 군집분석을 사용하여 이들 지자체를 발전정도에 따라 분류한 후 평가 시스템을 통한 평가 결과가 이 군집분석의 결과와 어느 정도 일치하는지 알아본다.

3.1. 군집분석

군집분석은 다양한 분야에서 모집단의 분할을 위해 사용하는 분석방법중의 하나이다 (Kim, 2015; Yoon과 Choi, 2015 등). 먼저 234개 기초 지자체의 14개의 변수 지방세징수액 (2005), 소득세할주민세 (01-05평균), 총사업체중사자수 (2005), 재정력지수 (01-05 평균), 사설학원강사수 (2005), 인구밀도 (2005), 개별공시지가 평균 지가 (2005), 도로율 (2005), 고령화율 (2005), 상하수도보급률 (2005), 의료병상수 (2005), 인구변화율 (70-05), 총사업체중사자수 증가율 (01-05), 지방세징수액증가율 (02-05)의 값을 사용하여 지자체의 발전정도에 따라 몇 개의 그룹으로 분류한다.

이러한 분류는 보통 군집분석 (cluster analysis)를 사용한다. 군집분석은 크게 분할 (partitioning)과 계층 (hierarchical) 방법으로 나눌 수 있는데 분할 방법은 자료를 여러 개의 클러스터로 나누되 그 개수를 사용자가 설정하며 계층 방법은 자료의 모든 구성원을 비슷한 속성의 계층으로 가치를 치는 방법이다. 계층방법은 전체 자료의 분류를 다이어그램으로 얻기 때문에 특성상 지역분류 작업에 활용하기에는 적절하지 않다고 볼 수 있다.

군집분석 방법 중 분할방법에는 산술평균을 클러스터의 중심으로 설정하는 전통적인 k -평균 (k -means) 방법과 중앙값 개념의 대푯값들 (medoids)을 클러스터의 중심으로 설정하는 여러 가지 방법이 있다.

지자체 분류 작업에서는 꼬리가 긴 지표 자료의 특성에 따라 k -평균보다는 중앙값 개념의 군집 중심을 설정하는 것이 타당하다. Kaufman과 Rousseeuw (1990)이 제안한 알고리즘은 당초 FORTRAN으로 작성되고 Struyf 등 (1996)이 S-PLUS로 작성하여 cluster 패키지로 배포하였고 현재는 R-언어 (R Core Team, 2015)의 cluster 라이브러리에서 최신 버전을 얻을 수 있는 pam 함수를 사용하였다. 234개 지자체의 발전정도에 따라 다섯 개의 등급으로 구분한 결과 가장 발전 9개, 발전 32개, 보통 63개, 미발전 61개 아주 미발전 69개로 234개 자체단체가 분류되었다 (Table 3.2)

3.2. 점수화

앞에서 사용한 14개 변수를 사용하여 234개의 지방자치단체의 발전정도를 계량화하는 방법을 생각해 보자. 보통 14개 변수의 표준화 점수를 합 (또는 평균)하는 것이 일반적이므로 이 방법과 본 연구에서 제안한 방법을 사용하여 234개 지자체의 발전정도를 점수화하고 이 점수를 비교해 보기로 한다.

본 연구에서 제안한 점수화 방법을 사용하기 위해 앞의 14개 변수를 사용하여 주성분 요인분석 (Variance-max 회전)을 한 결과 Table 3.1과 같이 네 개의 요인 ($m = 4$)으로 분류되며 각 요인에는 5, 3, 4, 2개의 변수가 포함되며 전체 변동에서 각 요인이 설명하는 변동은 λ_j/p 로 이 표에서 제시된 네 개의 요인으로 약 $(4.331 + 2.864 + 2.843 + 1.689)/14 = 83.8\%$ 의 변동이 설명된다.

Table 3.1 Summary table of factor analysis

factor (k)	count (a_k)	variables [L_k]	eigenvalue (λ_j)
1	5	Local tax levy (2005) [.915],	4.331
		Resident tax pro rata income (01-05 average) [.866],	
		Total number of employees in businesses (2005) [.842],	
		Financial power index (01-05 average) [.842],	
		Number of private institute instructors (2005) [.674]	
2	3	Population density (2005) [.854],	2.864
		Mean individual official land price (2005) [.852],	
		Proportion of road area (2005) [.850]	
3	4	Rate of aged population (2005) [-.828],	2.843
		Water and sewage supply rate (2005) [.761],	
		Number of medical beds (2005) [.655],	
		Rate of population change (70-05) [.465]	
4	2	Rate of increase in the total number of employees in businesses (01-05) [.906],	1.689
		Rate of increase in the local tax levy (02-05) [.867]	

Table 3.1에서 고려화율은 요인적재가 음수로 나머지 변수와 음의 상관을 가지며 지자체의 발전정도 평가에서 나머지 변수들과는 반대의 효과를 준다. 위의 요인분석에는 SPSS 22.0이 사용되었다 (IBM Corp, 2013).

두 점수에 대한 효율성을 확인하기 위해 14개의 표준화 변수를 k -평균 군집분석으로 234개의 지자체를 발전정도에 따라 다섯 개의 권역으로 분류하였는데 순서대로 침체지역 (=1, 69개 자치단체)에서부터 발전지역 (=5, 9개 자치단체)이다. 이 분류 결과와 본 논문에서 사용한 점수와 흔히 사용하는 표준화점수 평균을 코딩변경하여 교차표를 만든 결과 본 연구에서 제안하는 방법이 더 좋은 분류 결과를 보여준다.

Table 3.2 A comparison of scorings by two scoring methods

cluster classified	orginal	Mean of standardized values					Weighted mean by factor analysis						
		1	2	3	4	5	sum	1	2	3	4	5	sum
1		58	10	1	0	0	69	63	5	1	0	0	69
2		11	35	15	0	0	61	5	40	16	0	0	61
3		0	14	38	11	0	63	1	15	37	10	0	63
4		0	2	9	19	2	32	0	1	9	20	2	32
5		0	0	0	2	7	9	0	0	0	2	7	9
sum		69	61	63	32	9	234	69	61	63	32	9	234
correct rate		$(58 + 35 + 38 + 19 + 7)/234 = 67.09\%$					$(63 + 40 + 37 + 20 + 7)/234 = 71.37\%$						

Table 3.2에서 보는 것과 같이 요인적재 값과 상관계수행렬의 고유치를 사용한 가중치를 적용한 경우 표준화 값의 단순 평균을 사용하는 경우에 비해 정분류율이 약 4.3% 포인트 이상 높게 나타난다.

14개 변수의 단순표준화 변수의 평균으로 얻은 평가점수와 요인분석에 의한 가중평균으로 얻은 평가점수의 피어슨 상관계수는 0.979로 얻어졌다.

4. 결론과 제언

일반적인 합산등급척도는 표준화를 하더라도 사용자가 특정한 항목에 점수를 더 주고 싶으면 관련 항목에 해당하는 변수를 많이 넣고, 반대로 점수를 주고 싶지 않은 항목에 관련된 변수를 적게 넣는 방법으로만으로도 조작적 정의에서 주관적인 가중치가 배정될 수 있다.

따라서 합산에서 사용하는 각 변수의 중요도에 따라 가중치를 적절하게 설정할 필요성이 제기되는 바 본 연구에서는 주관적인 가중치가 아닌 요인분석에 의한 가중치를 사용하는 것을 제안하였다. 이 방법을 사용하려면 현재로는 중간 계산은 컴퓨터 패키지의 도움을 얻을 수 있으나 최종적인 가중치 설정에 의한 점수의 계산은 사용자가 따로 해야 하는 불편함이 있다.

자료를 사용하여 k 개의 그룹으로 나눌 때 군집분석의 방법으로 k -평균 군집화 방법을 사용하는 경우 표준화 점수 평균이 더 나은 정분류율을 보일 가능성이 크다. k -평균 군집화는 기본적으로 유클리드 (Euclidean) 거리 $|\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}|$ 또는 마할라노비스 (Mahalanobis) 거리 $(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$ 가 큰 그룹으로 나누므로 이는 각각 원래 값의 합 또는 표준화 값의 합이 큰 경우에 서로 다른 그룹으로 분류하는 것과 유사하기 때문이다.

References

- Abdi, H. and Williams, L. J. (2010). Correspondence analysis. In *Encyclopedia of research design*, edited by N.J. Salkind, Thousand Oaks, CA.
- Cronbach, L. J. (1951). Coefficient alpha and the internal structure of tests. *Psychometrika*, **16**, 297-334.
- Guttman, L. A. (1950). The basis for scalogram analysis. In *Studies in social psychology in World War II*, edited by Stouffer, S. A., Guttman, L. A. and Schuman, E. A., Measurement and prediction, **4**, Princeton University Press, UK.
- IBM Corp. (2013). *IBM SPSS Statistics for Windows*, Version 22.0, Armonk, NY.
- Kaufman, L. and P. J. Rousseeuw (1990). *Finding groups in data: An introduction to cluster analysis*, John Wiley & Sons, New York.
- Kim, H. C., Choi S. K. and Choi, D. H. (2016). A simulation comparison on the analysing methods of Likert type data. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **27**, 373-380.
- Kim, J. I. (2015). Cluster analysis for Seoul apartment price using symbolic data. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **26**, 1239-1247.
- Korea Research Institute for Local Administration. (2007). *Classification of local governments for different policies*, KRILA, Seoul.
- R Core Team. (2015). *R: A language and environment for statistical computing*, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, <https://www.R-project.org/>.
- Sim, S. (2012). *Statistical Data Analysis*, KyoWooSa, Seoul.
- Struyf, A., Hubert, M. and Rousseeuw, P. J. (1996). Clustering in an object-oriented environment. *Journal of Statistical Software*, **1**, 1-30.
- Yoon, S. and Choi, Y. (2015). Functional clustering for electricity demand data: A case study. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **26**, 885-894.
- Wilkinson, R. and Pickett, K. (2009). *The spirit level: Why more equal societies almost always do better*, Allen Lane, London, UK.

A study on an evaluation system by factor loadings

Kee-Won Lee¹ · Songyong Sim²

^{1,2}Department of Finance & Information Statistics, Hallym University

Received 27 July 2016, revised 23 August 2016, accepted 31 August 2016

Abstract

To quantify an abstract concept we often use Likert summated rating scale of original or standardized variables in case the variables are relatively less abstract. When variables have different scales, standardized values tends to be used rather than the original values. This is also true in evaluating systems. For example, we may use standardized values of local tax levy, population, and etc. and use the summed value of the standardized values to access the degrees of development. In this paper, we propose using a data-driven weighted sum for a scoring system and the way how to obtain the weights. We apply the proposed method to a real data set and find that proposed method is better than the usual summated rating scale.

Keywords: Cluster analysis, factor analysis, factor loadings, scoring system.

¹ Professor, Department of Finance & Information Statistics, Hallym University, Kangwon 200-702, Korea.

² Corresponding author: Professor, Department of Finance & Information Statistics, Hallym University, Kangwon 200-702, Korea. E-mail: sysim@hallym.ac.kr