

일반 점프크기를 가지는 상관 확률보행의 파론도 효과

이지연¹

¹영남대학교 통계학과

접수 2016년 8월 11일, 수정 2016년 9월 1일, 게재확정 2016년 9월 2일

요약

일정한 시간 간격으로 임의의 점프크기가 계속 누적되는 이산시간 확률보행을 고려한다. 각 시점에서의 점프크기가 이전 시점의 점프크기에 종속되어 결정되는 상관 확률보행과 각 시점에서의 점프크기가 이전 시점의 점프크기와 무관하게 독립적으로 결정되는 무상관 확률보행의 점근적 평균을 각각 계산한다. 그리고 상관 확률보행과 무상관 확률보행을 임의적으로 혼합하여 결합하거나 또는 일정한 패턴에 따라 주기적으로 반복하여 결합하는 혼합 확률보행의 점근적 평균 식을 유도한다. 각 확률보행의 점근적 평균은 0으로 공정한 게임을 나타내지만 두 확률보행을 결합한 혼합 확률보행의 점근적 평균은 음수가 되어 지는 게임이 되거나 또는 양수가 되어 이기는 게임이 되는 파론도 역설 현상이 나타남을 확인하고 해당되는 각 모수의 범위를 찾는다.

주요용어: 마코프 체인, 상관 확률보행, 점근적 평균, 점프크기, 정상확률, 파론도 역설.

1. 서론

파론도 역설 (Parrondo's paradox)은 브라운 튼니바퀴 (Brownian ratchet)의 특성을 쉽게 설명하기 위해 1996년 스페인의 물리학자 파론도 (Juan M. R. Parrondo)가 소개한 간단한 동전 던지기 게임에서 유래하였다 (Parrondo, 1996). 이 동전 던지기 게임은 두 개의 게임 A와 B로 구성되며, 게임 A는 앞면이 나올 확률이 1/2인 동전을 던져서 앞면이 나오면 1원을 얻고, 뒷면이 나오면 1원을 잃는 공정한 게임이다. 게임 B는 게임자가 현재 가지고 있는 누적 상금이 3의 배수이면 앞면이 나올 확률이 1/10인 동전을 던지고, 3의 배수가 아니면 앞면이 나올 확률이 3/4인 동전을 던져서 앞면이 나오면 1원을 얻고 뒷면이 나오면 1원을 잃는다. 그러면 게임 B도 점근적 기대상금이 0이 되어 공정한 게임이 된다. 반면에 매 시행에서 두 게임 A와 B 중 하나를 임의로 선택하여 진행하거나 또는 일정한 규칙에 의해 두 게임을 주기적으로 반복해서 시행하면 점근적 기대상금이 양수가 되어 결국 이기는 게임이 되는 역설적인 결과를 얻게 되고 이 현상을 파론도 역설이라고 한다. 초기에 파론도 역설은, 개별로 진행하면 지거나 공정한 두 게임을 결합했을 때 이기는 게임이 되거나 (파론도 효과, Parrondo effect), 또는 이기거나 공정한 두 게임을 결합했을 때 지게 되는 (역 파론도 효과, reverse Parrondo effect) 현상을 나타내었으나 최근에는 두 시스템이 결합하여 원래의 특성과 다른 특성을 갖는 새로운 시스템이 되는 현상을 넓은 의미의 파론도 역설이라고 한다 (Harmer과 Abbott, 2002). 파론도가 처음 제안한 동전 던지기 게임은 게임자의 현재 누적 상금에 따라 게임 B의 동전이 결정되기 때문에 원금의존 (capital-dependent) 파론도 게임이라고 부른다. Parrondo 등 (2000)은 과거 시행 결과에 따라 게임 B의 동전이 결정되는 과거의존 (history-dependent) 파론도 게임을 소개하였는데, 직전의 두 번의 시행 결과에 따라 현재 시행에서 사용될 동전이 결정되어 그 승패 확률이 정해지는 게임이다 (Ethier와 Lee, 2009; Lee, 2011). 원금

¹ (38541) 경북 경산시 대학로 280, 영남대학교 통계학과, 교수. E-mail: leejr@yu.ac.kr

의존 파론도 게임과 과거의존 파론도 게임은 기본적으로 한 명의 게임자에 의해 진행되는 게임인 반면에 Toral (2001)의 공간의존 (space-dependent) 파론도 게임은 여러 명의 게임자들이 함께 협력하여 진행하는 게임이다. 여러 명의 게임자들 중 한 명의 게임자를 임의로 선택하고, 선택된 게임자의 양옆에 있는 다른 게임자들의 최근 시행 결과에 의해 게임 B 의 동전이 결정되는 게임이다 (Lee, 2009; Ethier와 Lee, 2012a; Ethier와 Lee, 2012b; Ethier와 Lee, 2015).

파론도 역설은 초기에 주로 물리학자들에 의해 연구가 진행되었으나 프랙탈과 카오스 등의 통계물리학 뿐 아니라 화학, 재무학, 인구 유전학, 신뢰성 이론, 인식론 등의 다양한 분야에서 연구되며 그 적용 사례가 점차 늘어나고 있다. Ethier와 Lee (2010)은 두 개의 이기는 슬롯머신을 임의적으로 선택하거나 규칙적으로 반복했을 때 오히려 돈을 잃게 되는 역 파론도 효과가 존재함을 보이고 그 조건을 찾기도 하였다. 주식 투자에 있어서 Cho와 Lee (2012a)는 과거의존 파론도 게임을 이용한 주식 투자에서 파론도 역설이 존재할 수 있음을 확인하였고, Cho와 Lee (2012b)는 공간의존 파론도 게임의 규칙을 적용한 주식 투자에서도 파론도 역설 현상이 발생할 수 있음을 확인하였다. Jin과 Lee (2015)는 주식투자 계좌 간에 일정한 금액을 재분배하면 전체 계좌의 평균 누적 수익금이 증가하는 파론도 현상이 존재할 수 있음을 보였다. Pinsky와 Scheutzow (1992)는 두 개의 일시적인 확산 과정 (diffusion process)을 교환하여 양의 재귀적인 확률과정을 구성하는 것을 증명하였고, Key (1987)는 하락하는 분지과정 (branching process)이 역설적으로 증가하도록 결합할 수 있음을 보였다. 최근에 Montero (2011)은 기억성을 갖는 연속시간 확률보행 (random walk)을 혼합하였을 때 파론도 효과와 유사한 성질이 존재함을 확인하였다.

본 논문에서는 Montero (2011)의 기억성을 갖는 연속시간 확률보행 대신에 도박꾼의 파산문제와 같이 실제 게임의 진행 상황으로 설명할 수 있는 이산시간 확률보행을 고려한다. 그리고 각 게임에서의 상금이 ± 1 원인 단순 확률보행을 확장하여 일반 크기의 상금을 가지는 게임을 나타낼 수 있도록 임의의 점프크기를 가지는 확률보행으로 확대한다. 더불어 매 시행에서 이길 확률이 이전 시행에서의 승패 결과에 의존하여 결정되는 게임 (Mohan, 1955)을 모형화한 상관 (correlated) 확률보행을 가정한다. 즉, 일반 점프크기를 가지는 이산시간의 상관 확률보행의 결합에서 파론도 역설 현상이 나타날 수 있음을 확인하고자 한다. Montero (2011)의 연속시간 확률보행에서는 두 확률보행의 임의적 혼합만 다루었지만 본 논문의 이산시간 확률보행에서는 임의적 혼합 뿐 아니라 주기적 반복도 함께 적용하여 파론도 효과가 존재하는 모수의 범위를 찾는다. Parrondo 등 (2000)의 과거의존 파론도 게임에서 과거의 연이은 두 번의 결과에 의해 게임 B 의 동전이 정해지는 모형을 고려하였던 이유는 직전 과거 한 번의 결과만으로는 파론도 역설 현상이 나타나지 않기 때문이다. 이는 기존의 과거의존 파론도 게임에서는 상금을 $+1$ 원과 -1 원만 고려했기 때문에 파론도 역설 현상이 나타나지 않았고, 만약 상금의 크기를 일반적인 값으로 확장한다면 상금 값의 범위에 따라 직전 과거 한 번의 결과에 대한 종속만으로도 파론도 역설 현상이 나타날 수 있음을 본 논문에서 보이고자 한다. 2절에서는 일반 점프크기의 이산시간 상관 확률보행에서의 접근적 평균을 계산하고, 3절에서는 무상관 확률보행과 임의적으로 결합할 때와 주기적으로 반복할 때의 접근적 평균을 각각 계산하여 파론도 역설 현상이 존재하는 모수들의 영역을 찾는다.

2. 일반 점프크기를 가지는 상관 확률보행

먼저, 일반 점프크기를 가지는 무상관 확률보행 $\{A_n, n \geq 0\}$ 는 $A_0 = 0$ 이고 모든 $n \geq 1$ 에 대해

$$A_n = A_{n-1} + a_n$$

로 정의되며, 여기서 점프크기 a_n 은 모든 $n \geq 1$ 에 대해 서로 독립이고 모두 동일한 다음의 이산분포를 따른다.

$$P\{a_n = u\} = 1 - P\{a_n = -d\} := p.$$

단, $u, d > 0$ 이다. 즉, 확률보행 $\{A_n, n \geq 0\}$ 은 초기상태 0에서 시작하여 매 시점 n 에서 확률 p 로 u 만큼 증가하거나 확률 $1 - p$ 로 d 만큼 감소한다. 만약 $u = d = 1$ 이면 단순 확률보행으로 기존의 파론도 게임 A 와 일치한다.

무상관 확률보행 $\{A_n, n \geq 0\}$ 은 모든 $n \geq 1$ 에 대해

$$E[a_n] = pu - (1 - p)d$$

이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}E[A_n] = pu - (1 - p)d \tag{2.1}$$

이 된다.

한편, 일반 점프크기를 가지는 상관 확률보행 $\{B_n, n \geq 0\}$ 는 $B_0 = 0$ 이고 모든 $n \geq 1$ 에 대해

$$B_n = B_{n-1} + b_n$$

로 정의되며, 여기서 점프크기 b_n 은 모든 $n \geq 1$ 에 대해 서로 독립이 아니고, 그 전 시점 $n - 1$ 에서의 점프크기 b_{n-1} 의 값에 의존하여 결정된다. 모든 점프크기는 양수 또는 음수로 정해지므로 만약 $b_{n-1} < 0$ 이면 점프크기 b_n 의 분포는

$$P\{b_n = u_0\} = 1 - P\{b_n = -d_0\} := p_0$$

이고, 만약 $b_{n-1} > 0$ 이면

$$P\{b_n = u_1\} = 1 - P\{b_n = -d_1\} := p_1$$

로 정의한다. 단, $u_0, u_1, d_0, d_1 > 0$ 이고 시점 0에서는 $P\{b_0 > 0\} = P\{b_0 < 0\} = 1/2$ 로 가정한다. 즉, 상관 확률보행 $\{B_n, n \geq 0\}$ 은 초기상태 0에서 시작하여 이전 시점 $n - 1$ 에서의 점프크기가 음수이면 즉, 확률보행이 감소하면 시점 n 에서는 확률 p_0 로 u_0 만큼 증가하거나 확률 $1 - p_0$ 로 d_0 만큼 감소하고, 이전 시점 $n - 1$ 에서의 점프크기가 양수이면 즉, 확률보행이 증가하면 시점 n 에서는 확률 p_1 로 u_1 만큼 증가하거나 확률 $1 - p_1$ 으로 d_1 만큼 감소한다. 이전 시점의 증가 혹은 감소의 결과에 의존하여 다음 시점에서의 점프크기가 결정된다. 만약 $p_0 = p_1, u_0 = u_1$ 이고 $d_0 = d_1$ 이면 무상관 확률보행이 되고, $u_0 = u_1 = d_0 = d_1 = 1$ 이면 바로 직전 과거 한 번의 결과에만 의존하는 파론도 게임 B 와 일치한다.

상관 확률보행 $\{B_n, n \geq 0\}$ 의 점근적 평균을 계산하기 위해 Ethier와 Lee (2009)가 유도한 다음의 정리를 이용하려고 한다. 이 정리는 마코프 체인에 의해 진행되는 게임의 궁극적인 기대상금에 대한 강대수의 법칙 (strong law of large numbers)을 증명한 것이다.

정리 2.1 (Ethier and Lee, 2009) 유한 상태공간 Σ 에서 정의되는 분할불가 (irreducible)이고 비주기적 (aperiodic) 마코프 체인 $\{X_n, n \geq 0\}$ 의 전이확률행렬과 정상확률분포를 각각 $\mathbf{P} = (P_{ij})_{i,j \in \Sigma}$ 와 $\boldsymbol{\pi} = (\pi_i)_{i \in \Sigma}$ 라고 하고, 함수 $w : \Sigma \times \Sigma \mapsto \mathbf{R}$ 를 행렬 $\mathbf{W} = (w(i, j))_{i,j \in \Sigma}$ 로 나타내어 상금행렬 (payoff matrix)이라고 하자. 모든 $n \geq 1$ 에 대해 $\xi_n := w(X_{n-1}, X_n)$ 와 $S_n := \xi_1 + \dots + \xi_n$ 로 정의하면 S_n 은 n 번의 시행 후의 누적상금이 된다. 행렬의 (i, j) 요소가 $P_{ij}w_{ij}$ 인 행렬을 행렬 \mathbf{P} 와 행렬 \mathbf{W} 의 하다마드 곱 (Hadamard product)인 $\mathbf{P} \circ \mathbf{W}$ 로 나타내면 열 벡터 $\mathbf{1} := (1, 1, \dots, 1)^T$ 에 대해

$$\boldsymbol{\mu} := \boldsymbol{\pi}(\mathbf{P} \circ \mathbf{W})\mathbf{1}$$

은 임의의 초기상태 X_0 에 대해 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}E[S_n] = \boldsymbol{\mu}$ 이고

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow \boldsymbol{\mu} \text{ a.s.}$$

를 만족한다.

일반 점프크기를 가지는 상관 확률보행 $\{B_n, n \geq 0\}$ 는 상태공간 $\Sigma := \{0, 1\}$ 에서 정의되는 마코프 체인 $\{X_n^B, n \geq 0\}$ 으로 설명할 수 있다. 그 전이확률행렬은

$$\mathbf{P}_B := \begin{pmatrix} 1-p_0 & p_0 \\ 1-p_1 & p_1 \end{pmatrix}$$

이고 상금행렬은 동일한 상태공간 Σ 에서

$$\mathbf{W}_B := \begin{pmatrix} -d_0 & u_0 \\ -d_1 & u_1 \end{pmatrix}$$

로 나타낼 수 있다. 마코프 체인 $\{X_n^B, n \geq 0\}$ 의 정상확률분포 π_B 는

$$\begin{aligned} \pi_B &= \pi_B \mathbf{P}_B, \\ \pi_B \mathbf{1} &= 1 \end{aligned}$$

을 만족하는 행 벡터로서

$$\pi_B = \left(\frac{1-p_1}{1+p_0-p_1}, \frac{p_0}{1+p_0-p_1} \right)$$

로 얻어진다. 정리 2.1에 의해 상관 확률보행 $\{B_n, n \geq 0\}$ 의 점근적 평균 μ_B 는

$$\begin{aligned} \mu_B &= \pi_B (\mathbf{P}_B \circ \mathbf{W}_B) \mathbf{1} \\ &= \frac{(1-p_1)[u_0 p_0 - d_0(1-p_0)] + p_0[u_1 p_1 - d_1(1-p_1)]}{1+p_0-p_1} \end{aligned} \quad (2.2)$$

로 계산된다. 만약

$$p_1 = \frac{d_0 + p_0(d_1 - d_0 - u_0)}{d_0 + p_0(d_1 - d_0 + u_1 - u_0)} \quad (2.3)$$

이면 점근적 평균 μ_B 에 대해 $\mu_B = 0$ 이 되므로 상관 확률보행 $\{B_n, n \geq 0\}$ 으로 진행되는 게임 B 는 공정한 게임이 된다.

일반 점프크기를 가지는 무상관 확률보행 $\{A_n, n \geq 0\}$ 는 일반 점프크기를 가지는 상관 확률보행 $\{B_n, n \geq 0\}$ 에서 $p_0 = p_1 := p$, $u_0 = u_1 := u$ 이고 $d_0 = d_1 := d$ 를 만족하는 특별한 경우이다. 그러므로 상태공간 $\Sigma = \{0, 1\}$ 에서 정의되며 그 전이확률행렬이

$$\mathbf{P}_A := \begin{pmatrix} 1-p & p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

이고 상금행렬은 동일한 상태공간 Σ 에서

$$\mathbf{W}_A := \begin{pmatrix} -d & u \\ -d & u \end{pmatrix}$$

인 마코프 체인 $\{X_n^A, n \geq 0\}$ 으로 표현될 수 있다. 정상확률분포 π_A 는 $\pi_A = (1-p, p)$ 로 얻어져서 무상관 확률보행 $\{A_n, n \geq 0\}$ 의 점근적 평균 μ_A 는

$$\mu_A = \pi_A (\mathbf{P}_A \circ \mathbf{W}_A) \mathbf{1} = pu - (1-p)d \quad (2.4)$$

로 식 (2.1)과 일치한다. 만약

$$p = d/(u+d) \quad (2.5)$$

이면 점근적 평균 μ_A 에 대해 $\mu_A = 0$ 이 되므로 무상관 확률보행 $\{A_n, n \geq 0\}$ 으로 진행되는 게임 A 는 공정한 게임이 된다.

3. 일반 점프크기를 가지는 상관 확률보행의 결합

3.1. 임의적 혼합

무상관 확률보행 $\{A_n, n \geq 0\}$ 과 상관 확률보행 $\{B_n, n \geq 0\}$ 을 확률 $0 < \gamma < 1$ 로 혼합한 확률보행 $\{C_n := \gamma A_n + (1 - \gamma)B_n, n \geq 0\}$ 을 살펴보자. $C_0 = 0$ 이고 모든 $n \geq 1$ 에 대해

$$C_n = C_{n-1} + \gamma a_n + (1 - \gamma)b_n$$

가 된다. 혼합 확률보행 $\{C_n, n \geq 0\}$ 도 상관 확률보행으로서, 상태공간 $\Sigma = \{0, 1\}$ 에서 정의되는 마코프 체인 $\{X_n^C, n \geq 0\}$ 으로 나타낼 수 있다. 그 전이확률행렬은

$$P_C = \gamma P_A + (1 - \gamma)P_B$$

이 되고, 상금행렬은 동일한 상태공간 Σ 에서

$$W_C = \gamma W_A + (1 - \gamma)W_B$$

로 나타낼 수 있다. $\{X_n^C, n \geq 0\}$ 의 정상확률분포 π_C 는

$$\pi_C = \left(\frac{1 - \gamma p - (1 - \gamma)p_1}{1 + (1 - \gamma)(p_0 - p_1)}, \frac{\gamma p + (1 - \gamma)p_0}{1 + (1 - \gamma)(p_0 - p_1)} \right)$$

로 얻어진다. 정리 2.1에 의해 혼합 확률보행 $\{C_n, n \geq 0\}$ 의 점근적 평균 μ_C 는

$$\begin{aligned} \mu_C &= \{[\gamma u + (1 - \gamma)u_0 - \gamma d - (1 - \gamma)d_1][1 - \gamma p - (1 - \gamma)p_1][\gamma p + (1 - \gamma)p_0] \\ &\quad + [\gamma p + (1 - \gamma)p_0][\gamma p + (1 - \gamma)p_1][\gamma u + (1 - \gamma)u_1] - [1 - \gamma p - (1 - \gamma)p_0] \\ &\quad \times [1 - \gamma p - (1 - \gamma)p_1][\gamma d + (1 - \gamma)d_0]\} / [1 + (1 - \gamma)(p_0 - p_1)] \end{aligned} \quad (3.1)$$

로 계산되며, 식 (2.2)와 (2.4)에 의해 $\mu_C \neq \gamma \mu_A + (1 - \gamma)\mu_B$ 이다.

$u = d, u_0 = d_0$ 그리고 $u_1 = d_1$ 인 대칭 (symmetric) 확률보행의 경우에는, 식 (2.2), (2.4), (3.1)로부터 각 점근적 평균이

$$\begin{aligned} \mu_A &= (2p - 1)u, \\ \mu_B &= [(1 - p_1)(2p_0 - 1)u_0 + p_0(2p_1 - 1)u_1] / (1 + p_0 - p_1), \\ \mu_C &= \{(1 - \gamma)(u_0 - u_1)[1 - \gamma p - (1 - \gamma)p_1][\gamma p + (1 - \gamma)p_0] \\ &\quad + [\gamma p + (1 - \gamma)p_0][\gamma p + (1 - \gamma)p_1][\gamma u + (1 - \gamma)u_1] - [1 - \gamma p - (1 - \gamma)p_0] \\ &\quad \times [1 - \gamma p - (1 - \gamma)p_1][\gamma u + (1 - \gamma)u_0]\} / [1 + (1 - \gamma)(p_0 - p_1)] \end{aligned}$$

로 얻어진다. 여기서 게임 A가 공정한 경우는 식 (2.5)로부터 $p = 1/2$ 이고, 게임 B가 공정한 경우는 식 (2.3)으로부터 $p_1 = [p_0 u_1 - (2p_0 - 1)u_0] / [2p_0 u_1 - (2p_0 - 1)u_0]$ 이다. 이 경우에 얻어지는 게임 C의 점근적 평균은

$$\mu_C = \frac{(2p_0 - 1)(1 - \gamma)\gamma[2p_0(u + u_0 - \gamma u_0) - (1 - \gamma)u_0](u_1 - u_0)}{2[\gamma u_0 + 2p_0^2(1 - \gamma)(u_1 - u_0) + p_0(u_0 - 3\gamma u_0 + u_1 + \gamma u_1)]}$$

가 된다. 그러므로 모든 $0 < \gamma < 1$ 에 대해 $p = 1/2$ 이고 $p_0 = p_1 = 1/2$ 이거나 $p_0 = (1 - \gamma)u_0 / [2(u + u_0 - \gamma u_0)], p_1 = [2u + (1 - r)u_1] / [2(u + u_1 - \gamma u_1)]$ 또는 $u_1 = u_0$ 이면 게임 C도 공정한 게임이 되어 파

론도 역설 현상은 생기지 않는다. $u_1 > u_0$ 일 때는 모든 $0 < \gamma < 1$ 에 대해 $p = 1/2$ 이고 $p_0 > 1/2$ 또는 $p_0 < (1 - \gamma)u_0/[2(u + u_0 - \gamma u_0)]$ 이고 $p_1 = [p_0 u_1 - (2p_0 - 1)u_0]/[2p_0 u_1 - (2p_0 - 1)u_0]$ 의 범위에서 두 게임 A와 B의 점근적 평균은 0으로 공정하지만 혼합게임 C의 점근적 평균은 양수가 되어 파론도 효과가 존재한다. 한편, $u_1 > u_0$ 일 때, 모든 $0 < \gamma < 1$ 에 대해 $p = 1/2$ 이고 $(1 - \gamma)u_0/[2(u + u_0 - \gamma u_0)] < p_0 < 1/2$ 이고 $p_1 = [p_0 u_1 - (2p_0 - 1)u_0]/[2p_0 u_1 - (2p_0 - 1)u_0]$ 의 영역에서는 두 게임 A와 B의 점근적 평균은 0으로 공정하지만 혼합게임 C의 점근적 평균이 음수가 되어 역 파론도 효과가 존재한다.

$u = d = u_0 = d_0 = u_1 = d_1 = 1$ 인 단순 대칭 확률보행의 경우는

$$\begin{aligned} \mu_A &= 2p - 1, \\ \mu_B &= \frac{p_0 + p_1 - 1}{p_0 + 1 - p_1}, \\ \mu_C &= \frac{p_0 + p_1 - 1 + \gamma(2p - p_0 - p_1)}{1 + (1 - \gamma)(p_0 - p_1)} \end{aligned}$$

이다. 게임 A와 B가 모두 공정한 게임인 경우, 즉, $p = 1/2$ 이고 $p_0 + p_1 = 1$ 인 경우에는 게임 C의 점근적 평균 μ_C 도 모든 $0 \leq \gamma \leq 1$ 에 대해 $\mu_C = 0$ 이 되어 여전히 공정한 게임이 되므로 모든 임의적 혼합에서 파론도 역설 현상이 나타나지 않는다.

$u = d = 1, u_0 = d_0 = 1, u_1 = 9, d_1 = 1$ 의 경우에는 $p = 1/2, p_0 = 1/2, p_1 = 1/10$ 일 때 게임 A와 B가 모두 공정한 게임이 되며 이 때, 혼합게임 C의 점근적 평균은

$$\mu_C = \frac{8(1 - \gamma)\gamma}{7 - 2\gamma}$$

로서 $\gamma = (7 - \sqrt{35})/2 \approx 0.542$ 에서 최대값 $4(6 - \sqrt{35}) \approx 0.336$ 을 가진다. Figure 3.1는 이 경우에 대한 확률보행의 샘플경로 (sample path)를 나타낸 것으로 두 게임 A와 B는 공정하여 점근적 평균은 0인 반면에 혼합게임 C의 점근적 평균은 양수로서 게임이 진행될 수록 누적 상태가 점차 증가한다.

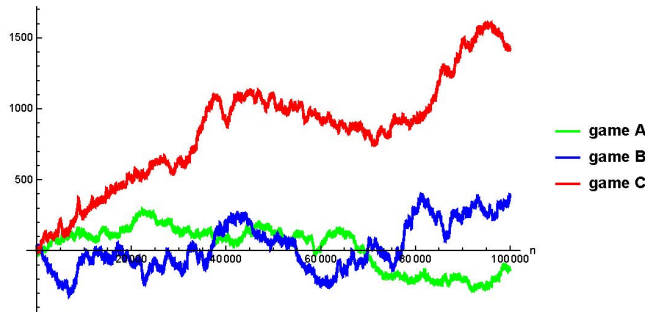


Figure 3.1 Sample paths for $\gamma = 0.542, u = 1, d = 1, u_0 = 1, d_0 = 1, u_1 = 9, d_1 = 1, p = 1/2, p_0 = 1/2, p_1 = 1/10$.

3.2. 주기적 반복

무상관 확률보행 $\{A_n, n \geq 0\}$ 을 $r \geq 1$ 번 반복한 후, 상관 확률보행 $\{B_n, n \geq 0\}$ 을 $s \geq 1$ 번 반복하는 것을 규칙적으로 결합하는 혼합 확률보행 $\{C_n, n \geq 0\}$ 을 살펴보자. 즉, $C_0 = 0$ 이고 모든 $n \geq 1$ 에 대해

$$C_n = C_{n-1} + c_n$$

으로

$$c_n = \begin{cases} a_n, & n = 1, 2, \dots, r \pmod{r + s} \\ b_n, & n = r + 1, r + 2, \dots, r + s - 1, 0 \pmod{r + s} \end{cases}$$

가 된다. 혼합 확률보행 $\{C_n, n \geq 0\}$ 도 상관 확률보행으로서 상태공간 $\Sigma = \{0, 1\}$ 에서 정의되는 비균일 (nonhomogeneous) 마코프 체인 $\{X_n^{[r,s]}, n \geq 0\}$ 으로 설명할 수 있고, 그 점근적 평균은 다음의 정리를 적용하여 계산할 수 있다.

정리 3.1 (Ethier and Lee, 2009) $r, s \geq 1$ 의 $\mathbf{P} := \mathbf{P}_A^r \mathbf{P}_B^s$ 에 대해 $\mathbf{P}_A^r \mathbf{P}_B^s$ 의 모든 순환 순열 (cyclic permutation)이 에르고딕 (ergodic)하고, 행 벡터 $\boldsymbol{\pi}$ 를 \mathbf{P} 의 정상확률분포라고 하자. 만약 $\{X_n, n \geq 0\}$ 이 상태공간 Σ 에서 정의되는 비균일 마코프 체인으로 그 전이확률행렬이 $\mathbf{P}_A, \dots, \mathbf{P}_A$ (r 번), $\mathbf{P}_B, \dots, \mathbf{P}_B$ (s 번), $\mathbf{P}_A, \dots, \mathbf{P}_A$ (r 번), $\mathbf{P}_B, \dots, \mathbf{P}_B$ (s 번), ...이고, 행렬 \mathbf{P}_A 와 \mathbf{P}_B 의 상급행렬을 각각 \mathbf{W}_A 와 \mathbf{W}_B 라고 하고, 모든 $n \geq 1$ 에 대해 $\xi_n := w(X_{n-1}, X_n)$ 와 $S_n := \xi_1 + \dots + \xi_n$ 로 정의하면

$$\mu_{[r,s]} := \frac{1}{r+s} \left[\sum_{u=0}^{r-1} \boldsymbol{\pi} \mathbf{P}_A^u (\mathbf{P}_A \circ \mathbf{W}_A) \mathbf{1} + \sum_{v=0}^{s-1} \boldsymbol{\pi} \mathbf{P}_A^r \mathbf{P}_B^v (\mathbf{P}_B \circ \mathbf{W}_B) \mathbf{1} \right]$$

은 임의의 초기상태 X_0 에 대해

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} S_n = \mu_{[r,s]} \text{ a.s.}$$

를 만족한다.

먼저 $r = s = 1$ 인 경우를 살펴보자. $\mathbf{P}_A \mathbf{P}_B$ 의 정상확률분포 $\boldsymbol{\pi}_{[1,1]}$ 는

$$\boldsymbol{\pi}_{[1,1]} = (1 - p_0 + pp_0 - pp_1, p_0 - pp_0 + pp_1)$$

로 얻어진다. 정리 3.1에 의해 혼합 확률보행 $\{C_n, n \geq 0\}$ 의 점근적 평균 $\mu_{[1,1]}$ 은

$$\mu_{[1,1]} = \frac{1}{2} \{ pu - (1-p)d + (1-p)[p_0u_0 - (1-p_0)d_0] + p[p_1u_1 - (1-p_1)d_1] \} \tag{3.2}$$

로 계산된다.

$u = d, u_0 = d_0$ 그리고 $u_1 = d_1$ 인 대칭 확률보행의 경우에는

$$\mu_{[1,1]} = \frac{1}{2} [u(2p-1) + (1-p)(2p_0-1)u_0 + p(2p_1-1)u_1]$$

로 얻어진다. 게임 A가 공정한 경우 즉, $p = 1/2$ 이고 게임 B가 공정한 경우로서 $p_1 = [p_0u_1 - (2p_0 - 1)u_0] / [2p_0u_1 - (2p_0 - 1)u_0]$ 인 경우에 얻어지는 혼합게임 C의 점근적 평균은

$$\mu_{[1,1]} = \frac{(1-2p_0)^2 u_0 (u_1 - u_0)}{4[2p_0(u_1 - u_0) + u_0]}$$

가 된다. 그러므로 $p = 1/2$ 이고 $p_0 = p_1 = 1/2$ 이거나 또는 $u_1 = u_0$ 이면 게임 C도 공정한 게임이 되어 파론도 역설 현상은 생기지 않는다. $u_1 > u_0$ 일 때는 $p = 1/2$ 이고 $p_0 \neq 1/2$ 와 $p_1 = [p_0u_1 - (2p_0 - 1)u_0] / [2p_0u_1 - (2p_0 - 1)u_0]$ 의 영역에서 두 게임 A와 B의 점근적 평균은 0으로 공정하지만 혼합게임 C의 점근적 평균이 양수가 되어 파론도 효과가 존재한다.

$u = d = u_0 = d_0 = u_1 = d_1 = 1$ 인 단순 대칭 확률보행의 경우는 식 (3.2)으로부터

$$\mu_{[1,1]} = pp_1 - (1-p)(1-p_0)$$

가 되어 게임 A와 B가 모두 공정한 게임인 경우, 즉, $p = 1/2$ 이고 $p_0 + p_1 = 1$ 인 경우는 혼합게임 C의 평균도 $\mu_{[1,1]} = 0$ 가 되어 여전히 공정한 게임이 되므로 파론도 역설이 존재하지 않는다.

$u = d = 1, u_0 = d_0 = 1, u_1 = 8, d_1 = 1$ 의 경우에는 $p = 1/2, p_0 = 1/3, p_1 = 1/5$ 일 때 게임 A와 B가 모두 공정한 게임이 되며 혼합게임 C의 점근적 평균은 $\mu_{[1,1]} = 7/60$ 으로 이기는 게임이 된다. Figure 3.2는 이 경우에 대한 확률보행의 샘플경로를 나타낸 것으로 혼합게임 C의 누적 상태가 점차 증가한다.

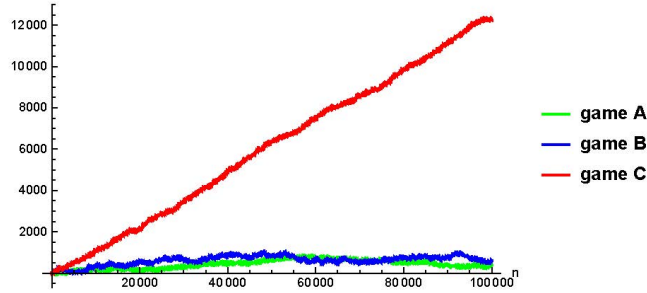


Figure 3.2 Sample paths for $u = 1, d = 1, u_1 = 8, d_1 = 1, u_0 = 1, d_0 = 1, p = 1/2, p_0 = 1/3, p_1 = 1/5$.

일반적인 $r, s \geq 1$ 에 대한 점근적 평균 $\mu_{[r,s]}$ 를 구해보자. 먼저 모든 $r \geq 1$ 에 대해 $\mathbf{P}_A^r = \mathbf{P}_A$ 이다. 그리고 행렬 \mathbf{P}_B 의 고유값 (eigenvalue)은 1과 $p_1 - p_0$ 으로 대각행렬 $\mathbf{D} := \text{diag}(1, p_1 - p_0)$ 로 정의한다. 고유값에 대응되는 우측 고유벡터 (right eigenvector)는 $(1, 1)^\top, (-p_0/(1 - p_1), 1)^\top$ 로서

$$\mathbf{R} := \begin{pmatrix} 1 & -\frac{p_0}{1-p_1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

와 $\mathbf{L} := \mathbf{R}^{-1}$ 로 나타내면 모든 $s \geq 1$ 에 대해

$$\mathbf{P}_B^s = \mathbf{R}\mathbf{D}^s\mathbf{L}$$

가 되어 $\mathbf{P}_A^r\mathbf{P}_B^s = \mathbf{P}_A\mathbf{R}\mathbf{D}^s\mathbf{L}$ 이고, $\mathbf{P}_A\mathbf{R}\mathbf{D}^s\mathbf{L}$ 의 정상확률분포 $\boldsymbol{\pi}_{[r,s]}$ 는

$$\boldsymbol{\pi}_{[r,s]}^\top = \frac{1}{P} \begin{pmatrix} 1 - p_1 + [p_0 - p(1 + p_0 - p_1)](p_1 - p_0)^s \\ p_0 - [p_0 - p(1 + p_0 - p_1)](p_1 - p_0)^s \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

로 얻어진다. 여기서 $P := 1 + p_0 - p_1$ 이다. 한편, 모든 $u \geq 0$ 에 대해

$$\mathbf{P}_A^u(\mathbf{P}_A \circ \mathbf{W}_A)\mathbf{1} = \begin{pmatrix} pu - (1 - p)d \\ pu - (1 - p)d \end{pmatrix}$$

이고

$$(\mathbf{P}_B \circ \mathbf{W}_B)\mathbf{1} = \begin{pmatrix} p_0u_0 - (1 - p_0)d_0 \\ p_1u_1 - (1 - p_1)d_1 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

이며

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_s &:= \mathbf{I} + \mathbf{P}_B + \cdots + \mathbf{P}_B^{s-1} \\ &= \mathbf{R}(\mathbf{I} + \mathbf{D} + \mathbf{D}^2 + \cdots + \mathbf{D}^{s-1})\mathbf{L} \\ &= \mathbf{R} \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & \frac{1-(p_1-p_0)^s}{1+p_0-p_1} \end{pmatrix} \mathbf{L} \\ &= \frac{1}{P^2} \begin{pmatrix} s(1-p_1)(1+p_0-p_1) + p_0[1-(p_1-p_0)^s] & p_0[s(1+p_0-p_1) - 1 + (p_1-p_0)^s] \\ (1-p_1)[s(1+p_0-p_1) - 1 + (p_1-p_0)^s] & sp_0(1+p_0-p_1) + (1-p_1)[1-(p_1-p_0)^s] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

이다. 따라서 정리 3.1에 의해 점근적 평균 $\mu_{[r,s]}$ 는 식 (3.3)와 (3.4)로부터

$$\begin{aligned}\mu_{[r,s]} &= \frac{1}{r+s} \left[\sum_{u=0}^{r-1} \pi_{[r,s]} P_A^u (P_A \circ W_A) \mathbf{1} + \sum_{v=0}^{s-1} \pi_{[r,s]} P_A^r P_B^v (P_B \circ W_B) \mathbf{1} \right] \\ &= \frac{1}{r+s} \{ r[pu - (1-p)d] + \pi_{[r,s]} P_A D_s (P_B \circ W_B) \mathbf{1} \}\end{aligned}$$

와 같이 계산된다.

$u = d = u_0 = d_0 = u_1 = d_1 = 1$ 인 단순 대칭 확률보행이고, $p = 1/2$ 로 게임 A가 공정한 게임인 경우는

$$\mu_{[r,s]} = \frac{(p_0 + p_1 - 1)[s(1 + p_0 - p_1) - (p_1 - p_0)(1 - (p_1 - p_0)^s)]}{(r + s)(1 + p_0 - p_1)^2}$$

가 되며 게임 B도 공정한 게임인 경우, 즉 $p_0 + p_1 = 1$ 인 경우는 모든 $r, s \geq 1$ 에 대해 혼합게임 C의 점근적 평균도 $\mu_{[r,s]} = 0$ 으로서 여전히 공정한 게임이 되어 파론도 역설 현상이 존재하지 않는다.

4. 결론

매 시행에서 이길 확률이 이전 시행의 결과에 의존하고 매 시행에서 주어지는 상금이 일반적인 값을 가지는 게임을 모형화할 수 있는 일반 점프크기를 가지는 이산시간의 상관 확률보행을 고려하였다. 매 시행에서의 승패 확률과 상금이 독립적으로 결정되는 게임을 나타내는 무상관 확률보행과 임의적으로 혼합하거나 일정한 규칙에 따라 주기적으로 반복할 때, 각 확률보행의 점근적 평균은 0으로 공정한 게임이지만 혼합 확률보행의 점근적 평균은 모수의 범위에 따라 양수 또는 음수가 되어 파론도 역설 현상이 나타날 수 있음을 보였다. 연속시간 확률보행에 대해서는 두 확률보행의 임의적 혼합만 다루어 파론도 역설 현상을 확인하였지만 (Montero, 2011), 이산시간 확률보행에서는 마코프 체인의 강대수의 법칙을 이용하여 점근적 평균을 계산함으로써 임의적 혼합 뿐 아니라 주기적 반복에서도 파론도 역설 현상이 발생할 수 있음을 확인하였다.

기존의 파론도 게임에서처럼 승패 시 주어지는 상금이 만약 +1원과 -1원이면 임의적 혼합의 모든 혼합 확률 $0 < \gamma < 1$ 과 주기적 반복에서 게임 A와 B의 각 반복 횟수인 r 과 s 의 모든 값에 대해 파론도 역설 현상은 나타나지 않아서 공정한 두 게임 A와 B의 모든 임의적 혼합과 주기적 반복이 항상 공정한 게임이 된다. 이것이 Parrondo 등 (2000)의 과거의존 파론도 게임에서 과거의 직전 한 번의 결과에 대한 종속 대신에 연이은 두 번의 결과에 의존하여 현재 시행에서의 승패 확률이 결정되는 게임 B를 고려하였던 이유이기도 하다.

References

- Cho, D. and Lee, J. (2012a). Parrondo paradox and stock investment. *Korean Journal of Applied Statistics*, **25**, 543-552.
- Cho, D. and Lee, J. (2012b). Spatially dependent Parrondo games and stock investments. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **23**, 867-880.
- Ethier, S. N. and Lee, J. (2009). Limit theorems for Parrondo's paradox. *Electronic Journal of Probability*, **14**, 1827-1862.
- Ethier, S. N. and Lee, J. (2010). A Markovian slot machine and Parrondo's paradox, *Annals of Applied Probability*, **20**, 1098-1125.
- Ethier, S. N. and Lee, J. (2012a). Parrondo games with spatial dependence. *Fluctuation and Noise Letters*, **11**, 1250004.

- Ethier, S. N. and Lee, J. (2012b). Parrondo games with spatial dependence, II. *Fluctuation and Noise Letters*, **11**, 1250030.
- Ethier, S. N. and Lee, J. (2015). Parrondo games with spatial dependence, III. *Fluctuation and Noise Letters*, **14**, .
- Harmer, G. P. and Abbott, D. (2002). A review of Parrondo's paradox. *Fluctuation and Noise Letters*, **2**, R71-R107.
- Jin, G. and Lee, J. (2015). Stock investment with a redistribution model of the history-dependent Parrondo game. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **26**, 781-790.
- Key, E. S. (1987). Computable examples of the maximal Lyapunov exponent. *Probability Theory and Related Fields*, **75**, 97-107.
- Lee, J. (2009). Optimal strategies for collective Parrondo games. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **20**, 973-982.
- Lee, J. (2011). Paradox in collective history-dependent Parrondo games. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **22**, 631-641.
- Mohan, C. (1955). The gambler's ruin problem with correlation. *Biometrika*, **42**, 486-493.
- Montero, M. (2011). Parrondo-like behavior in continuous-time random walks with memory. *Physics Reviews E*, **84**, 051139.
- Parrondo, J. M. R. (1996). How to cheat a bad mathematician? In *the Workshop of the EEC HC&M Network on Complexity and Chaos*, ISI, Torino, Italy.
- Parrondo, J. M. R., Harmer, G. P. and Abbott, D. (2000). New paradoxical games based on Brownian ratchets. *Physical Review Letters*, **85**, 5226-5229.
- Pinsky, R. and Scheutzow, M. (1992). Some remarks and examples concerning the transient and recurrence of random diffusions. *Annales de l'Institut Henri Poincaré?-Probabilités et Statistiques*, **28**, 519-536.
- Toral, R. (2001). Cooperative Parrondo's games. *Fluctuation and Noise Letters*, **1**, L7-L12.

Parrondo effect in correlated random walks with general jumps

Jiyeon Lee¹

¹Department of Statistics, Yeungnam University

Received 11 August 2016, revised 1 September 2016, accepted 2 September 2016

Abstract

We consider a correlated discrete-time random walk in which the current jump size depends on the previous jump size and a noncorrelated discrete-time random walk where the jump size is determined independently. By using the strong law of large numbers of Markov chains we derive the formula for the asymptotic means of the random mixture and the periodic pattern of these two random walks and then we show that there exists Parrondo's paradox where each random walk has mean 0 but their random mixture and periodic pattern have negative or positive means. We describe the parameter sets at which Parrondo's paradox holds in each case.

Keywords: Asymptotic mean, correlated random walks, jump size, Markov chains, Parrondo's paradox, stationary distributions.

¹ Professor, Department of Statistics, Yeungnam University, Kyeongsan 38541, Korea.
E-mail: leejy@yu.ac.kr