

Research Paper

DOI: <http://dx.doi.org/10.6108/KSPE.2016.20.3.037>

## 우주왕복선 액체로켓엔진 작동의 최적출력제어 시뮬레이션

차지형<sup>a</sup> · 고상호<sup>b,\*</sup>

# Optimal Output Feedback Control Simulation for the Operation of Space Shuttle Main Engine

Jihyoung Cha<sup>a</sup> · Sangho Ko<sup>b,\*</sup>

<sup>a</sup>Department of Aerospace and Mechanical Engineering, Korea Aerospace University, Korea

<sup>b</sup>School of Aerospace and Mechanical Engineering, Korea Aerospace University, Korea

\*Corresponding author. E-mail: [sanghoko@kau.ac.kr](mailto:sanghoko@kau.ac.kr)

### ABSTRACT

This paper deals with an optimal output control for Space Shuttle Main Engine (SSME), a liquid propellant rocket engine using a staged-combustion cycle. For this purpose, we modeled simplified mathematical model of SSME using each SSME component divided into 7 major categories and found trim points called Rated Propulsion Level (RPL). For design the closed-loop system of SSME, we designed optimal output feedback Linear Quadratic Regulation (LQR) control system using SSME linearized model under RPL 104% and demonstrated the performance of the controller through numerical simulation.

### 초 록

본 논문에서는 다단 연소방식의 액체로켓엔진인 우주왕복선 주 엔진(Space Shuttle Main Engine, SSME)의 제어 알고리즘을 다룬다. 이를 위해 SSME의 각 구성품들을 기준으로 크게 7가지 분류로 나누어 구성하여 수학적 모델링을 하였으며 순항상태 추력을 기준으로 Rated Propulsion Level (RPL)에 따른 정상상태 작동점을 구하였다. 페루프 시스템을 위하여 순항상태인 RPL 104% 조건에서의 선형모델을 이용하여 최적 출력피드백 LQR 제어를 설계하였으며 시뮬레이션을 통해 제어기의 성능을 검증하였다.

Key Words: Space Shuttle Main Engine(우주왕복선 주 엔진), Liquid Rocket Engine(액체로켓엔진), LQ control(LQ 제어), Optimal Output Feedback(최적 출력피드백), Numerical Simulation (수치적 시뮬레이션)

Received 10 December 2015 / Revised 25 April 2016 / Accepted 1 May 2016

Copyright © The Korean Society of Propulsion Engineers

pISSN 1226-6027 / eISSN 2288-4548

[이 논문은 한국추진공학회 2015년도 추계학술대회(2015. 11. 25-27, 경주 현대호텔) 발표논문을 심사하여 수정·보완한 것임.]

### 1. 서 론

우주발사체용 액체로켓엔진은 다양한 구성품들이 높은 에너지밀도를 가지고 극한 상황에서

작동하기 때문에 사고발생 가능성이 높으므로 높은 안정성과 신뢰성이 요구된다. 이와 함께 현대의 제어 이론을 바탕으로 건전성 감시 및 고장진단 기술이 급속히 발전하였고, 이 기술을 액체로켓엔진에 적용하여 로켓엔진의 건전성을 감시하는데 응용되고 있다[1]. 특히, 점점 로켓이 수행해야 하는 임무의 난이도가 높아지고, “스마트시스템”의 요구가 커지면서 추력제어 시스템 분석 및 설계가 더 강조되고 있다[2].

액체로켓엔진의 제어는 초기에는 로켓엔진의 성능을 제어하기 위하여 연료탱크 압력 제어, 추력제어를 위한 연소기 압력제어와 연료 혼합비를 이용하였다[2]. 그 이후 로켓의 안정화를 위한 연구를 수행하면서, 재사용이 가능한 우주왕복선 주 엔진(Space Shuttle Main Engine, SSME)의 개발과 함께 액체로켓엔진 건전성 감시 및 고장진단 기술이 중요해지면서 제어 이론을 바탕으로 한 Intelligent Control System (ICS)에 대한 연구가 진행되었다[3-7].

본 논문에서는 액체로켓엔진의 수학적 모델링을 기반으로 시뮬레이션 모델을 만들고, 이를 이용하여 순항조건에서의 작동점을 기준으로 정상상태 시뮬레이션을 통해 모델링을 확인하였다. 본 연구에서 사용되는 액체로켓엔진 모델은 재사용이 가능하며 다단연소 사이클 액체로켓엔진인 우주왕복선 주 엔진이다.

구축된 시뮬레이션 모델을 기반으로 선형화모델을 이용하여 최적 출력피드백 Linear Quadratic Regulator (LQR) 제어기를 설계하였으며 시뮬레이션을 이용하여 제어기의 성능을 확인하였다.

## 2. SSME 모델링

### 2.1 SSME 구성품의 수학적 모델링

SSME는 크게 공급계와 추진계, 배관계로 나눌 수 있다. 4개의 터보펌프, 2개의 유체터빈, 2개의 가스터빈 그리고 터빈을 구동하기 위한 2개의 예연소기가 공급계를 이루고, 주 연소기와 인젝터는 추력계를 구성하며 각종 밸브와 열 교환기, 기타 배관 등이 배관계를 이룬다[8]. 이와 같은

SSME의 운동 방정식은 총 38개의 1차 미분방정식으로 나타낼 수 있으며, 본 모델링에서는 시동조건에 대한 모델링을 생략하여 32개의 1차 미분방정식으로 구성하였으며 Appendix A에 정리하였다[8]. 32개의 1차 미분방정식은 Eq. 1-9과 같이 7가지 수학적 모델을 통해 유도되며 각각 터보펌프의 회전 동역학, 압력변동에 따른 관성, 압력변동에 따른 유량, 정압조건에서 밀도 변화에 따른 유동용적, 열 교환기 내부의 열평형, 열전달 온도 방정식 그리고 시간 지연 방정식을 의미한다[8].

- 모델 1: 터보펌프의 회전 동역학[8].

$$I_{tp} \frac{d\Omega_r}{dt} = \tau_t - \tau_p \quad (1)$$

총 4개의 방정식이 Eq. 1로부터 유도된다.  $I_{tp}$ 는 로터의 관성모멘트이고,  $\tau_t$ 는 터빈토크,  $\tau_p$ 는 펌프토크이다. 터빈과 펌프의 토크 차를 이용하여 로터의 각속도를 구할 수 있다.

- 모델 2: 압력변동에 따른 관성[8].

$$\left(\frac{L}{A}\right) \frac{d}{dt} \dot{m} = P_d - P_{pipe} - \frac{\lambda}{2\rho A^2} \dot{m}^2 \quad (2)$$

총 12개의 방정식이 Eq. 2로부터 유도된다. Fig. 2와 같이 길이  $L$ , 단면적  $A$ , 수두손실계수  $\lambda$ 인 파이프에서 밀도  $\rho$ 인 유량( $\dot{m}$ )은 뉴턴의 제2법칙을 이용한 Eq. 3을 통해 유도된다.

$$\begin{aligned} F_{net} &= ma = (\rho AL) \frac{dv}{dt} \\ &= A \left( P_d - P_{pipe} - \frac{\lambda}{2} \rho v^2 \right) \end{aligned} \quad (3)$$

- 모델 3: 압력변동에 따른 유량[8].

$$\kappa(\rho V) \frac{dP}{dt} = \sum \dot{m} = \dot{m}_{in} - \dot{m}_1 - \dot{m}_2 \cdots \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= \frac{d}{dt}(\rho AL) = \frac{d}{dt}(\rho V) \\ &= V \frac{d\rho}{dt} = \kappa(\rho V) \frac{dP}{dt} \end{aligned} \quad (5)$$

총 7개의 방정식이 Eq. 4로부터 유도된다. 입력된 유량과 출력된 유량의 차이를 통한 압력을

구할 수 있으며 Eq. 5를 통하여 유도된다. Eq. 4, 5에서  $\kappa$ 는  $\kappa = \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dt}$  로 정의되는 압축성 인자로 압력 구배의 증가에 따라 그 영향이 커지게 된다.

- 모델 4: 정압조건에서 밀도 변화에 따른 유동 용적[8].

$$V \frac{d\rho}{dt} = \sum \dot{m} \quad (6)$$

총 2개의 방정식이 Eq. 6로부터 유도된다. 연소기나 노즐 벽부의 열전달을 다루는 경우 압력 변화보다 밀도 변화에 역학적으로 더욱 민감한 변화를 보인다. Eq. 6의 유도 과정에서 압축성 인자와 압력 변화를 무시한다면 다음과 같은 정압 조건에서 밀도 변화에 따른 유동 부피를 구할 수 있다.

- 모델 5: 열 교환기 내부의 열평형[8].

$$\rho V \frac{du}{dt} = \dot{Q}_{w,in} - \dot{Q}_{w,out} + (\dot{m}h)_{in} - (\dot{m}h)_{out} \quad (7)$$

총 2개의 방정식이 Eq. 7에서 유도된다. 주 연소기와 노즐에서 열전달 과정에서 사용된 유체의 물성치를 다루는 부분으로 Fig. 3은 열교환기의 개략도이다. 유체가 흐르는 냉각 벽(Cold Wall)과 열벽(Hot Wall) 사이의 공간(V)에서 일어나는 현상으로 열역학 제1법칙을 이용하여 Eq. 7을 유도할 수 있으며 내부에너지를 구할 수 있다. Eq. 7에서  $u$ 는 비 내부에너지,  $h$ 는 비

엔탈피이고,  $\dot{Q}$ 는 시스템에 의해 운반되는 열 유량이다.

- 모델 6: 열전달 온도 방정식[8].

$$\frac{dT_{hw}}{dt} = \frac{1}{mc_p} (\dot{Q}_{c,in} - \dot{Q}_{w,in}) \quad (8)$$

총 4개의 방정식이 Eq. 8에서 유도된다. 엔진의 금속 벽면 내부의 천이 열전달 현상에 대한 수학적 기술을 통해 열전달 온도 방정식을 나타낼 수 있다. 열역학 제 1법칙 식에서 순 힘을 없애기 위해 체적 변화를 무시하고, Fig. 3에서 열벽 표면을 비단열 상태로 가정하면 Eq. 8과 같은 식을 구할 수 있다.

- 모델 7: 시간 지연 방정식[8].

$$\frac{d}{dt} \dot{m}(t) = \frac{1}{\epsilon} (\dot{m}_o(t) - \dot{m}(t)) \quad (9)$$

1개의 방정식이 Eq. 9에서 유도된다. 몇 가지의 변수는 다른 물리적 상태로의 변화 때문에 즉각적인 물리적 반응으로 나타나지 않으며 연소과정에서의 반응이 대표적이다. 이를 표현하기 위하여 Eq. 9과 같이 1차 시간지연 방정식을 이용하며  $\dot{m}_o$ 는 파이프의 출력부분에서 발생한 기존의 신호이고,  $\dot{m}$ 은 시간지연이 고려된 출력부분의 유량,  $\epsilon$ 는 지연된 시간이다. Eq. 9은 다음과 같이 Eq. 10, 11을 통해 유도된다.

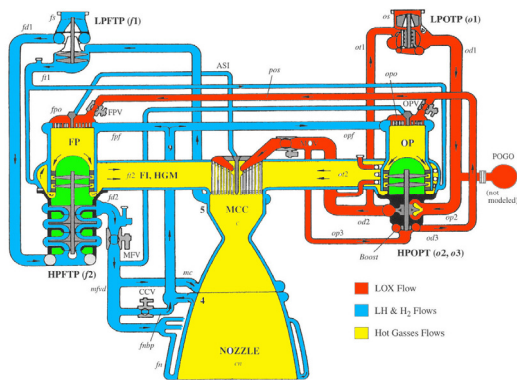


Fig. 1 Schematic of SSME[8].

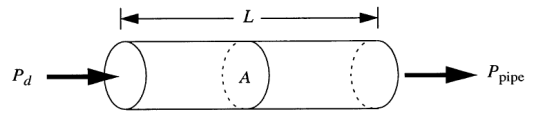


Fig. 2 Pipe fed by pump[8].

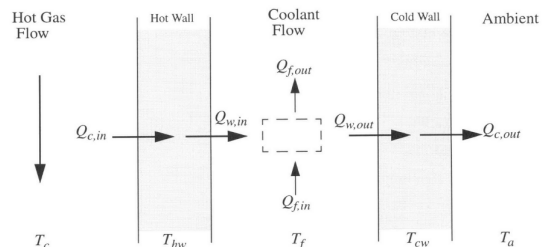


Fig. 3 Heat exchanger fluid flow[8].

$$\dot{m}_o(t) = \dot{m}(t+\epsilon) \tag{10}$$

$$\frac{\dot{m}_o(t) - \dot{m}(t)}{\epsilon} = \frac{\dot{m}(t+\epsilon) - \dot{m}(t)}{\epsilon} \tag{11}$$

2.2 Simulink를 이용한 SSME 모델링

Eq. 1-9와 같이 SSME의 각 구성품들에 대한 수학적 모델을 이용하여 Fig. 4와 같이 Matlab/Simulink 기반의 모델링 하였다.

시뮬레이션 구성단계에서 수소의 내부에너지와 밀도 등의 물성치는 NIST에서 제공하는 물성치 데이터를 이용하였으며, 산화제와 연소의 반응물에 대한 물성치 및 각종 펌프와 터빈의 성능곡선은 Rocketdyne에서 제시하는 성능곡선을 이용하였다[8-10]. 시뮬레이션 모델링을 확인하기 위해서 본 모델의 Rated Propulsion Level (RPL)에 따른 정상상태 작동점을 구하여 참고문헌 [8]에서 제시한 정상상태 데이터와 비교하였으며 참고문헌 [8]에서 제시한 32개 상태변수들의 값과 본 모델의 32개 상태변수들의 값 그리고 각각의 오차를 Appendix B에 정리하였다. Table 1은 Appendix B에 정리된 각 RPL에서의 32개 변수들의 평균 오차율을 정리한 것이다. Appendix B를 보면 각각 상태변수에 따라 크고 작은 오차를 보이며 오차율의 최대가 20%이며 평균적으로 10% 이내의 오차율을 확인하였다. 또한, 각 RPL은 주 연료 밸브(Main Fuel Valve, MFV), 주 산화제 밸브(Main Oxidizer Valve, MOV), 연소기 냉각 밸브(Chamber Coolant Valve, CCV), 연료 예연소기 밸브(Fuel Preburner Valve, FPV)와 산화제 예연소기 밸브(Oxidizer Preburner Valve, OPV)의 5개 밸브의 위치로 조절하므로 5개의 밸브 위치를 이용하여 각 RPL로의 변화에 대한 비선형 응답신호를 확인하였다. RPL 104%를 시작으로 해서 5초 간격으로 RPL 65%, 109%, 100% 순서로 변경하여 확인하였으며 Fig. 5는 그에 따른 압력응답이다. Fig. 5는 Open-loop 시뮬레이션임에도 불구하고 연소압력이 변화할 때 약간의 언더슈트가 생기지만, 약 1초 이내로 주어진 RPL의 조건으로 빠르게 수렴하는 것을 확인할 수 있다[9].

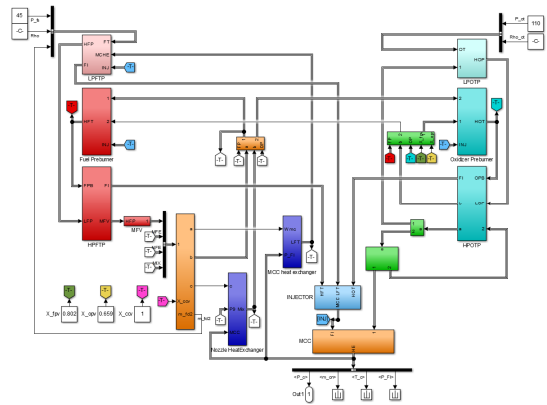


Fig. 4 Non-linear simulation model of SSME[9].

Table 1. Average of all parameter errors under rated propulsion level (RPL) respectively[9].

RPL	Error Average
104 % (Standard)	6.29 %
65 %	9.51 %
100 %	5.23 %
109 %	8.22 %

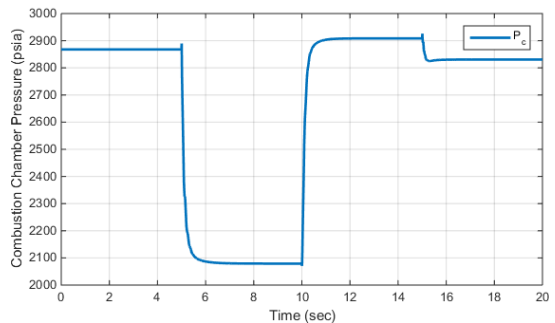


Fig. 5 Chamber pressure result of open-loop SSME simulation[9].

3. 제어기 설계

3.1 Linear Quadratic Regulation (LQR)[11]

Eq. 12, 13와 같은 Linear Time Invariant (LTI) 시스템이 주어진 상황에서 최적화를 수행하고자 하는 비용함수는 Eq. 14와 같다.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (12)$$

$$y = Cx \quad (13)$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (14)$$

그리고 Eq. 15와 같이 출력피드백 제어를 구현하고자 한다.

$$u = -Ky \quad (15)$$

Eq. 14에서 가중행렬  $Q$ 와  $R$ 은 비용함수에 대한 상태변수와 제어입력의 가중행렬로 LQR 제어기를 포함하는 폐루프 시스템의 극점의 위치는 선정된 두 개의 가중행렬에 의해서 결정된다. Eq. 12-15를 이용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{x} = (A - BKC)x = A_c x \quad (16)$$

따라서 Eq. 14의 비용함수를 최소화하면서 Eq. 16의 시스템이 안정하기 위한 출력피드백 계인을 구하기 위하여 Lagrange multiplier approach를 응용한 Hamiltonian을 설정하였으며 설정한 Hamiltonian은 다음과 같다.

$$\dot{h} = tr(PX) + tr(gS) \quad (17)$$

$$X = x(0)x^T(0) \quad (18)$$

Eq. 17에서  $S$ 는 대칭행렬이며 Eq. 17과 같이 Hamiltonian을 설정하여 LQR 제어기 설계를 위한 출력피드백 계인의 필요조건은 다음과 같다.

$$0 = \frac{\partial h}{\partial S} = g = A_c^T P + P A_c + C^T K^T R K C + Q \quad (19)$$

$$0 = \frac{\partial h}{\partial P} = A_c S + S A_c + X \quad (20)$$

$$0 = \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial K} = R K C S C^T - B^T P S C^T \quad (21)$$

따라서 해를 구하는 계산측면에서 살펴보면,  $R$ 이 양정치 행렬인 경우 ( $R > 0$ ), Eq. 21로부터 다음과 같은 관계를 얻을 수 있으며 이를 이용하여 출력피드백 계인을 구할 수 있다.

$$K = R^{-1} B^T P S C^T (C S C^T)^{-1} \quad (22)$$

### 3.2 시뮬레이션 결과

SSME의 LQR 제어기를 설계하기 위하여 앞에서 구한 작동점에서 선형화를 하여 Eq. 12, 13와 같은 모델을 구하였으며 본 논문에서 모델링한 SSME의 운동방정식이 32개의 1차 미분방정식으로 구성되므로  $A \in \mathbb{R}^{32 \times 32}$ 인 시스템이다. 본 논문에서는 RPL 104% 정상상태를 기준으로 선형 모델을 구하였으며, 상태벡터는 Appendix B에 각 RPL에 따른 상태변수 값과 같이 정리하였다. RPL 104%에서는 5개의 밸브 중 주 연료 밸브(MFV)와 주 산화제 밸브(MOV), 그리고 연소기 냉각 밸브(CCV)가 완전히 열려 있으므로 연료 예연소기 밸브(FPV)와 산화제 예연소기 밸브(OPV), 두 밸브를 입력변수로 설정하였다. 또한, 추력과 연소기 온도를 제어하기 위하여 이와 관련된 연소실 내부압력( $P_c$ )과 Eq. 23를 통해 구한 공기-연료 혼합비 또는 공연비(Mixture Ratio, MR)를 출력변수로 하여  $B \in \mathbb{R}^{32 \times 2}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{2 \times 32}$ 인 시스템으로 2-input 2-output 시스템이다.

$$MR = \frac{\dot{m}_{ox}}{\dot{m}_{fuel}} \quad (23)$$

Eq. 19-21의 충분조건을 만족하는 출력피드백 계인을 구하는 과정에서 가중행렬  $Q$ ,  $R$  이외에도 입력되는 초기 계인에 민감하여 여러 번의 시도를 한 후에 다음과 같은 초기 계인값  $K_0$ 를 구하였다.

$$K_0 = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} -0.1198 & -0.4242 \\ 0.0677 & -0.4456 \end{bmatrix} \quad (24)$$

LQR 제어기의 성능을 확인하기 위하여 Fig. 6과 같이 시스템을 구성하여 SSME의 폐루프 시

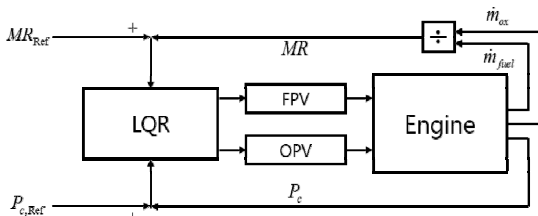


Fig. 6 LQR control system.

물레이션을 수행하였다. LQR 제어기 성능을 확인하는 과정에서 RPL 104%에서 선형화하여 구한 시스템 행렬인  $A$ ,  $B$ ,  $C$  와 Eq. 14의 비용함수에서 가중행렬  $Q$ ,  $R$  그리고 Eq. 24의 초기 게인값  $K_0$ 를 이용하여 구한 출력피드백 게인  $K$ 를 Appendix C에 정리하였다.

시물레이션을 수행할 때, 밸브 구동장치를 구성하기 위하여 1차 전달함수를 이용하여 모델링하였으며, 제어기의 성능은 오차의 수렴정도로 판단하기 때문에 초기값은 RPL 104%기준으로 임의의 오차를 포함한 값을 설정하였다.

일반적으로 로켓엔진을 설계할 때, 안전계수 (Margin of Safety, MS)를 고려하여 설계를 하며 이 범위를 벗어나는 것을 방지하기 위하여 각 부품의 상태를 모니터링 한다. 안전한계는 유인 로켓, 무인로켓 그리고 부품에 따라 안전계수가 달라지지만 일반적으로 1.1로 정해진다[12]. 따라서 안전계수 1.1에 도달하기 전의 값인 RPL 104%일 때 32개의 모든 상태변수들의 5% 오차를 가지는 값을 초기값으로 이용하여 상태변수의 변화를 확인하였다. 시스템의 응답을 확인하기 위하여 본 모델링을 구성하는 32개의 상태변수를 모두 확인해야하지만 상태변수가 많아 모든 변수를 확인하기 어려우므로 2개의 출력변수인 연소실 내부압력( $P_c$ )과 공연비( $MR$ )의 응답 이외에 모든 변수에 직접적으로 연관되어있는 고압 연료터보펌프(High Pressure Fuel Turbopump, HPFTP)의 회전속도( $\Omega_{f2}$ )와 고압 산화제터보펌프(High Pressure Oxidizer Turbopump, HPOTP)의 회전속도( $\Omega_{o2}$ )와 로켓엔진 재질에 영향을 줄 수 있는 주 연소실(Main Combustion Chamber, MCC) 내부온도( $T_c$ )를 확인하였다.

Fig. 7은 출력변수인 연소실 내부압력과 공연비의 응답을 나타낸 그래프이고, Fig. 8은 연료 및 산화제 고압터보펌프의 회전속도 및 주 연소실 내부압력 응답을 나타낸 그래프이다. Fig. 7, 8 모두 초기에 설정된 오차에서 시작하지만 LQR 제어기를 포함하지 않은 개루프(open-loop) 시스템과 LQR 제어기를 포함한 폐루프(closed-loop) 시스템 모두 점차 순항상태일 때의 상태로 수렴한다. 개루프 시스템은 0.5초 이내로 빠르게 수렴하지만, 폐루프 시스템은 개루프 시스템보다 더 빠르게 수렴하는 것을 확인할 수 있다. 특히, 폐루프 시스템의 연소실 내부압력 응답은 0.1초 이내로 정상상태 오차의 1% 이내로 되는 것을 확인할 수 있다. Fig. 7에서 공연비의 반응은 Eq. 23에 따라 산화제와 연료의 반응에 직접적으로 영향을 받으므로 산화제와 연료를 공급하는 Fig. 8의 고압 연료터보펌프와 고압 산화제터보펌프의 반응에 영향을 받는다.

Fig. 8에서 고압 산화제터보펌프의 회전속도가 더 빠르게 순항상태와의 오차가 0으로 감소하므로 연소실로 유입되는 산화제의 양이 연료의 양보다 빠르게 오차가 0으로 감소하게 된다. 따라서 산화제 유량의 오차가 연료 유량의 오차보다 빠르게 감소하므로 개루프 시스템일 때의 공연비와 비교하여 더 크게 반응을 보인다. 하지만, 폐루프 시스템의 공연비 응답이 개루프 시스템의 공연비 응답보다 작으므로 공연비와 연관된 연소실 내부 온도가 개루프 시스템과 비교하여 빠르게 감소하는 것을 확인할 수 있다. 이를 통해 최적 출력피드백 LQR 제어기를 이용하여 우주왕복선 액체로켓엔진의 빠르고 정확한 제어가 가능하다는 것을 확인하였다. 또한, 상태변수가 변화하여 순항상태일 때 오차가 발생하여도 빠른 시간 내에 오차가 1% 이내로 수렴하므로 로켓엔진의 일부 부품이 고장이 발생하여 상태변수가 크게 변해도 LQR 제어기를 통하여 시스템의 피해를 최소화시킬 수 있을 것이라 기대할 수 있다. 이를 확인하기 위하여 임의로 고속 연료터보펌프의 터빈효율이 저하되는 고장을 가정하여 수치적 시물레이션을 통해 확인하였다. 엔진시스템의 고장일 때의 제어기의 성능을 확인

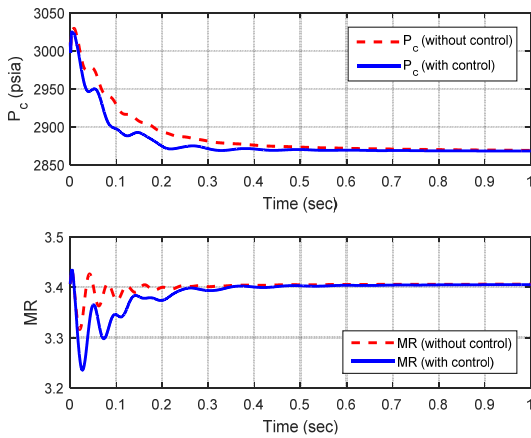


Fig. 7 Nonlinear response of chamber pressure and mixed ratio under RPL 104%.

하기 위하여 출력변수인 연소기 압력과 공연비 이외에도 고압 연료터보펌프, 고압 산화제터보펌프 그리고 연소실 내부온도를 확인하였다.

Fig. 7, 8과 마찬가지로 Fig. 9은 출력변수가 연소기 압력( $P_c$ )과 공연비(MR)의 응답을 나타낸 그래프이고, Fig. 10은 고압연료터보펌프의 회전속도( $\Omega_{f2}$ ) 및 고압연료터보펌프의 회전속도( $\Omega_{o2}$ )와 주 연소실 내부온도( $T_c$ ) 응답을 나타낸 그래프이다. 로켓엔진 시스템에 고장이 발생하면 고장으로 인해 시스템의 특성이 변하기 때문에 정상상태를 만족하는 상태변수의 변화가 생기므로 제어기가 포함되지 않은 개루프 시스템과 제어기가 포함된 폐루프 시스템 모두 새로운 정상상태로 수렴하게 된다[9].

Fig. 9, 10에서 빨간 점선이 제어기가 포함되지 않은 개루프 시스템으로 고속 연료터보펌프의 터빈효율감소로 인한 응답을 보이고 있다. 고속 연료터보펌프의 터빈 효율감소로 회전속도가 감소하여 연료공급량이 줄어들면 우주왕복선 액체로켓엔진의 연료 및 산화제 예연소기와 주 연소실에서의 공연비가 높아져 연료 및 산화제 예연소기 내부온도와 주 연소실 내부온도가 증가하게 된다[9]. 이에 따라 고속 연료터보펌프의 회전속도는 다시 증가하지만 로켓엔진 고장으로 인한 새로운 정상상태로 수렴되기 전까지 변화되는 로켓엔진 시스템의 영향으로 기존 고장이

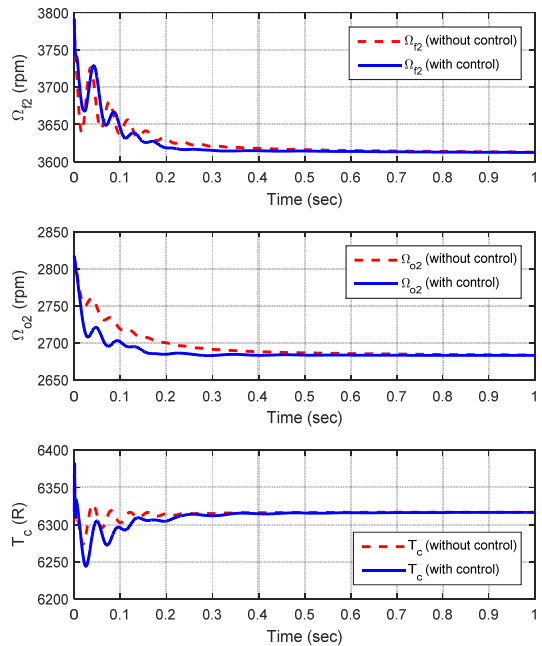


Fig. 8 Nonlinear response of rotation velocity of HPFTP, HPOTP and MCC temperature under RPL 104%.

발생하기 전보다는 감소한 상태로 수렴하며, 연소실 내부압력 및 공연비, 고압 산화제터보펌프의 회전속도와 주 연소실 내부온도는 기존 고장이 발생하기 전보다 증가된 상태에서 수렴하게 된다[9]. Fig. 9, 10에서 파란 실선은 출력피드백 LQR 제어기가 포함된 폐루프 시스템에서의 응답이다. 개루프 시스템에서의 응답과 마찬가지로 고속 연료터보펌프의 터빈효율감소 고장이 원인으로 새로운 정상상태에 수렴하게 된다. 따라서 연소실 내부압력, 공연비 등 상태변수가 변화하게 되지만 개루프 시스템보다 새로운 정상상태로 더 빠르게 수렴하면서도 상태변수의 변화율의 크기가 작다는 것을 확인할 수 있다.

특히, 연소실 내부압력 및 내부온도와 같이 일정 한계치를 넘으면 로켓엔진 시스템에 치명적인 피해를 초래하는 상태변수의 변화율이 제어기를 포함한 폐루프 시스템이 더 작으므로 제어기를 이용하면 요구되는 성능으로의 빠르고 정확한 제어 외에도 고장으로 인한 피해의 최소화가 가능하다는 것을 기대할 수 있다.

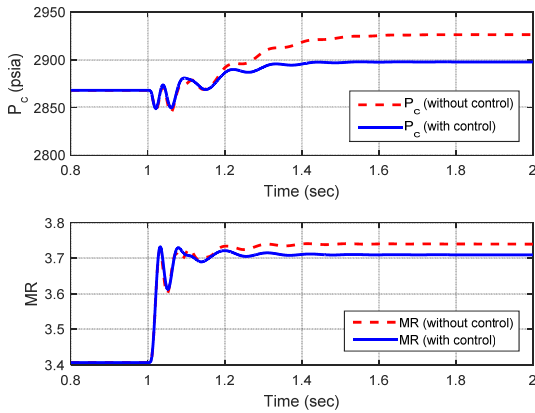


Fig. 9 Nonlinear response of chamber pressure and mixed ratio (MR) under HPFTP fault.

#### 4. 결 론

본 연구에서는 우주왕복선 주 엔진의 수학적 모델링을 하였으며 순항상태를 기준으로 RPL에 따른 작동점을 구하여 시뮬레이션을 통해 확인하였다. 페루프 시스템 구성을 위하여 선형모델을 바탕으로 최적 출력피드백 LQR 제어를 설계하였으며, 이에 대한 수치적 시뮬레이션을 통해 제어기의 성능을 확인하였다. 또한, 최적 출력피드백 LQR 제어를 통해 시스템의 오차를 수정하여 원하는 성능으로 빠르고 정확하게 제어하는 특성 이외에도 시스템이 고장이 발생하였을 경우 제어기를 이용하여 고장으로 인한 시스템 손상의 최소화 가능성을 확인하였다.

추후에는 순항상태에서의 모델링을 확장하여 발사과정 전체에 대한 액체로켓엔진의 페루프 모델링을 하고 이를 이용하여 고장검출 및 진단 시스템 연구를 수행할 예정이다.

#### 후 기

이 논문은 2013년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임(No. 2013M1A3A3A02042434).

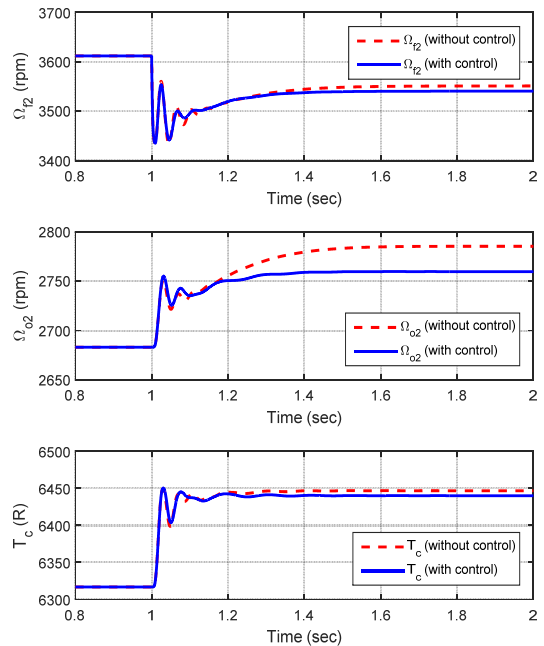


Fig. 10 Nonlinear response of rotation velocity of HPFTP, HPOTP and MCC temperature under HPFTP fault.

#### References

1. Cha, J.H., Ha, C.S., O, S.H. and Ko, S.H., "A Survey on Health Monitoring and Management Technology Liquid Rocket Engines," *Journal of the Korean Society of Propulsion Engineers*, Vol. 18, No. 6, pp. 50-58, 2014.
2. Huzel, D.K. and Huang, D.H., *Modern engineering for design of liquid-propellant rocket engines*, AIAA, 1992.
3. Lee, Y.C., "Stability and control of liquid propellant rocket systems," *Journal of the American Rocket Society*, Vol. 23, No. 2, pp. 75-81, 1953.
4. Merrill, W.C. and Lorenzo, C.F., "A Reusable Rocket Engine Intelligent Control," NASA TM 100963, Jul. 1988.



5. Musgrave, J.L., "Linear Quadratic Servo Control of a Reusable Rocket Engine," NASA TM 105291, Jun. 1991.
6. Lorenzo, C.F. and Musgrave, J.L., "Overview of Rocket Engine Control," NASA TM 105318, Jan. 1992.
7. Musgrave, J.L., Paxson, D.E., Litt, J.S. and Merrill, W.C., "A Demonstration of an Intelligent Control System for a Reusable Rocket Engine," NASA TM 105794, May 1992.
8. Paulo, C.T., "Dynamics Models for Liquid Rocket Engines with Health Monitoring Application," Master's Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Boston, 1998.
9. Ha, C.S., Cha, J.H., Koo, J.Y. and Ko, S.H., "Dynamic Simulation and Analysis of Space Shuttle Main Engine under Artificially Injected Faults," *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*, (2016) (submitted).
10. McCarty, R.D., "Hydrogen Technological Survey-Thermophysical Properties," Aerospace Safety Research and Data Institute, NASA Lewis Research Center, NASA SP 3089, 1975.
11. Stevens, B. L and Lewis, F. L., *Aircraft control and simulation*, 2<sup>nd</sup> ed., John Wiley & Sons, 2003.
12. Joint Army Navy NASA Air Force, "Test and Evaluation Guideline for Liquid Rocket Engines," Joint Army Navy NASA Air Force Liquid Propulsion Subcommittee Test Practices and Standard Panel, 2011.

## Appendix A. Space Shuttle Main Engine Dynamic Equations

Table A.1 Equations from Model 1, 4 &amp; 5 (total 8 equations) [8].

no	equation	no	equation
1	$I_{f2} \frac{d\Omega_{f2}}{dt} = \tau_{ft2} - \tau_{fp2}$	5	$V \frac{d}{dt} \rho_5 = \dot{m}_{mc} - \dot{m}_{ft1}$
2	$I_{o2} \frac{d\Omega_{o2}}{dt} = \tau_{ot2} - \tau_{op2} - \tau_{op3}$	6	$V \frac{d}{dt} \rho_4 = \dot{m}_{fn} - \dot{m}_4$
3	$I_{f1} \frac{d\Omega_{f1}}{dt} = \tau_{ft1} - \tau_{fp1}$	7	$\rho_5 V \frac{d}{dt} SU_5 = \dot{Q}_{15} - \dot{Q}_{25} + \dot{m}_{mc} h_{mc} - \dot{m}_{ft1} h_5$
4	$I_{o1} \frac{d\Omega_{o1}}{dt} = \tau_{ot1} - \tau_{op1}$	8	$\rho_4 V \frac{d}{dt} SU_4 = \dot{Q}_{14} - \dot{Q}_{24} + \dot{m}_{fn} h_{fn} - \dot{m}_4 h_4$

Table A.2 Equations from Model 2 (total 12 equations) [8].

no	equation	no	equation
9	$\left(\frac{L}{gA}\right) \frac{d}{dt} \dot{m}_{op3} = P_{od3} - P_{pos} - \left[\frac{\lambda}{2g\rho_{ox}A^2}\right]_{pipe} \dot{m}_{op3}^2$	15	$\left(\frac{L}{gA}\right) \frac{d}{dt} \dot{m}_{mc} = P_{mfvd} - P_5 - \left[\frac{\lambda}{2gA^2}\right]_{pipe} \dot{m}_{mc}^2$
10	$\left(\frac{L}{gA}\right) \frac{d}{dt} \dot{m}_{mov} = P_{ot2} - P_c - f(A)_{mov} \dot{m}_{mov}^2 - \left[\frac{\lambda}{2g\rho_{ox}A^2}\right]_{pipe} \dot{m}_{mov}^2$	16	$\left(\frac{L}{gA}\right) \frac{d}{dt} \dot{m}_{fn} = P_{mfvd} - P_4 - \left[\frac{\lambda}{2g\rho_{fx}A^2}\right]_{pipe} \dot{m}_{fn}^2$
11	$\left(\frac{L}{gA}\right) \frac{d}{dt} \dot{m}_{fpo} = P_{pos} - P_{FP} - f(A)_{fpo} \dot{m}_{fpo}^2 - \left[\frac{\lambda}{2g\rho_{ox}A^2}\right]_{pipe} \dot{m}_{fpo}^2$	17	$\left(\frac{L}{gA}\right) \frac{d}{dt} \dot{m}_4 = P_4 - P_5 - \left[\frac{\lambda}{2gA^2}\right]_{pipe} \dot{m}_4^2$
12	$\left(\frac{L}{gA}\right) \frac{d}{dt} \dot{m}_{opo} = P_{pos} - P_{OP} - f(A)_{opo} \dot{m}_{opo}^2 - \left[\frac{\lambda}{2g\rho_{ox}A^2}\right]_{pipe} \dot{m}_{opo}^2$	18	$\left(\frac{L}{gA}\right) \frac{d}{dt} \dot{m}_{fnbp} = P_{mfvd} - P_9 - f(A)_{ccv} \dot{m}_{fnbp}^2$
13	$\left(\frac{L}{gA}\right) \frac{d}{dt} \dot{m}_{fpf} = P_9 - P_{FP} - \left[\frac{\lambda}{2gA^2}\right]_{pipe} \frac{\dot{m}_{fpf}^2}{\rho_9}$	19	$\left(\frac{L}{gA}\right) \frac{d}{dt} \dot{m}_{os} = P_{ot} - P_{os} - \left[\frac{\lambda}{2g\rho_{ox}A^2}\right]_{pipe} \dot{m}_{os}^2$
14	$\left(\frac{L}{gA}\right) \frac{d}{dt} \dot{m}_{opf} = P_9 - P_{OP} - \left[\frac{\lambda}{2gA^2}\right]_{pipe} \frac{\dot{m}_{opf}^2}{\rho_9}$	20	$\left(\frac{L}{gA}\right) \frac{d}{dt} \dot{m}_{ot1} = P_{od2} - P_{od1} - C_f \dot{m}_{ot1}^2$

Table A.3 Equations from Model 3, 6 &amp; 7 (total 12 equations) [8].

no	equation	no	equation
21	$\kappa_{ox} \rho_{ox} V \frac{d}{dt} P_{pos} = \dot{m}_{op3} - \dot{m}_{fpo} - \dot{m}_{opo} - \dot{m}_{op2c}$	27	$\left(\frac{V}{JR_y T_c}\right) \frac{d}{dt} P_c = \dot{m}_{FI} + \dot{m}_{mov} - \dot{m}_{ca}$
22	$\kappa \rho V \frac{d}{dt} P_{OP} = \dot{m}_{opf} + \dot{m}_{opo} - \dot{m}_{ot2}$	28	$\frac{d}{dt} Tw_{15} = \frac{1}{mc_v} (\dot{Q}_{tc5} - \dot{Q}_{15})$
23	$\left(\frac{V}{JR_y T_{FP}}\right) \frac{d}{dt} P_{FP} = \dot{m}_{fpf} + \dot{m}_{fpo} - \dot{m}_{ft2}$	29	$\frac{d}{dt} Tw_{25} = \frac{1}{mc_v} (\dot{Q}_{25} - \dot{Q}_{cw5})$
24	$\left(\frac{V}{JR_y T_9}\right) \frac{d}{dt} P_9 = \dot{m}_4 + \dot{m}_{fnbp} - \dot{m}_{fpf} - \dot{m}_{opf}$	30	$\frac{d}{dt} Tw_{14} = \frac{1}{mc_v} (\dot{Q}_{tc4} - \dot{Q}_{14})$
25	$\kappa_{ox} \rho_{ox} V \frac{d}{dt} P_{os} = \dot{m}_{os} + \dot{m}_{ot1} - \dot{m}_{op2}$	31	$\frac{d}{dt} Tw_{24} = \frac{1}{mc_v} (\dot{Q}_{24} - \dot{Q}_{cw4})$
26	$\left(\frac{V}{JR_y T_{FI}}\right) \frac{d}{dt} P_{FI} = \dot{m}_{ft1} + \dot{m}_{ot2} + \dot{m}_{ft2} - \dot{m}_{FI} - \dot{m}_{ftk}$	32	$\frac{d}{dt} \dot{m}_{FI} = \frac{1}{\epsilon} (\dot{m}_{fi} - \dot{m}_{FI})$

## Appendix B. Steady State Values Comparison between MIT model and KAU model

Table B.1 Steady State Values Comparison with MIT model under RPL 65% &amp; 100% [8].

Variable (states)		Description	Units	65% RPL			100% RPL		
				MIT	KAU	error (%)	MIT	KAU	error (%)
$P_c$	x(1)	Main chamber pressure	psia	1953.9	2016	3.18	3006	2830.7	5.83
$\dot{m}_{fi}$	x(2)	Main fuel injector flow rate	lbm/sec	128.6	138.6	7.8	214.7	213.2	0.7
$\dot{m}_{mov}$	x(3)	Main oxidizer valve flow rate	lbm/sec	532.6	533.8	0.23	802.4	735.6	8.33
$\dot{m}_{op3}$	x(4)	HPOTP boost pump LOX flow rate	lbm/sec	52.3	47.5	9.14	96.7	89.1	7.87
$P_{fi}$	x(5)	Fuel injector pressure	psia	2064.1	1834.7	11.11	3230	3143.4	2.68
$\Omega_{f2}$	x(6)	HPFTP turbine speed	rad/sec	2824.3	2899.9	2.68	3596.6	3563.6	0.92
$O_{o2}$	x(7)	HPOTP turbine speed	rad/sec	2049.3	2060.1	0.53	2856.6	2658.3	6.94
$P_{os}$	x(8)	LPOTP pump inlet pressure	psia	103.5	103.5	0.01	99.9	100.8	0.86
$\dot{m}_{os}$	x(9)	LPOTP pump inlet flow rate	lbm/sec	584.9	581.3	0.61	899.1	824.7	8.28
$\Omega_{o1}$	x(10)	LPOTP turbine speed	rad/sec	419.2	426.2	1.68	527.5	510.1	3.29
$\dot{m}_{ot1}$	x(11)	LPOTP turbine flow rate	lbm/sec	132.8	133.8	0.73	176	166.4	5.44
$P_9$	x(12)	Preburners fuel supply line pressure	psia	3243.4	3015.7	7.02	5499.6	5102.6	7.22
$\dot{m}_{fnb}$	x(13)	Nozzle HE bypass fuel flow rate	lbm/sec	31.8	35.2	10.83	61.1	67.2	9.9
$SU_4$	x(14)	Fuel sp. int. energy at nozzle HE	Btu/lbm	1003.5	823	17.99	1037.3	963.5	7.11
$\rho_4$	x(15)	Fuel density at nozzle HE	lbm/in <sup>3</sup>	6.81E-04	7.45E-04	9.43	1.02E-03	1.02E-03	0.81
$\dot{m}_4$	x(16)	Nozzle HE outlet fuel flow rate	lbm/sec	40.6	50.9	25.43	52.2	53.2	1.96
$\dot{m}_{opf}$	x(17)	Oxidizer preburner fuel flow rate	lbm/sec	25.3	28.2	11.41	34.9	36.9	5.68
$\dot{m}_{opo}$	x(18)	Oxidizer preburner LOX flow rate	lbm/sec	11.2	9.5	14.83	23.3	21.6	7.12
$P_{op}$	x(19)	Oxidizer preburner pressure	psia	2884.4	2590.1	10.2	5047.5	4610	8.67
$P_{fp}$	x(20)	Fuel preburner pressure	psia	2956.4	2601.8	11.99	4976.9	4522.5	9.13
$\dot{m}_{fpf}$	x(21)	Fuel preburner fuel flow rate	lbm/sec	47.1	58	23.11	78.3	83.5	6.63
$\dot{m}_{fpo}$	x(22)	Fuel preburner oxidizer flow rate	lbm/sec	36.1	33.3	7.73	66.5	61.7	7.28
$\dot{m}_{mc}$	x(23)	MCC heat exchanger fuel flow rate	lbm/sec	18.3	21	15	28.4	27.1	4.62
$\dot{m}_{fn}$	x(24)	Nozzle HE inlet fuel flow rate	lbm/sec	40.6	50.9	25.43	52.2	53.2	1.96
$\Omega_{f1}$	x(25)	LPFTP turbine speed	rad/sec	1491.8	1589.7	6.56	1634.5	1527.5	6.54
$\rho_5$	x(26)	Fuel density at MCC HE	lbm/in <sup>3</sup>	5.66E-04	6.21E-04	9.83	8.89E-04	8.79E-04	1.48
$SU_5$	x(27)	Fuel sp. int. energy at MCC HE	Btu/lbm	1171.8	1021.2	12.85	1042	1012.6	2.83
$Tw_{15}$	x(28)	Hot wall temp. at MCC HE	R	1228.8	1131.4	7.92	1214.9	1181.1	2.78
$Tw_{25}$	x(29)	Cold wall temp. at MCC HE	R	509	452.9	11.02	466	453.2	2.75
$Tw_{14}$	x(30)	Hot wall temp. at nozzle HE	R	1162.5	1031.9	11.24	1260.3	1196.3	5.08
$Tw_{24}$	x(31)	Cold wall temp. at nozzle HE	R	449.5	379.2	15.65	465.8	436.6	6.28
$P_{pos}$	x(32)	OP & FP supply line pressure	psia	4087.6	4142.8	1.35	6978.7	6244.4	10.52

Table B.2 Steady State Values Comparison with MIT model under RPL 104% &amp; 109% [8].

Variable (states)		Description	Units	104% RPL			109% RPL		
				MIT	KAU	error (%)	MIT	KAU	error (%)
$P_c$	x(1)	Main chamber pressure	psia	3126.2	2867.9	8.26	3599.2	2908.5	19.19
$\dot{m}_{fi}$	x(2)	Main fuel injector flow rate	lbm/sec	225.6	218.1	3.33	214.7	223.6	4.12
$\dot{m}_{mov}$	x(3)	Main oxidizer valve flow rate	lbm/sec	832.3	742.8	10.75	869.5	750.6	13.68
$\dot{m}_{op3}$	x(4)	HPOTP boost pump LOX flow rate	lbm/sec	103.1	92.1	10.67	111.6	95.4	14.48
$P_{fi}$	x(5)	Fuel injector pressure	psia	3369.1	3237.1	3.92	3545.3	3340.3	5.78
$\Omega_{f2}$	x(6)	HPFTP turbine speed	rad/sec	3695.6	3611.6	2.27	3822.2	3664	4.14
$O_{o2}$	x(7)	HPOTP turbine speed	rad/sec	2947	2683.2	8.95	3059	2710	11.41
$P_{os}$	x(8)	LPOTP pump inlet pressure	psia	99.5	100.6	1.15	99	100.5	1.54
$\dot{m}_{os}$	x(9)	LPOTP pump inlet flow rate	lbm/sec	935.4	834.9	10.74	981	846	13.76
$\Omega_{o1}$	x(10)	LPOTP turbine speed	rad/sec	540.4	513.2	5.02	556.7	516.6	7.2
$\dot{m}_{ot1}$	x(11)	LPOTP turbine flow rate	lbm/sec	180.6	167.7	7.12	186.3	169.2	9.2
$P_9$	x(12)	Preburners fuel supply line pressure	psia	5793.6	5246.8	9.44	6175.1	5406.7	12.44
$\dot{m}_{fnb}$	x(13)	Nozzle HE bypass fuel flow rate	lbm/sec	62.1	67.2	8.14	62.1	67.1	8.01
$SU_4$	x(14)	Fuel sp. int. energy at nozzle HE	Btu/lbm	1008.5	943.2	6.48	983.1	919.7	6.44
$\rho_4$	x(15)	Fuel density at nozzle HE	lbm/in <sup>3</sup>	1.09E-03	1.05E-03	3.43	1.16E-03	1.09E-03	6.03
$\dot{m}_4$	x(16)	Nozzle HE outlet fuel flow rate	lbm/sec	55.1	54.8	0.48	58.3	56.7	2.67
$\dot{m}_{opf}$	x(17)	Oxidizer preburner fuel flow rate	lbm/sec	36.1	37.6	4.05	37.7	38.4	1.74
$\dot{m}_{opo}$	x(18)	Oxidizer preburner LOX flow rate	lbm/sec	24.8	22.3	10.01	26.7	23	13.7
$P_{op}$	x(19)	Oxidizer preburner pressure	psia	5326	4744.4	10.92	5685.7	4892.2	13.96
$P_{fp}$	x(20)	Fuel preburner pressure	psia	5251.8	4663.4	11.2	5611.4	4819.7	14.11
$\dot{m}_{fpf}$	x(21)	Fuel preburner fuel flow rate	lbm/sec	81.1	84.4	4.1	84.3	85.5	1.38
$\dot{m}_{fpo}$	x(22)	Fuel preburner oxidizer flow rate	lbm/sec	71.2	64	10.17	77.4	66.5	14.04
$\dot{m}_{mc}$	x(23)	MCC heat exchanger fuel flow rate	lbm/sec	30.1	27.8	7.64	32.4	28.6	11.79
$\dot{m}_{fn}$	x(24)	Nozzle HE inlet fuel flow rate	lbm/sec	55.1	54.8	0.48	58.3	56.7	2.67
$\Omega_{f1}$	x(25)	LPFTP turbine speed	rad/sec	1671.5	1534.5	8.2	1722	1541.8	10.47
$\rho_5$	x(26)	Fuel density at MCC HE	lbm/in <sup>3</sup>	9.41E-04	9.05E-04	3.87	1.01E-03	9.36E-04	7.22
$SU_5$	x(27)	Fuel sp. int. energy at MCC HE	Btu/lbm	1012.5	995.8	1.65	974.7	978	0.34
$Tw_{15}$	x(28)	Hot wall temp. at MCC HE	R	1203.1	1172.9	2.51	1187.1	1164.1	1.94
$Tw_{25}$	x(29)	Cold wall temp. at MCC HE	R	455.9	447.3	1.9	443.1	441	0.47
$Tw_{14}$	x(30)	Hot wall temp. at nozzle HE	R	1250.4	1185.7	5.17	1244.5	1173.2	5.73
$Tw_{24}$	x(31)	Cold wall temp. at nozzle HE	R	456.4	429.4	5.92	448.1	421.1	6.03
$P_{pos}$	x(32)	OP & FP supply line pressure	psia	7308.6	6318.3	13.55	7741.8	6396.2	17.38

## Appendix C.

## SSME Linearized System Matrices

 $A(32 \times 32)$ 

Columns 1 through 8

-1340.26	7638.994	3450.866	-4188.13	0	0	0	0
0	-50	0	0	1.720689	0	0	0
-25	0	-170.897	-107.189	0	0	103.741	25
0	0	-428.754	-1784.05	0	0	648.1299	100
0	-3258.26	0	0	-215.292	0	0	0
0	0	0	0	-428.292	-220.8	0	0
0	0	-8.44022	-19.1611	-57.9233	0	-50.5537	0
0	0	-149.254	-149.254	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-21.7391
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-5.14711	-5.14711	0	0	4.981561	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0.719353	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	168.0592	0	0	0
0	0	0	0	712.1099	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	17.98382	0	0
0	0	0	0	0	53.9245	0	0
0	0	0	0	-10.9207	0	0	0
0	0	0	0	1.02E-05	0	0	0
0	0	0	0	17.38743	0	0	0
0.86416	-6.34589	0.957611	7.303498	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
3.366385	-24.7599	3.736329	28.49619	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	80.32463	38451.64	0	0	-121.423	0

Columns 9 through 16

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-0.00746	2.193626	-0.31673	-11.0591	-2.68621	
-6.37295	39.21174	-107.189	0	0	0	0	0	
-25.4918	156.8469	-428.754	0	0	0	0	0	
0	0	0	-0.83525	245.7605	-35.484	-1238.99	-300.947	
0	0	0	0.323197	-1112.19	13.73036	479.4211	116.4499	
0	0	-8.44022	0.050449	-14.8438	2.143209	74.83413	18.17697	
149.2537	0	0	0	0	0	0	0	
-0.24348	0	0	0	0	0	0	0	
-34.7498	-141.409	605.6515	0	0	0	0	0	
0	0.030851	-54.1598	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	10000	0	0	10000	
0	0	0	-0.2	-6.04478	0	0	0	
0	0	0	0	0	-76.4509	-4240839	-707.055	
0	0	0	0	0	0	0	-0.0005	
0	0	0	-21.1864	0	104.6249	1.43E+08	-73.1984	
0	0	0	10	17.55697	0	3268623	-21.4995	
0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0.910336	-267.852	38.67368	1350.364	327.9991	
0	0	0	2.981809	-877.35	126.6758	4423.123	1074.363	
0	0	0	20	40.77086	0	7590410	-49.9261	
0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	-64.0234	0	0	0	
0	0	0	0	-191.974	-57.5101	-7.8E+07	0	
0	0	0	0	-17.0308	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	1.11334	38.87436	0	
0	0	0	0	0	5.975342	208.6402	0	
0	0	80.32463	0	0	0	0	0	

Columns 17 through 24

0	0	0	0	0	0	0	0	0
19.24898	-97.2801	0.646952	1.686061	18.43867	-89.2207	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
2156.539	-3629.8	72.48055	188.896	2065.756	-2726.88	0	0	0
0	0	0	371.5428	-279.149	368.4874	-1017.1	-1017.1	0
-110.31	185.6688	50.3465	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
-10000	0	0	0	-10000	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-2.56094	-2.56094	0
0	0	0	0	0	0	0	581.504	0
0	0	0	0	0	0	0	0.0005	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
-267.519	0	-10	0	0	0	0	0	0
0	-141.057	-1	0	0	0	0	0	0
2833.089	22063.06	-240.877	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-1003.42	5026.671	30485.22	0	0	0
0	0	0	-20	-276.387	0	0	0	0
0	0	0	-2	0	-103.497	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-507.678	-64.0234	0
0	0	0	0	0	0	-191.974	-459.978	0
0	0	0	0	0	0	-17.0308	-17.0308	0
0	0	0	0	0	0	0.001	0	0
0	0	0	0	0	0	1404.079	0	0
0	0	0	0	0	0	-89.1463	0	0
0	0	0	0	0	0	-8.17E-12	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-176.052	0
0	0	0	0	0	0	0	4.14E-12	0
0	-38119.9	0	0	0	-38119.9	0	0	0





$B(32 \times 2)$ 

Columns 1 through 2

0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	7972.817
0	0
0	0
0	0
32104.21	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0

 $C^T(32 \times 2)$ 

Columns 1 through 2

1	0
0	-0.01562
0	0.004585
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0

$$Q = C^T C + \text{diag}[4, 4, 4, 0, 4, 5, 5, 0, 0, 3, 3, 0, 0, 3, 0, 0, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 0, 0, 3, 0, 3, 3, 3, 3, 5]$$

$$R(2 \times 2) = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 \\ 0 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$K(2 \times 2) = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} -0.1196 & -0.4241 \\ 0.0678 & -0.4460 \end{bmatrix}$$