

## 論文

J. of The Korean Society for Aeronautical and Space Sciences 44(9), 775-780(2016)

DOI: <http://dx.doi.org/10.5139/JKSAS.2016.44.9.775>

ISSN 1225-1348(print), 2287-6871(online)

## Co-rotational 비선형 정식화 및 FETI-local 기법을 결합한 비선형 대용량/다물체 구조 해석 알고리즘 개발

조해성\*, 주현식\*, 이영현\*, 광민철\*, 신상준\*\*, 여재익\*

### Computational Algorithm for Nonlinear Large-scale/Multibody Structural Analysis Based on Co-rotational Formulation with FETI-local Method

Haeseong Cho\*, HyunShig Joo\*, Younghun Lee\*, Min-cheol Gwak\*, SangJoon Shin\*\* and Jack J. Yoh\*

Department of Mechanical and Aerospace Engineering, Seoul National University\*

Department of Mechanical and Aerospace Engineering, Institute of Advanced Aerospace  
Technology, Seoul National University\*\*

#### ABSTRACT

In this paper, a computational algorithm of an improved and versatile structural analysis applicable for large-size flexible nonlinear structures is developed. In more detail, nonlinear finite element based on the co-rotational (CR) framework is developed. Then, a finite element tearing and interconnecting method using local Lagrange multipliers (FETI-local) is combined with the nonlinear CR finite element. The resulting computational algorithm is presented and applied for nonlinear static analyses, i.e., cantilevered beam and multibody structure. Finally, the proposed analysis is evaluated with regard to its parallel computation performance, and it is compared with those obtained by serial computation using the sparse matrix linear solver, PARDISO.

#### 초 록

본 논문에서는 비선형 다물체 동역학 해석에 적용 가능한 구조해석을 개발하였다. 비선형 구조 해석을 위해 Co-rotational 이론 기반의 유한요소를 개발하였다. 그리고 국부 Lagrange 승수를 활용한 영역분할해석 기법을 적용하여 대용량/다물체 해석이 가능한 구조해석 알고리즘을 개발하였다. 기 개발한 구조 해석은 외팔보 및 다물체 구조에 대한 비선형 정적 해석 예제에 적용하였다. 병렬 계산에 따른 성능 평가는 희박행렬 계산 라이브러리인 PARDISO와 비교하였다. 이를 통해 기 개발 구조해석의 계산 속도 향상을 확인하였다.

**Key Words :** Co-rotational formulation(비선형 정식화), Finite element domain decomposition method(유한 요소 영역분할기법)

† Received : June 21, 2016      Revised : August 17, 2016      Accepted : August 24, 2016

\*\* Corresponding author, E-mail : [ssjoon@snu.ac.kr](mailto:ssjoon@snu.ac.kr)

## I. 서론

항공우주분야에서 적용되는 많은 구조물은 얇은 형상을 갖고 있어 기하학적 비선형적 거동을 나타낸다. 이를 위해 대부분의 구조 해석은 비선형 유한요소기법을 적용하고 있다. 또한 우주발사체나 항공기에서 요구되는 구조해석을 정밀하게 수행하기 위해서 대용량 구조해석의 필요성이 제시되고 있다.

최근까지 total Lagrangian, updated Lagrangian 기법[1, 2]과 같은 전통적인 비선형 정식화 기법 기반의 구조해석들이 개발되고 있다. 이러한 전통적인 정식화 기법은 응력, 변형률을 고려하는데 있어 요소의 종류, 절점의 수와 자유도에 따라 복잡한 추가적인 수학적 모델링이 요구된다. 또한 요소 자체의 가정에 따라 비선형 확장적용에 상당한 어려움이 따를 수 있다.

전통적인 비선형 확장 기법과 달리 비교적 최근, co-rotational (CR) 정식화 기법이 Rankin에 의해 정립되었다. CR 정식화 기법은 작은 변형률과 대 변위를 갖는 구조물의 기하학적 비선형 해석에 적합하다[3]. CR 정식화의 가장 큰 장점은 기존의 선형 유한요소로 독립적으로 적용가능하다는 것이다. 즉, 기존 선형요소의 절점 수와 자유도에 따라 동일한 기법을 적용할 수 있고, 기존 요소의 정의 형태를 최소한으로 수정하여 적용할 수 있다. 결과적으로는 기존 선형요소의 특징을 유지하며 기하학적 비선형 해석으로 확장 가능하다[3]. 하지만, 이러한 비선형 구조해석은 적용 대상에 따라 대용량 구조 해석이 요구될 수 있다. 이때 비선형 구조해석에 적용되는 반복해법 알고리즘에 따라 계산 비용이 급격하게 증가할 수 있다. 이러한 문제를 효율적으로 해결하기 위한 대표적인 방법이 영역분할해석 기법이다.

대규모의 유한요소 해석 알고리즘 중, 현재까지 가장 효율적이며 많이 사용되는 해석 알고리즘은 FETI(Finite Element Tearing and Interconnecting) 기법이다. FETI 기법은 Farhat [4-6]에 의해 정립된 알고리즘으로 그 풀이 방법은 다음과 같다. 정의된 유한요소 해석 전체 영역을 겹치지 않는 부영역으로 나누어 정의하고 Lagrange 승수를 적용하여 각 부영역 간 공유면에 적합조건을 부여하는 것이다. 이러한 해석 알고리즘에서, 도입된 Lagrange 승수는 부영역 사이의 구속조건을 부여하고 동시에 유연 다물체 구조해석으로의 확장성을 지니게 된다. 하지만 기존의 FETI 기법은 영역분할 알고리즘 내 반복

적인 계산이 요구되어 효율적 수렴을 위해 적절한 예조건화 기법의 선택이 요구된다.

최근 광준영에 의해 국부 Lagrange 승수와 augmented Lagrangian formulation (ALF) 기법을 도입하여 부영역간의 연속성을 보장하는 FETI-local 기법이 개발되었다[7]. FETI-local 기법에서는 반복해법이 아닌 직접해법을 도입하였고 영역분할 문제에서 해의 수렴성이 향상되었다. 그리고 기 개발 기법을 2차원/3차원 선형 정적 해석에 적용하여 대용량 해석을 수행하였고 기존의 영역분할 해석과 비교하여 병렬계산 성능을 확인하였다.

본 논문에서 앞서 제시된 CR 정식화 기반의 유한요소와 영역분할해석 기법 중, FETI-local 기법을 통합한 비선형 구조 해석 알고리즘을 제시하고자 한다. 또한 유연 다물체 동역학 문제에 확장 적용하여 기 정립 비선형 구조해석의 확장성을 제시한다.

## II. 본론

### 2.1 CR 이론 기반 유한 요소

CR 기법은 기하학적 비선형 해석을 위해 구조물의 전체 거동을 강체 거동과 순수 구조 변형으로 분리하여 고려한다. 이때 이러한 거동의 분리를 도모하기 위해 CR 좌표계를 정의하게 된다. 따라서 전체 구조 거동을 CR 좌표계 기준으로 순수 구조 변형과 강체 회전거동을 분리하여 고려한다. 이를 통해 기존의 존재하는 선형의 요소의 기하학적 비선형 해석으로 확장 가능하다. Fig. 1은 CR 기법의 좌표계를 나타낸다.

Figure 1과 같이 정립된 좌표계를 따라 먼저 강체회전 연산자,  $[R]$ , 를 정의한다. 그리고 이에 대한 회전 변환 행렬을 구성하여 전역 좌표계에서 정의된 내력벡터와 강성행렬을 도출할 수 있다. 이러한 과정은 요소의 종류에 상관없이 수행할 수 있다. 즉, 요소에 종류에 상관없이 정의할 수 있는 통합 CR 정식화를 정립할 수 있으며 자

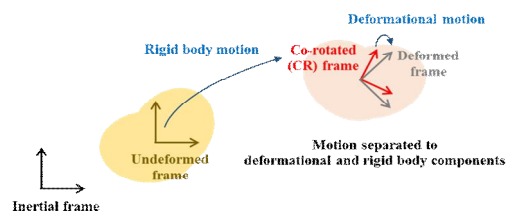


Fig. 1. Coordinate of the CR formulation

제한 수학적 전개 과정은 참고문헌[3]에 나타나 있다. 따라서 최종적인 요소의 강성행렬과 내력 벡터는 통합 정식화 기법에 의거하여 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$[K_G] = [B]^T [K_L] [B] + [K_h], \quad \{f_G\} = [B]^T \{f_L\}$$

$$\text{where, } [K_h] = \delta[\text{diag}([R])] [P]^T \{f_i\} + [\text{diag}([R])] \delta [P]^T \{f_i\} \quad (1)$$

$$[B] = [P][\text{diag}([R])]^T \quad (2)$$

식 (2)에서 행렬  $[P]$ 는 식 (3)과 같이 전역좌표계에서 정의된 변위를 국부 좌표계에 대한 미분으로 유도되며 전체 요소 거동에서 순수 변형에 대한 물리량을 추출한다. 최종적으로 행렬  $[P]$ 는 식 (4)와 같이 구성할 수 있다.

$$[P_i] = \begin{bmatrix} \frac{\delta \bar{u}_i}{\delta u_{i,g}} & \frac{\delta \bar{u}_i}{\delta \theta_{i,g}} \\ \frac{\delta \theta_i}{\delta u_{i,g}} & \frac{\delta \theta_i}{\delta \theta_{i,g}} \end{bmatrix}, \quad i = 1:9 \quad (3)$$

$$[P_i] = I_2 - \{A_i\} \{G_i\}^T \quad (4)$$

국부요소는 OPTimal Triangular(OPT) 평면 요소를 적용하였다[8]. 각 절점에 회전자유도를 포함하는 OPT 평면요소는 기존의 유한요소 정식화와 달리 자유 정식화 (free formulation) 과정을 바탕으로 하여, 요소의 세장비에 관계없이 먼 내, 굽힘 거동을 정확하게 예측 가능한 선형 요소이다. 이렇게 정립된 강성행렬과 내력벡터는 요소 절점 변위에 따른 함수로서 비선형성을 갖게 된다. 따라서 이를 해결하기 위해 Newton-Raphson 반복해법을 적용하였다.

## 2.2 영역분할해석 기법, FETI-local

FETI-local 기법은 Baucha에 의해 처음 제안되었으며 부 영역에 ALF 기법을 도입하여 부영역간 구속 조건에 페널티 계수를 적용하는 기법이다. 먼저, 유한요소 해석 전체 영역의 에너지는  $\Pi = A + \Phi + V^c$ 과 같이 나타낼 수 있다. 전체 에너지를 구성하는 각각의 항은 다음과 같이 각 부영역에서 정의되는 에너지들의 총 합으로 구해진다.

$$A = \sum_{i=1}^{N_s} A_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_s} u_i^T K_i u_i = \frac{1}{2} \underline{u}^T \text{diag}(K_\alpha) \underline{u} \quad (5)$$

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N_s} \Phi_i = - \sum_{i=1}^{N_s} u_i^T Q \quad (6)$$

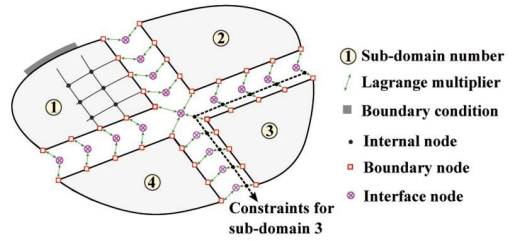


Fig. 2. Planar solid separated into four non-overlapping sub-domains by the FETI-local method

이 때,  $A$ 는 변형률 에너지,  $\Phi$ 는 외부 하중에 의해 수행된 일을 나타낸다. 부영역 간 구속조건의 퍼텐셜은 ALF 기법으로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$V^c = \sum_{i=1}^{N_s} [p_{ai} \lambda_{Li}^T C_{Li} + \frac{1}{2} C_{Li}^T C_{Li}] \quad (7)$$

이 때,  $\lambda_{Li}^T$ 은 국부 Lagrange 승수를 나타낸다. 최소 에너지 원리에 의해 결과적인 지배 방정식은 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{bmatrix} \text{diag}(\bar{K}_\alpha) & -\text{diag}(\bar{S}_\alpha^T) & \text{diag}(\bar{S}_\alpha^T) \\ -C^T \text{diag}(\bar{S}_\alpha^T) C^T & \text{diag}(p_\alpha) C - C^T \text{diag}(p_\alpha) & \\ \text{diag}(\bar{S}_\alpha^T) & -\text{diag}(p_\alpha) C & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{u} \\ \underline{c} \\ \underline{\lambda}_L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{Q} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

이 때,  $\bar{K}_i$ 는  $K_i + p_i S_i^T S_i$ 으로 표현되고,  $\bar{S}_i$ 는  $p_i S_i$ 이다. 식 (8)과 같이 정립된 FETI-local 기법의 지배방정식에서 페널티 상수,  $p_\alpha$ 가 증가하면, 이상적인 예조건화 시스템 행렬로 수렴하게 된다. 즉 국부 Lagrange 승수와 ALF 기법의 결합이 자연적 예조건화를 유도하여 직접해법의 사용을 가능하게 한다[9].

Figure 2는 FETI-local 기법에서 부영역사이의 절점 변위 자유도의 연속성을 정의하는 개념도를 나타낸다.

## 2.3 CR 요소/FETI-local 결합 알고리즘

먼저 CR 이론 기반 유한요소의 알고리즘은 반복해법으로 구성된다. 그리고 FETI-local 기법은 각각의 부 영역 그리고 그 사이의 연속성을 보장하기 위해 총 3단계의 과정을 거치게 된다. FETI-local에 적용되는 해법은 Fig. 3에 나타내었다.

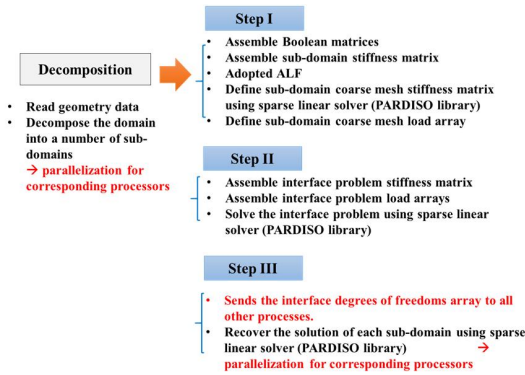


Fig. 3. Algorithm of the FETI-local method

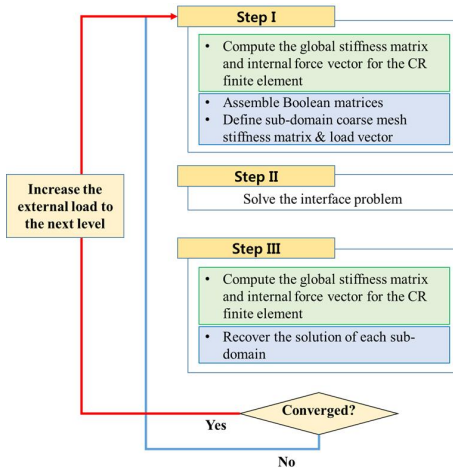


Fig. 4. Combined algorithm of the CR finite element and FETI-local method

Step I에서 각각의 부 영역에 대한 프로세서들이 할당되고 부 영역의 연결지점에 대한 강성행렬과 하중벡터를 계산한다. Step II에서 영역 간 연속성을 보장하기 위해 연결지점의 변위장 계산이 Master 프로세서에서 수행된다. Step III에서 연결지점의 변위 값이 각각의 부 영역에 전달되고 연결 지점의 변위 값에 따른 부 영역의 변위장을 계산한다. 이때, 해의 신속 계산을 위해 희박행렬 계산 알고리즘인 PARDISO를 적용하였다. 최종적인 비선형 구조해석에 FETI-local 기법의 결합 알고리즘은 Fig. 4와 같다.

2.4 수치 해석 결과

본 장에서는 앞서 개발된 비선형 병렬 알고리즘의 성능을 확인하고 나아가 비선형 유연 다물체 동역학 문제로 확장 가능성을 두 가지 예제를 통해 확인하였다.

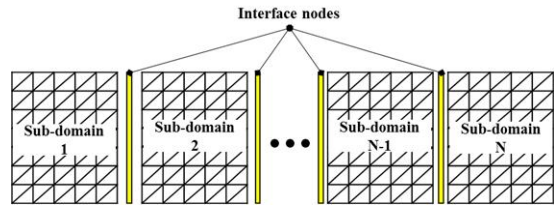


Fig. 5. Domain decomposition topology for planar structures

Table 1. Specifications of TACHYON system

프로세서	AMD Operation, 2.0GHz(Barcelona)
노드 수	188
CPU 수	3,008
메모리	DDR2/667MHz 6TB
운영체제	CentOS 4.6

이를 위해 외팔보 및 다물체 구조의 비선형 정적해석을 수행하였다. 비선형 해석을 위해 Newton-Raphson 반복해법을 적용하였고 모두 5회의 하중 증분을 적용하였다. 각각의 예제는 기하학적으로 1차원 형상이며 영역분할은 Fig. 5와 같이 수행하였다.

병렬 계산의 성능을 평가하기 위해 계산속도 향상 지수 (Scalability)를 확인하였다. 병렬 계산은 한국과학기술정보연구원(KISTI)의 TACHYON 시스템을 활용하였다.

본 논문에서 개발한 구조 해석기법의 성능은 동일한 문제에 PARDISO를 적용하여 얻어진 계산 시간과 비교하였다. PARDISO는 단일 프로세서를 사용하여 계산한 것으로 희박행렬 계산 알고리즘이 포함되어 비 병렬 계산 알고리즘 중 가장 우수한 성능을 나타내는 것으로 알려져 있다.

2.4.1 외팔보 정적 해석

첫 번째 예제로, 끝단 하중을 받는 외팔보의 해석을 수행하였다(Fig. 6). 본 예제에서 적용한 평면요소는 총 39,864 자유도를 갖도록 설정하였다. 그리고 계산에 사용되는 프로세서의 수를 증가 시켜가면서 총 계산 시간을 확인하였다. 그리고 한 개의 프로세서에서 PARDISO를 적용한 동일 자유도 문제 해석의 계산 시간과 비교하였다.

본 예제에서 수행된 해석의 계산 시간을 비교한 결과는 Fig. 7과 Table 2에 나타내었다. 계산 시, 사용된 CPU의 수는 분할 영역 수와 같다. 현 해석 기법에서 매우 작은 단위의 영역분할

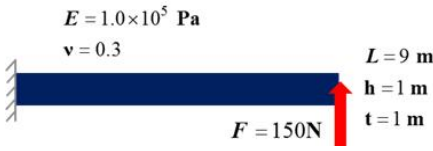


Fig. 6. Analysis condition of a cantilevered beam under static tip load

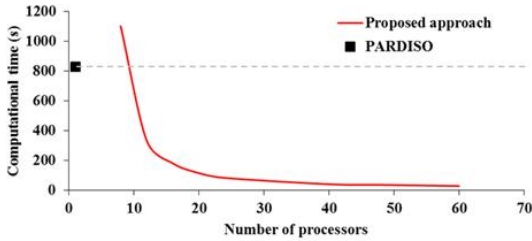


Fig. 7. Computational time and scalability of the proposed approach

Table 2. Comparison of the computational time (Ex. 1)

CPU's	Present (s)	CPU's	PARDISO (s)
8	1101.9	1	831.98
12	334.76		
16	182.68		
20	117.24		
24	84.71		
40	42.32		
48	37.81		
60	30.15		

시, PARDISO에 비해 많은 계산 시간이 소요되었다. 하지만 Fig. 7에 나타난 것과 같이 프로세서를 증가시켜 감에 따라 명확한 계산 시간 감소가 나타남을 확인하였다. 그리고 이는 PARDISO 보다 상당히 단축되는 것을 확인하였다.

2.4.2 유연 다물체 문제 적용

두 번째 검증 예제로, 세 개의 유연체가 강체로 연결된 유연 다물체 문제를 적용하였다. 본 절에서 적용한 형상은 참고문헌 [10]에서 제시된 형상을 참고하여 평면요소에 적용하였다. 유연체 간 연결 형상은 Fig. 8과 같다. 그리고 하중에 의해 변형된 형상은 Fig. 9에 나타내었다. 이때 유연체에 적용된 재료물성은 2.3.1절에 사용된 구조물과 동일하다.

본 예제에서는 총 32,400자유도를 적용하였고, 부영역의 수는 9개에서 36개로 증가시켰다. 마찬가지로 본 논문에서 제시한 병렬 계산 해법의 효

율성을 평가하기 위하여 단일 프로세서에서 PARDISO를 적용하였을 때, 소모된 계산시간과 비교하였다. 단일 프로세서를 사용한 PARDISO 해석에서 전역 Lagrange 승수를 도입하여 유연체 간 연속성을 보장하였다. 하지만 본 논문에서 제시한 기법에서 국부 Lagrange 승수가 다물체 유연체 간 연결성을 규정하면서 동시에 FETI-local 의 영역 분할의 기능을 동시에 수행하게 된다.

계산 시간을 비교한 결과는 Fig. 10와 Table 3에 나타내었다. 계산 시, 사용된 CPU의 수는 분할 영역 수와 같다. 비교 결과, PARDISO는 903.2초의 계산 시간이 소요되었고 현 해석 기법에서 프로세서를 증가 시켜감에 따라 2,081.09초에서 177.03.초로 확실한 계산 시간의 감소가 나타났다. 마찬가지로 일정 프로세서의 수가 증가하게 되면 PARDISO 보다 계산시간의 감소가 분명하게 나타남을 확인하였다. 또한 본 논문에서

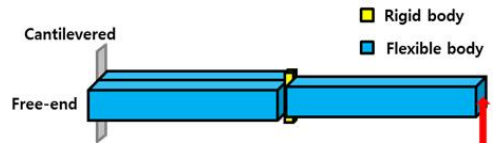


Fig. 8. Configuration of the present multi-body

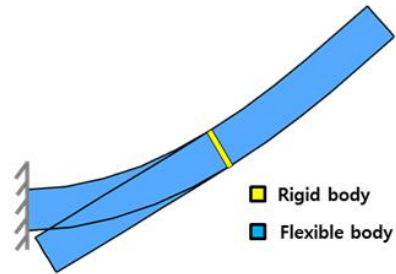


Fig. 9. Deformed configuration of the present multi-body

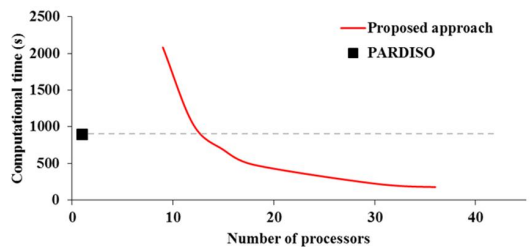


Fig. 10. Computational time and scalability of the proposed approach in nonlinear multi-body analysis

Table 3. Comparison of the computational time (Ex. 2)

CPUs	Present (s)	CPUs	PARDISO (s)
9	2081.09	1	902.2
12	1033.9		
15	685.28		
18	481.93		
30	224.76		
36	177.03		

제시한 기법이 비선형 유연 다물체 해석으로의 효율적 확장성을 보유하고 있음을 확인하였다.

### III. 결 론

본 논문에서 CR 정식화 기반의 평면 유한 요소를 개발하였다. 그리고 영역분할해석 기법 중, FETI-local 기법을 CR 유한 요소 비선형 해석 알고리즘에 통합하여 대용량 비선형 구조해석이 가능한 알고리즘을 개발하였다. 기 정립된 구조 해석은 비선형 정적 문제에 있어서 병렬 계산을 수행하였고 영역분할 수를 증가시킴에 따라 단일 프로세서를 사용한 PARDISO에 비해 우수한 계산 속도 성능을 보유한 것으로 확인하였다. 또한 유연 다물체 문제에 확장 적용하였고 병렬계산에 따른 기 정립 비선형 구조해석의 효율성을 확인하였다. 향후 플레핑 날개 또는 발사체 노즐 등 여러 항공우주 문제의 유체-구조 연계해석에 적용할 예정이다.

### 후 기

This research was supported by a grant to High-Speed Vehicle Research Center of KAIST with the support of Defense Acquisition Program Administration (DAPA) and Agency for Defense Development (ADD).

### References

- 1) Bathe, K. -J., Ramm, E. and Wilson, E. L., "Finite Element Formulations for Large Deformation Dynamic Analysis," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 9, 1975, pp. 353-386.
- 2) Na, H. J., Kim, J. H., "Vibration Analysis

of Rotating Composite Plates Using a Nonlinear Plate Theory," *Journal of The Korean Society for Aeronautical and Space Sciences*, Vol. 26, No. 5, 1998, pp. 86-99.

3) Rankin, C. C. and Nour-Omid, B., "An Element-independent Corotational Procedure for the Treatment of Large Rotations," *ASME Journal of Pressure Vessel Technology*, Vo. 108, No. 2, 1989, pp. 165-175.

4) Farhat, C., Chen, P.S., Mandel, J., Roux, F.-X., "The Two-level FETI Method. Part II: Extension to Shell Problems, Parallel Implementation and Performance Results," *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 155, 1998, pp.153~179.

5) Farhat, C., Lesoinne, M., LeTallec, P., Pierson, K., Rixen, D., "FETI-DP: a Dual-primal Unified FETI method PartI: A Faster Alternative to the Two-level FETI Method," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 50, 2001, pp.1523~1544.

6) Farhat, C., Roux, F.-X., "A Method of Finite Element Tearing and Interconnecting and Its Parallel Solution Algorithm," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 32, 1991, pp.1205~1227.

7) Kwak, J. Y., Cho, H., Chun, T. Y., Shin, S.J., and Bauchau, O. A. , "Domain Decomposition Approach Applied for Two- and Three-dimensional Problems via Direct Solution Methodology," *The International Journal of Aeronautical and Space Sciences*, Vol. 16, No. 2, 2015, pp.177-189.

8) Felippa, C. A., "A Study of Optimal Membrane Triangles with Drilling Freedoms," *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 192, 2003, pp.2125~2168.

9) Bauchau, O. A., "Parallel Computation Approaches for Flexible Multibody Dynamics Simulations," *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 347, 2010, pp.53~68.

10) Chun, T. Y., Ryu, H. Y., Cho, H. S., Shin, S. J., Kee, Y. J. and Kim, D. K., "Structural Analysis of a Bearingless Rotor using an Improved Flexible Multi-body Model," *Journal of Aircraft*, Vol. 50, No. 2, 2013, pp.539~550.