

論文

J. of The Korean Society for Aeronautical and Space Sciences 44(8), 649-656(2016)

DOI: <http://dx.doi.org/10.5139/JKSAS.2016.44.8.649>

ISSN 1225-1348(print), 2287-6871(online)

두꺼운 복합재료 회전원판의 동적 특성

구교남*

Dynamic Characteristics of Thick Rotating Composite Disks

Kyo-Nam Koo*

Department of Aerospace Engineering, University of Ulsan

ABSTRACT

Thick composite disks are utilized in the fast-rotating machines such as turbine disks, flywheels, and so on. The effects of rotating speed on the dynamic characteristics of thick composite disks are deeply studied in this paper. The dynamic governing equations of a rotating composite disk including transverse shear and rotary inertia are derived and then formulated into the finite element equation. Isotropic, circumferentially reinforced disk, and radially reinforced disk are selected for the numerical analysis. The inclusion of the transverse shear and rotary inertia into the governing equation of the rotating disks makes the natural frequency reduced as well as the critical speed. The present results show that the rotation of a thick disk may not reduce the effect of transverse shear and rotary inertia depending on anisotropy, thickness ratio and mode, unlike the results reported in other studies.

초 록

두꺼운 복합재료 회전원판은 경량화와 고속화가 요구되는 터빈 디스크, 플라이휠 등에 다양한 기계요소도 활용되고 있다. 본 연구에서는 회전속도가 두꺼운 복합재료 원판의 동적특성에 미치는 영향을 살펴보았다. 이를 위해 두꺼운 복합재료 회전원판의 동적 운동방정식을 유도하고 유한요소 정식화를 수행하였다. 등방성 원판, 원주강화 복합재료 원판, 그리고 반경강화 복합재료 원판에 대한 수치해석을 수행하였다. 횡전단변형과 회전관성의 고려는 원판이 회전할 때에도 고유진동수를 감소시킬 뿐만 아니라 임계속도를 낮추는 역할을 한다. 원판의 회전속도가 증가함에 따라 횡전단변형과 회전관성 효과가 감소한다는 이전의 연구결과와는 달리 탄성계수의 이방성, 두께비, 모드에 따라 그 효과가 감소 또는 증가할 수 있는 것으로 나타났다.

Key Words : Composite Disk(복합재료 원판), Finite Element Analysis(유한요소해석), Natural Frequency(고유진동수), Rotary Inertia(회전관성), Rotating Speed(회전속도), Transverse Shear(횡전단)

† Received : January 21, 2016 Revised : June 24, 2016 Accepted : July 4, 2016

* Corresponding author, E-mail : krkoo@mail.ulsan.ac.kr

I. 서 론

플라이휠(flywheel)은 수천 년 전부터 사용된 에너지 저장장치이며 산업혁명 시기에는 기계장치가 원활히 회전할 수 있도록 하는 기능도 하였다. 1970년대 이후 자기 베어링, 섬유강화 복합재료, 전력전자 기술의 발달로 인해 플라이휠이 에너지 저장장치에 적극적으로 활용되기 시작하였다[1].

플라이휠의 저장 에너지는 운동 에너지 형태이므로 관성 모멘트(mass moment of inertia)에 비례하고 회전속도의 제곱에 비례한다. 따라서 관성 모멘트보다는 회전속도를 증가시키는 것이 에너지 밀도를 높이기 위해 효율적이다. 그러나 고속회전은 원심력에 의한 응력을 증가시켜 회전속도에 제한을 가져오게 된다. 이런 이유로 비강성 및 비강도가 높은 탄소섬유강화 복합재료(carbon fiber-reinforced plastic: CFRP)가 플라이휠에 적합한 재료로 사용되어 많은 연구가 진행되어 왔다. Table 1에 제시된 것과 같이 복합재료 플라이휠은 다른 저장장치에 비해 에너지 밀도가 월등히 큰 특성을 갖는다[2]. 또한 화학 배터리에 비해 수명이 긴 장점도 가지고 있다.

Roes[3]가 1961년 우주공간에서 에너지 저장장치로서 플라이휠의 개념을 제시한 이후로 위성 또는 우주정거장에 이용하려는 연구가 지속되어 왔다[4]. 인공위성의 자세제어 시스템(attitude control system)으로 반작용 휠 작동기(reaction wheel actuator)이나 제어 모멘트 자이로(control moment gyro)를 사용하는데 이 장치들은 플라이휠을 내장하고 있다. 에너지 저장 장치와 자세제어 시스템이 모두 플라이휠을 사용한다는 점에서 1970년 이후에 두 개념을 통합한 장치 개발이 시작되었다. IPACS(integrated power and attitude control systems)[5]가 대표적인 초기의 통합장치이며 ESACS(energy storage and

attitude control systems)로 발전하게 된다.

복합재료 플라이휠은 다양한 형상을 가질 수 있으며 두꺼운 원판도 그중 하나이다. 고밀도의 에너지를 저장하기 위해서는 회전속도를 높여야 하는데 이로 인해 발생하는 응력과 동적 불안정성이 최고속도를 제한한다. 고속회전에 의해 피할 수 없는 진동은 기기의 성능을 저하시킬 뿐만 아니라 파손의 위험을 야기할 수 있다. 이와 같은 이유로 복합재료 회전판에 대한 응력해석 및 설계에 대한 다양한 연구가 진행되어 왔다.

두꺼운 판의 동적 해석에는 횡전단변형(transverse shear deformation : SD)과 회전관성(rotary inertia : RI)를 고려해야 되며 이를 무시할 경우에 고유진동수는 크게 평가된다. 두꺼운 회전원판의 진동에 대한 연구는 극히 제한적으로 이루어 졌는데, 회전속도가 증가함에 따라 두께 효과(티모셴코 효과)가 고유진동수에 미치는 영향에 대한 연구는 매우 드문 실정이다. 등방성 보에 대한 연구들에서는 회전에 의한 강성화(stiffening) 효과로 회전이 증가할수록 티모셴코 효과가 줄어든다는 사실만을 제시하고 있다[6-8]. Yokohama[6]는 유한요소법을 이용하여 회전하는 티모셴코 보의 고유진동수를 계산한 결과, 회전에 의해 횡전단변형 효과는 모든 모드에서 줄어들고 회전관성 효과는 2차 이상의 모드에서 증가한다고 하였으며 이를 종합한 티모셴코 효과는 결과적으로 줄어든다는 결과를 제시하였다.

두꺼운 회전원판의 진동해석을 다룬 연구는 그리 많지 않다. Sinha[9]는 등방성 원판의 회전에 의한 강성 증가가 횡전단변형에 의한 강성 감소보다 우세하다고 제시하였으나 각 매개변수와 회전속도에 대한 티모셴코 효과를 정량적으로 비교 제시하지는 않았다. Cote[10]는 등방성 원판의 회전이 티모셴코 효과에는 별다른 영향을 미치지 않는다는 결론을 내렸다. Kim과 Koo[11]는 NASTRAN을 이용하여 극직교 이방성 민들린(Mindlin) 원판과 고전원판(Kirchhoff)의 고유진동수 오차가 회전속도에 따라 변화하는 양상을 살펴보았다. 원판의 경우에는 특정 모드에서 회전속도가 증가함에 따라 그 오차가 감소하다가 다시 증가하는 특별한 현상이 나타난다고 보고하였다. 그러나 상용 패키지를 사용하였으므로 정량적인 분석에는 한계가 있었다. Koo[12]는 보다 정확한 규명을 위해 일정한 축하중이 작용하는 두꺼운 단순지지보에 대한 해석 해를 구하였다. 인장력이 증가함에 따라 횡전단변형 효과는 감소

Table 1. Energy storage types[2]

Storage type		Specific energy (Wh/kg)
Magnetic fields	Superconducting coil	1 - 2
Elastic deformations	Steel spring	0.09
	Natural rubber band	8.8
Electrochemical reaction	Lead - acid battery	17.9
	Nickel - cadmium battery	30.6
Kinetic energy	Managing steel flywheel	55.5
	4340 steel flywheel	33.3
	Composite flywheel	213.8

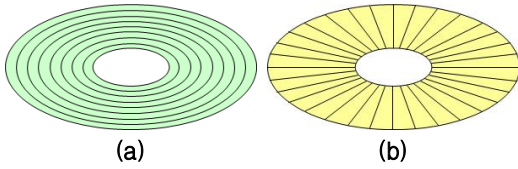


Fig. 1. (a)Circumferentially-reinforced(CR) composite disk and (b)Radially-reinforced (RR) composite disk

하나 회전관성 효과는 무관한 것으로 나타났으며 두 효과가 함께 고려되는 경우 두께 효과가 증가 되는 모우드도 있음을 보여주었다. 회전하는 두꺼운 외팔보에 대한 유한요소해석을 통해 회전수가 증가함에 따라 횡전단변형 효과가 증가하는 경우도 있다고 보고하였다.

앞서 기술한 바와 같이 본 연구의 저자는 회전속도 증가가 횡전단변형 효과에 미치는 영향을 두꺼운 보 문제에 대해 해석적인 해와 유한요소해를 통해 연구한 바 있다. 본 연구에서는 플라이월, 터빈 디스크 등 다양한 분야에 적용되는 두꺼운 원판의 티모셴코 효과가 회전속도가 증가함에 따라 변화하는 경향을 살펴본다. 이를 위해 두꺼운 복합재료 회전원판의 동적 운동방정식을 유도하고 유한요소 정식화를 수행하였다. 등방성 원판, 원주강화(circumferentially reinforced: CR) 복합재료 원판, 그리고 반경강화(radially reinforced : RR) 복합재료 원판에 대해 회전속도에 따른 고유진동수를 계산하여 횡전단변형과 회전관성 효과를 분석하였다. CR 원판과 RR 원판의 섬유배열은 Fig. 1과 같다.

II. 본 론

2.1 복합적층 원판의 운동방정식

2.1.1 지배방정식

Figure 2와 같이 정의된 회전 좌표계에 대한 원판의 변위는 다음과 같이 표현된다.

$$u_r = u_r^0 + z\beta_r, \quad u_\theta = u_\theta^0 + z\beta_\theta, \quad u_z = w \quad (1)$$

여기서 w 는 횡방향 변위, β_r 와 $-\beta_\theta$ 는 각각 θ 축과 r 축에 대한 회전각이다.

회전속도가 Ω 인 원판에는 평면하중 \bar{N}_r 과 \bar{N}_θ 가 작용하며, 대칭적층 원판의 운동방정식은 해밀턴(Hamilton)의 원리를 이용하여 다음과 같이 유도된다.

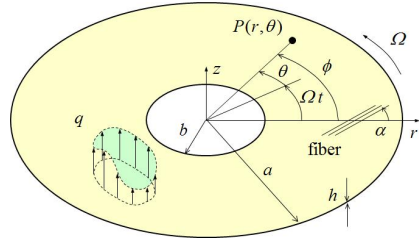


Fig. 2. Coordinates and geometry of rotating disk

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[rD_{11} \frac{\partial \beta_r}{\partial r} + D_{12} \left(\beta_r + \frac{\partial \beta_\theta}{\partial \theta} \right) \right] - D_{12} \frac{\partial \beta_r}{\partial r} \quad (2.a)$$

$$- D_{22} \left(\frac{\beta_r}{r} + \frac{\partial \beta_\theta}{r \partial \theta} \right) + D_{66} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{\beta_\theta}{r} + \frac{\partial \beta_\theta}{\partial r} + \frac{\partial \beta_r}{r \partial \theta} \right)$$

$$- rA_{45} \left(\beta_\theta + \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) - rA_{55} \left(\beta_r + \frac{\partial w}{\partial r} \right) = rI_2 \frac{\partial^2 \beta_r}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[D_{12} \frac{\partial \beta_r}{\partial r} + D_{22} \left(\frac{\beta_r}{r} + \frac{\partial \beta_\theta}{r \partial \theta} \right) \right] + D_{66} \left(-\frac{\beta_\theta}{r} \right) \quad (2.b)$$

$$+ \frac{\partial \beta_\theta}{\partial r} + \frac{\partial \beta_r}{r \partial \theta} \right) + D_{66} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\beta_\theta + r \frac{\partial \beta_\theta}{\partial r} + \frac{\partial \beta_r}{\partial \theta} \right)$$

$$- rA_{44} \left(\beta_\theta + \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) - rA_{45} \left(\beta_r + \frac{\partial w}{\partial r} \right) = rI_2 \frac{\partial^2 \beta_\theta}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[A_{44} \left(\beta_\theta + \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) + A_{45} \left(\beta_r + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] \quad (2.c)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial r} \left[rA_{45} \left(\beta_\theta + \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) + rA_{55} \left(\beta_r + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial r} \left(r \bar{N}_r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{N}_\theta \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) = rI_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

여기서 D_{ij} 는 적층판의 굽힘강성이며, 횡전단 응력이 포물선 분포를 갖는다고 가정하면 횡전단 강성 A_{ij} 는 다음과 같이 계산된다.

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (3.a)$$

$$A_{ij} = \frac{5}{4} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k [(z_k - z_{k-1}) - \frac{4}{3h^2} (z_k^3 - z_{k-1}^3)] \quad (3.b)$$

식 (3)에서 \bar{Q}_{ij}^k 는 단층의 변환 강성행렬로 적층각 α 에 따라 값이 변하게 된다. Fig. 1과 같이 CR 원판은 적층각이 90 도이고 CR 원판은 적층각이 0 도가 된다.

원판의 두께와 밀도가 각각 h 와 ρ 일 때 질량 I_0 와 회전관성 I_2 는 다음과 같다.

$$(I_0, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho (1, z^2) dz \quad (4)$$

원판이 회전할 때 발생하는 평면하중 \bar{N}_r 과

\bar{N}_θ 는 다음 식으로부터 구한다.

$$-\frac{\partial(r\bar{N}_r)}{\partial r} - \frac{\partial\bar{N}_{r\theta}}{\partial\theta} + \bar{N}_\theta = \rho hr^2\Omega^2 \quad (5)$$

여기서 회전속도가 일정하다고 가정하면 $\bar{N}_{r\theta}$ 는 무시될 수 있다.

2.2 유한요소 정식화

식 (2)의 유한요소 방정식은 갤러킨 방법을 적용해 얻을 수 있으며 유한요소 해는 4절점 요소를 사용한 라그랑지 다항식 N_i 를 이용한다.

$$\begin{aligned} w(r,\theta) &= \sum_{i=1}^4 N_i(r,\theta) w_i = \mathbf{N}^T \mathbf{w} \\ \beta_r(r,\theta) &= \sum_{i=1}^4 N_i(r,\theta) \beta_{ri} = \mathbf{N}^T \beta_r \\ \beta_\theta(r,\theta) &= \sum_{i=1}^4 N_i(r,\theta) \beta_{\theta i} = \mathbf{N}^T \beta_\theta \end{aligned} \quad (6)$$

따라서 회전하는 복합재료 원판의 운동방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{w}} \\ \ddot{\beta}_r \\ \ddot{\beta}_\theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega^2 \mathbf{K}_{11}^\Omega & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{13} \\ + \mathbf{K}_{11} & & \\ \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} \\ \mathbf{K}_{13} & \mathbf{K}_{23} & \mathbf{K}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w} \\ \beta_r \\ \beta_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

여기서 질량행렬 \mathbf{M} 과 강성행렬 \mathbf{K} 의 각 성분은 다음과 같이 표현된다.

$$M_{11}^{ij} = I_0 \iint N_i N_j r dr d\theta \quad (8.a)$$

$$M_{22}^{ij} = M_{33}^{ij} = I_2 \iint N_i N_j r dr d\theta \quad (8.b)$$

$$K_{11}^{ij} = \iint \left[A_{44} \frac{\partial N_i}{r \partial \theta} \frac{\partial N_j}{\partial \theta} + A_{45} \left(\frac{\partial N_i}{\partial \theta} \frac{\partial N_j}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial \theta} \right) + A_{55} r \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} \right] dr d\theta \quad (9.a)$$

$$K_{12}^{ij} = \iint \left[A_{45} \frac{\partial N_i}{\partial \theta} N_j + A_{55} r \frac{\partial N_i}{\partial r} N_j \right] dr d\theta \quad (9.b)$$

$$K_{13}^{ij} = \iint \left[A_{44} \frac{\partial N_i}{\partial \theta} N_j + A_{45} r \frac{\partial N_i}{\partial r} N_j \right] dr d\theta \quad (9.c)$$

$$K_{22}^{ij} = \iint \left[D_{11} r \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} + D_{12} \left(\frac{\partial N_i}{\partial r} N_j + N_i \frac{\partial N_j}{\partial r} \right) + D_{22} \frac{N_i N_j}{r} + D_{66} \frac{\partial N_i}{r \partial \theta} \frac{\partial N_j}{\partial \theta} + A_{55} r N_i N_j \right] dr d\theta \quad (9.d)$$

$$K_{23}^{ij} = \iint \left[D_{12} \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial \theta} + D_{22} N_i \frac{\partial N_j}{r \partial \theta} + D_{66} \left(\frac{\partial N_i}{\partial \theta} \frac{\partial N_j}{\partial r} - \frac{\partial N_i}{r \partial \theta} N_j \right) + A_{45} r N_i N_j \right] dr d\theta \quad (9.e)$$

$$K_{33}^{ij} = \iint \left[D_{22} \frac{\partial N_i}{r \partial \theta} \frac{\partial N_j}{\partial \theta} + D_{66} \left(\frac{N_i N_j}{r} - \frac{\partial N_i}{\partial r} N_j - N_i \frac{\partial N_j}{\partial r} + r \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} \right) + A_{44} r N_i N_j \right] dr d\theta \quad (9.f)$$

$$K_{11}^{\Omega ij} = \iint \left(r \bar{N}_r \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} + \bar{N}_\theta \frac{\partial N_i}{r \partial \theta} \frac{\partial N_j}{\partial \theta} \right) dr d\theta \quad (9.g)$$

조화진동을 가정하면 식 (7)은 다음과 같이 고유치 방정식이 되며, 고유진동수 ω 는 회전수 Ω (rad/s)를 변화시켜가며 계산하게 된다.

$$(\mathbf{K} + \Omega^2 \mathbf{K}^\Omega - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (10)$$

식 (10)의 고유치 ω 는 운동좌표계 (r,θ) 에 대한 고유진동수이며 관성좌표계 (r,ϕ) 에 대한 고유치 λ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\lambda_{mn} = \omega_{mn} \pm n\Omega \quad (11)$$

여기서 $\omega_{mn} + n\Omega$ 와 $\omega_{mn} - n\Omega$ 는 각각 전진파와 후진파의 진동수이며 m 과 n 은 각각 절원(nodal circle)과 절선(nodal diameter)의 개수를 나타낸다. 후진파의 진동수가 원판의 회전수와 같아질 때 즉 $\omega_{mn} = n\Omega$ 일 때 회전속도는 임계속도 Ω_{cr} 로 정의된다.

2.3 해석결과 및 토론

2.3.1 결과 검증

앞에서 유도된 유한요소 모델링의 타당성을 검증하기 위해 등방성 원판과 복합재료 원판의 무차원 고유진동수를 비교하였다. 본 연구의 해석 전 과정에 사용된 유한요소의 개수는 15×72

Table 2. Nondimensional angular natural frequency $\bar{\omega}$ of stationary isotropic disk: $\nu = 0.3$, $a/h = 5$, $b/a = 0.3$, $\bar{\Omega} = 0$.

Mode (m,n)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
Côté [10]	6.18	5.91	30.81	32.43
Sinha [9]	6.31	5.97	28.93	29.08
NASTRAN	6.20	5.87	31.64	33.20
Present	6.15	5.81	30.07	31.49

Table 3. Nondimensional angular natural frequency $\bar{\omega}$ of rotating isotropic disk: $\nu = 0.3$, $b/a = 0.25$, $\bar{\Omega} = 2$.

Mode (m,n)		(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
$a/h = 10$	Sinha [9]	8.11	8.51	37.89	40.02
	NASTRAN	8.07	8.47	37.17	39.11
	Present	8.10	8.49	36.94	38.79
$a/h = 5$	Sinha [9]	7.87	8.26	28.72	30.46
	NASTRAN	7.63	8.01	31.50	33.35
	Present	7.75	8.08	30.62	32.31

Table 4. Material properties

Properties	PC (polycarbonate)	CFRP (T300/N5208)
E_1	2.2 GPa	181.0 GPa
E_2	2.2 GPa	10.3 GPa
G_{12}	0.797 GPa	7.17 GPa
ν_{12}	0.38	0.28
ρ	1220 kg/m ³	1600 kg/m ³

Table 5. Nondimensional natural frequency

\bar{f} of composite disk: $a/h = 10$,
 $b/a = 0.25$.

Mode (m, n)		(0,0)	(0,1)	(0,2)	
RR disk	$\bar{\Omega} = 0$	NASTRAN	0.755	0.754	0.795
		Present	0.755	0.754	0.792
	$\bar{\Omega} = 4$	NASTRAN	1.073	1.079	1.098
		Present	1.075	1.080	1.126
CR disk	$\bar{\Omega} = 0$	NASTRAN	0.623	0.394	0.556
		Present	0.624	0.394	0.557
	$\bar{\Omega} = 4$	NASTRAN	0.677	0.759	1.306
		Present	0.682	0.759	1.301

(반경×원주)이다. Table 2에는 내경 대 외경비 $b/a=0.3$, 외경 대 두께비 $a/h=5$, 포아송 비 $\nu=0.3$ 인 등방성 원판이 회전하지 않을 때의 고유진동수를 제시하였다. Table 3에는 등방성 원판이 회전할 때의 고유진동수를 비교하였다. NASTRAN 해석에는 CQUAD4 요소가 15×120개 사용되었다. 회전에 의한 하중은 RFORCE 필드를 이용하고 SOL 106에 의한 해석을 수행하였다. Table 2과 Table 3에서 무차원 각 고유진동수와 각 회전속도는 각각 다음과 같다.

$$\bar{\omega} = \omega \sqrt{\rho a^4 h / D}, \quad \bar{\Omega} = \Omega \sqrt{\rho h a^4 / 8D} \text{ (rad)} \quad (12)$$

복합재료 원판의 고유진동수는 Table 4의 CFRP의 물성치를 사용하여 Table 5에 제시하였다. 무차원 고유진동수와 무차원 회전속도는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\bar{f} = f \sqrt{\rho a^4 / E_2 h^2}, \quad \bar{\Omega} = \Omega \sqrt{\rho a^4 / E_2 h^2} \text{ (rad)} \quad (13)$$

Table 2, Table 3, Table 5를 살펴보면 본 연구의 해석 결과가 다른 연구들의 결과와 잘 일치하고 있음을 확인할 수 있다.

2.3.2 두꺼운 회전원판의 동특성

회전속도에 따른 원판의 고유진동수의 변화를 살펴보기 위해 Table 4에 제시된 바와 같이 원판 재료로 폴리카보네이트(polycarbonate: PC)와 CFRP를 선정하였다. 계산에 사용된 내경 대 외경비는 $b/a=0.25$ 이고 외경 대 두께비는

$a/h = 10$ 이다.

회전단변형과 회전관성을 고려한 원판의 회전 속도에 따른 고유진동수를 Fig. 3 ~ Fig. 5에 도시하였다. 무차원 고유진동수와 회전속도는 각각 식 (13)에 제시된 값이다.

그림에서 $(m,n)f$ 와 $(m,n)b$ 는 전진파의 후진파의 고유 모우드를 나타내고 후진파의 고유진동수를 영으로 만드는 가장 작은 회전속도가 임계

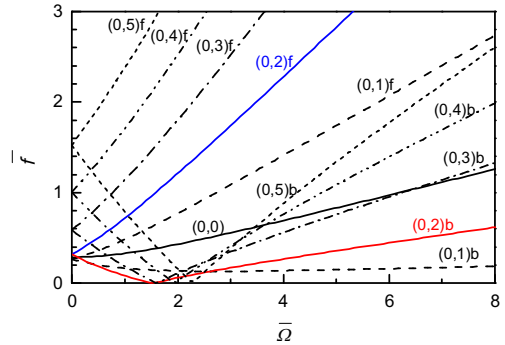


Fig. 3. Frequency-speed diagram of PC disk : $b/a = 0.25$, $a/h = 10$

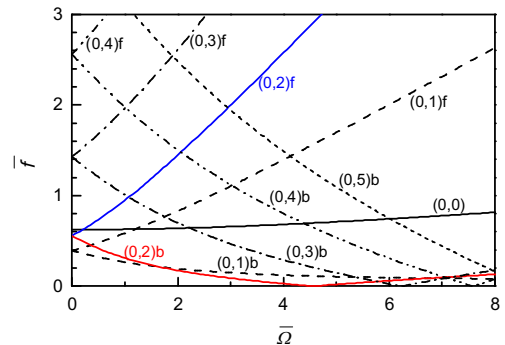


Fig. 4. Frequency-speed diagram of CR disk : $b/a = 0.25$, $a/h = 10$

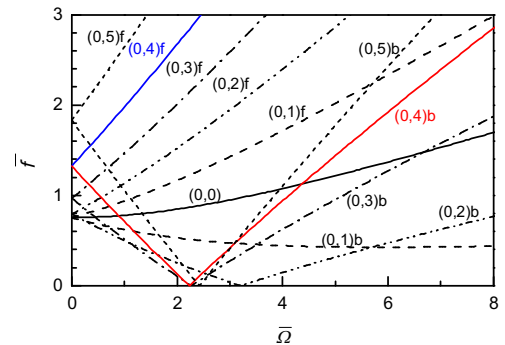


Fig. 5. Frequency-speed diagram of RR disk : $b/a = 0.25$, $a/h = 10$

속도 $\bar{\Omega}_{cr}$ 가 된다. Fig. 3에는 폴리카보네이트(PC) 회전원판의 고유진동수를 제시하였는데 (0,2) 모우드가 임계 모우드로 나타나고 있다. Fig. 4와 Fig. 5에는 각각 원주강화 회전원판(CR disk)과 반경강화 회전원판(RR disk)의 고유진동수를 제시하였다. CR 회전원판의 임계 모우드는 등방성 원판과 마찬가지로 (0,2) 모우드이지만 RR 회전원판의 임계 모우드는 (0,4) 모우드로 나타나고 있다. 고전 판이론(CPT), 횡전단변형 판이론(SD), 횡전단변형과 회전관성을 모두를 고려한 판이론(SD+RI)을 각각 적용하여 계산한 임계속도를 Table 6에 정리하였다. CPT 결과는 참고문헌 [13]에서 제시된 유한요소법을 이용하여 계산하였다. CPT에 횡전단변형(SD)을 고려하면 임계속도가 작아지고, 그리고 여기에 추가적으로 회전관성(RI)까지 고려하면 임계속도가 더욱 작아지는 경향을 확인할 수 있다.

Figure 6과 Fig. 7은 각각 $a/h = 10$ 인 CR 원판과 RR 원판의 가장 낮은 모우드 6개의 모우드 형상과 고유진동수를 보여준다. RR 원판의 최저 모우드들은 절경 모우드들로만 구성되어 있지만 CR 원판의 경우는 다섯 번째에 절원 모우드인 (1,0) 모우드가 나타나고 있다.

Table 6. Normalized critical speed $\bar{\Omega}_{cr}$ (rad) of various disks.

Theory	PC	CR	RR
CPT	1.63095	4.93925	2.36570
SD	1.54797	4.76955	2.25544
SD+RI	1.53034	4.56614	2.22817
Critical mode	(0,2)	(0,2)	(0,4)

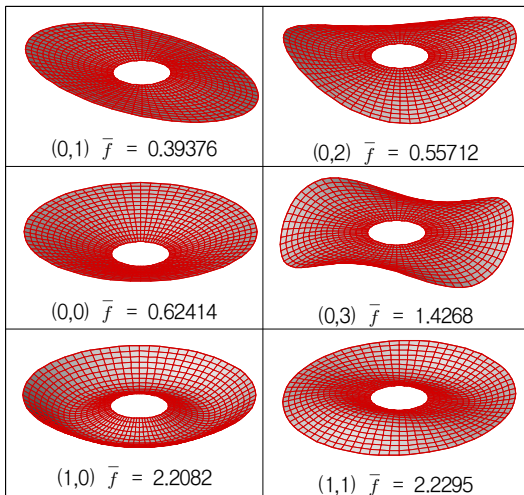


Fig. 6. Mode shape and natural frequency of CR disk

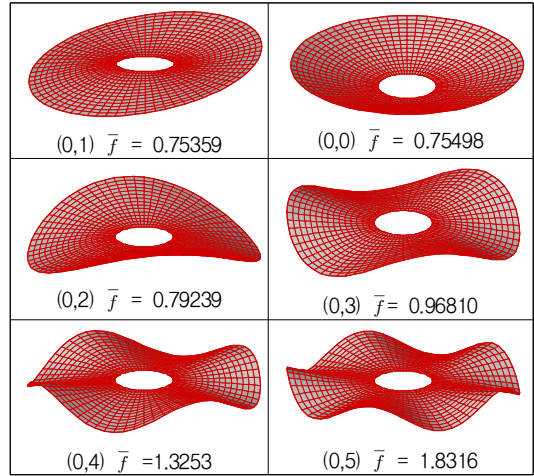


Fig. 7. Mode shape and natural frequency of RR disk

2.3.3 회전속도와 티모셴코 효과

복합재료 원판의 회전수와 티모셴코 효과의 관계를 알아보기 위해 회전수에 따른 원판의 고유진동수를 등방성재료와 복합재료 원판에 대해 내경 대 외경비, 외경 대 두께비, 진동 모우드별로 계산하였다.

횡전단변형과 회전관성 효과는 다음과 같이 고유진동수의 오차를 기준으로 평가된다.

$$E = \frac{f_{CPT} - f}{f_{CPT}} \times 100 (\%) \tag{14}$$

여기서 f_{CPT} 는 고전 판이론에 의한 고유진동수이다.

Figure 8은 PC 원판의 회전속도에 따른 티모셴코 효과를 보여준다. 상대적으로 두꺼운 원판인 $a/h = 10$ 인 원판은 (0,0) 모우드에서는 회전속도가 증가함에 따라 티모셴코 효과가 감소하다가 증가하고 있다. 반면에 $a/h = 20$ 인 원판의 경우는 (0,0) 모우드는 티모셴코 효과가 감소 없이 바로 증가하고, (0,1) 모우드는 티모셴코 효과가 감소 후 증가하고 있다. 1차원 보 문제와는 달리 횡전단변형만 고려한 경우와 회전관성까지 고려한 경우의 경향성의 차이는 없는 것으로 나타나고 있다.

원주강화 복합재료 원판의 회전속도와 티모셴코 효과가 Fig. 9에 제시되어 있으며 (0,0), (0,1), (0,2) 모우드에 대해 모두 회전속도가 증가함에 따라 티모셴코 효과가 줄어들고 있음을 확인할 수 있다. 특히 (0,0) 모우드의 경우는 회전속도가 티모셴코 효과에 영향을 거의 미치지 않고 있음

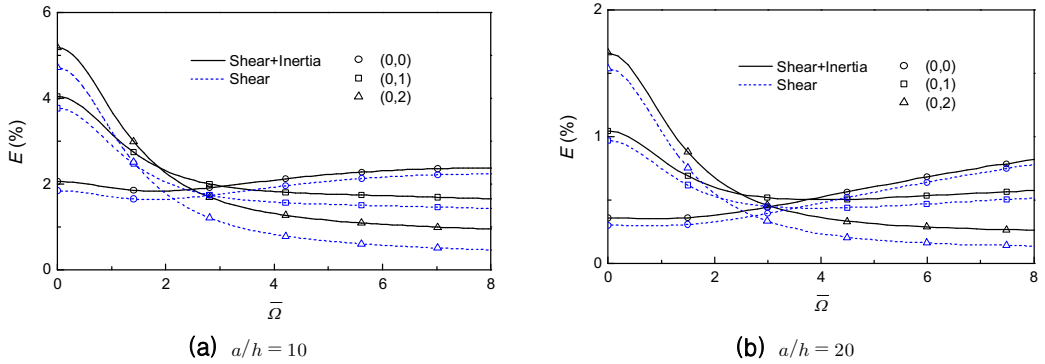


Fig. 8. Variation of Timoshenko effect of PC disk with rotating speed

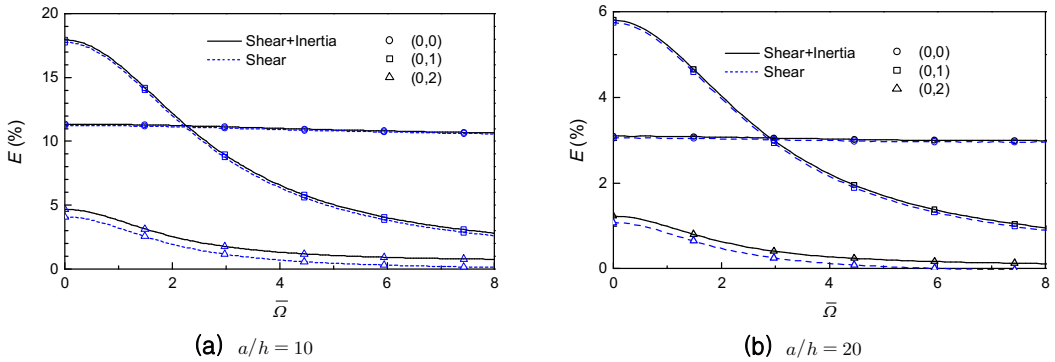


Fig. 9. Variation of Timoshenko effect of CR disk with rotating speed

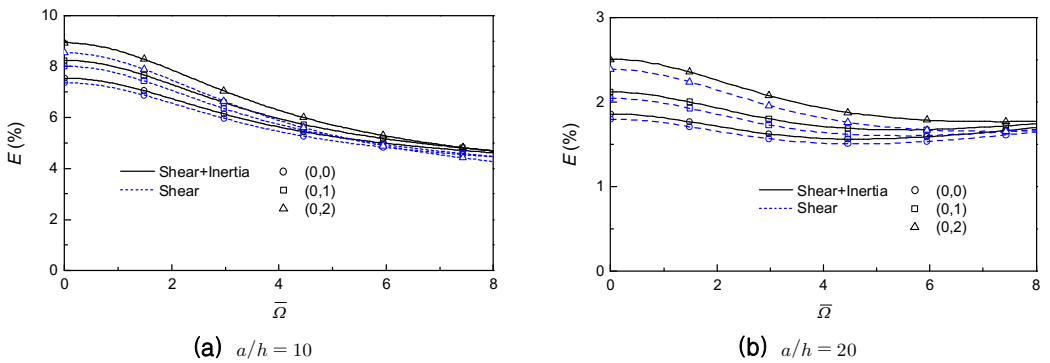


Fig. 10. Variation of Timoshenko effect of RR disk with rotating speed

을 알 수 있다.

마지막으로 Fig. 10에 반경강화 복합재료원판의 티모셴코 효과가 제시되었다. $a/h = 10$ 인 원판의 경우 모든 모우드의 티모셴코 효과가 회전속도 증가에 따라 감소하고 있으나 $a/h = 20$ 인 원판의 경우 모든 모우드의 티모셴코 효과는 회전속도가 증가함에 따라 감소하다 증가하는 특성을 보이고 있다. 앞서 세 종류의 회전원판에 대해 살펴본 바와 같이 (0,0) 모우드가 회전속도에 따른 티모

셴코 효과가 줄어드는 경향이 작거나 오히려 증가하는 경향이 두드러지게 나타나고 있다.

III. 결 론

본 연구에서는 회전속도가 증가함에 따라 횡전 단변형과 회전관성 효과가 두꺼운 복합재료 원판의 동적특성에 미치는 영향을 살펴보았다. 이를 위해 두꺼운 복합재료 회전원판의 동적 운동방정

식을 유도하였으며 이에 대한 해석적인 해가 존재하지 않으므로 유한요소 정식화를 수행하여 회전속도에 따른 고유진동수를 구하였다. 본 연구에서 유도된 지배방정식과 유한요소식은 회전좌표계에 대한 식이며, 추후 연구에서는 이를 더욱 확장해 관성좌표계에 대한 운동방정식의 해를 구해 임계속도를 비교할 예정이다.

기존의 연구들에 의해 알려진 바와 같이 두꺼운 회전원판의 동적해석에서 횡전단변형과 회전관성을 고려하면 고유진동수는 낮아지는 것으로 나타났다. 이로 인해 횡전단변형과 회전관성은 회전원판의 임계속도를 낮추는 역할을 하지만 임계 모우드는 적층각에 따라 다르게 나타났다. 그러나 원판의 회전속도가 증가함에 따라 티모셴코 효과가 줄어든다는 기존 연구의 설명과는 달리 탄성계수의 이방성, 외경 대 두께비, 모우드에 따라 그 효과 다르게 나타났다. 특히 회전속도에 의한 티모셴코 효과의 감소가 (0,0) 모우드에서 가장 크게 나타났다. 회전하는 두꺼운 보에서 확인한 현상과 마찬가지로, 원심력에 의한 면내강성 증가에 의해 회전원판의 티모셴코 효과는 반드시 감소하는 것이 아니라 증가할 수도 있다는 결론을 내릴 수 있다.

References

- 1) Bolund, B., Bernhoff, H., and Leijon, M., "Flywheel Energy and Power Storage Systems," *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, Vol. 11, 2007, pp 235-58.
- 2) Kaftanoglu, B., Soylyr, R., and Oral, S. "Mechanical Energy Storage Using Flywheels and Design Optimization," *Energy Storage Systems*, Kluwer AP, Dordrecht, 1989.
- 3) Roes, J. B., "An Electro-Mechanical Energy Storage System for Space Application," *Energy Conversion for Space Power*, Vol. 3, *Progress in Astronautics and Rocketry*, Academic Press, New York, 1961.
- 4) Lappas, V., Richie, D., Hall, C., Fausz, J., and Wilson, B., "Survey of Technology Developments in Flywheel Attitude Control and Energy Storage Systems," *Journal of Guidance, Control, And Dynamics*, Vol. 32, No. 2, 2009.
- 5) Notti, J. E., Cormack, A., and Schmill, W. C., "Integrated Power/Attitude Control System (IPACS) Study, Vols. 1 & 2," *Rockwell International Space Division NASA-CR-2383*, Downey CA, 1974.
- 6) Yokohama, T., "Free Vibration Characteristics of Rotating Timoshenko Beams," *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 30, No. 10, 1988, pp. 743-755.
- 7) Banerjee, J. R., "Dynamic Stiffness Formulation and Free Vibration Analysis of Centrifugally Stiffened Timoshenko Beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 247, No. 1, 2001, pp. 97-115.
- 8) Kaya, M. O., "Free Vibration Analysis of a Rotating Timoshenko Beam by Differential Transform Method," *Aircraft Engineering and Aerospace Technology: An International Journal*, Vol. 78, No. 3, 2006, pp. 194-203.
- 9) Sinha, S. K., "Determination of Natural Frequencies of a Thick Spinning Annular Disk Using a Numerical Rayleigh-Ritz's Trial Function," *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 81, No. 2, 1987, pp. 357-369.
- 10) Cote, A., Atalla, N., and Nicolas, J., "Effects of Shear Deformation and Rotary Inertia on the Free Vibration of a Rotating Annular Plate," *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 119, 1997, pp. 641-643.
- 11) Kim, D. H. and Koo, K. N., "Effects of Transverse Shear Deformation and Rotary Inertia on Vibration of Rotating Polar Orthotropic Disks," *Journal of the Korean Society for Composite Materials*, Vol. 20, No. 3, 2007, pp. 43-49.
- 12) Koo, K. N., "Effects of Shear Deformation and Rotary Inertia on the Natural Frequencies of Axially Loaded Beams," *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 28, No. 3, 2014, pp. 849-857.
- 13) Koo, K. N. and Lesieutre, G. A., "Vibration and Critical Speeds of Composite-ring Disks for Data Storage," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 329, No. 7, 2010, pp. 833-847.