

위상 최적 설계 – 프로젝션 기법과 적층 가공

Topology Optimization - Projection Method and Additive Manufacturing

1. 머리말

1980년대 말 Bendsoe와 Kikuchi로부터 위상 최적 설계의 개념이 도입된 이래로 30년 가까이 다양한 분야에서 많은 연구가 진행되어 왔다. 이제는 유한요소법과 마찬가지로 굳이 설명하지 않더라도 많은 연구자들이 알고 있는 방법이 되어 버린 위상 최적 설계 기법은, 간단히 말해서 주어진 설계 영역 내부에 최적의 재료 배치를 결정하는 수치적 기법이다. 지금까지 다양한 연구가 진행되어 오면서 최적 설계 과정 중에서 발생할 수 있는 여러 수치적 문제점들을 해결하거나 완화시킬 수 있는 방법들에 대한 연구가 진행되어 왔는데, 대표적으로 중간 밀도 (intermediate density), 체커보드 패턴 (checkerboard pattern), 힌지 연결 (hinge connection) 등과 같은 문제점 들이 있었다. 하지만 여러 선행 연구를 통해서 위의 문제점들은 많이 해결되고 있는 상황이다.

반면에 이번 지면을 통해서 소개하고자 하는 내용은 위의 수치적 문제점에 비해서 조금은 덜 주목을 받았던 제조가능성 (manufacturability)에 대한 내용을 다루고 있다. 앞서 언급한 바와 같이 위상 최적 설계를 통해서 설계 영역 내부에 최적의 재료 배치라는 결과를 얻을 수 있지만, 이를 바탕으로 실제 부품 등으로 제조하기 위해서는 일반적으로 후처리 과정이 필요하기 때문이다.

이러한 측면에서 Guest 등에 의해서 개발된 프로젝션 기법 (projection method)은 위의 후처리 과정을 없애거나 최소화시킬 수 있는 수치 기법으로써, 최소 길이 스케일을 제어함으로써 위상 최적 설계 결과물의 제조가능성을 선반영한 최적 설계를 제시하는 방법이다. 본 기사에서는 먼저 가장 기초적인 형태의 프로젝션 함수인 원형의 프로젝션 함수에 대해서 상세히 살펴보고, 이를 다른 형상으로 확장시키며 설명하고자 한다. 또한 마지막에서는 위상 최적 설계와 적층 가공의 연계성을 살펴보고자 한다.

2. 프로젝션 기법

먼저 프로젝션 기법의 개념을 쉽게 설명하기 위해서 포토샵이나 페인터와 같은 그래픽 소프트웨어를 떠올려 보자. 그림을 그리기 위해서 일반적으로 붓을 선택하고 그 붓의 크기를 결정하게 되는데, 그 붓의 크기가 프로젝션 기법에서 최소 길이 스케일을 의미하게 된다. 즉, 가느다란 붓을 선택하게 되면 세밀하고 복



하 승 현

한국해양대학교 해양공학과 조교수

잡한 그림을 그릴 수 있지만, 굵은 붓을 선택하게 된다면 이를 표현하지 못하고 전체적인 그림이 간략화되는 현상이 나타나게 된다.

이를 다르게 설명하기 위해서 그림 1의 격자 모형을 그린다고 가정하자. 그림 1(a)에 보이는 바와 같이 우리가 원하는 모형은 12×4 형태의 격자이다. 여기서 그림 오른쪽의 점이 붓의 크기, 또는 최소 길이 스케일을 나타내는데, 이 크기가 충분히 작다면 원하는 격자 형태 그대로를 정확히 표현할 수 있다. 하지만 이 최소 길이 스케일이 커짐에 따라서, 같은 격자 모양을 따라서 그린다고 하더라도 그림 1(c)와 같이 더 이상 격자가 아닌 직사각형 형태로 나타나 버리게 된다.

일반적으로 최소 스케일이 작을수록 위상 최적 설계에서 보다 우수한 목적함수 값을 제공한다. 하지만, 지나치게 세밀한 최적 설계를 얻게 되면 이를 제조하는데 어려움을 겪을 수밖에 없다. 따라서 프로젝트 기법을 위상 최적 설계에 도입하게 되면, 제조가능한 정도로 최소 길이 스케일을 미리 정의하게 되고 이에 부합하는 최적 재료 배치만을 제공하기 때문에, 제조가능성이 선반영되어 있는 최적 설계를 얻을 수 있게 되는 것이다.

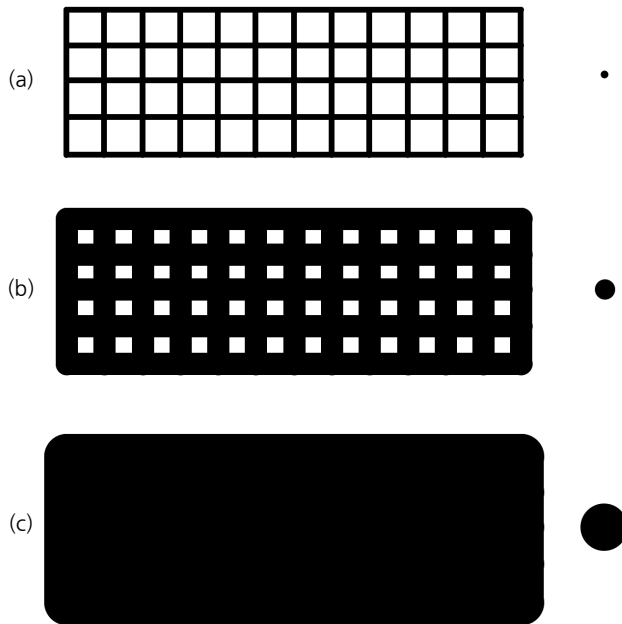


그림 1 프로젝트 기법의 최소 길이 스케일에 따른 차이

다음으로는 위와 같은 프로젝트 기법이 수치적으로 어떻게 정의되는지 살펴보자. 먼저 그림 2와 같은 원형의 프로젝트 함수를 가정하자. 중앙의 격자점에 위치하는 n 번째 설

계 변수로부터 영향을 받는 프로젝트 영역은 그림과 같이 반지름이 r_{min} 인 붉은 색의 원으로 정의되는데, 여기서 r_{min} 이 주어진 최소 길이 스케일을 결정하는 파라미터다. 실제 유한요소 해석이 수행되는 요소 입장에서는 이 r_{min} 값에 따라서 인접한 여러 개의 설계 변수로부터 동시에 영향을 받게 되는데, 우선 요소 e 의 재료 밀도를 결정하기 위한 설계 변수들의 집합 N^e 를 다음의 식과 같이 정의할 수 있다.

$$i \in N^e \quad \text{if} \quad \| \mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}^e \| \leq r_{min} \quad (1)$$

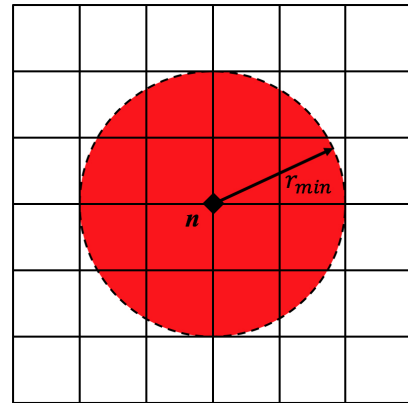


그림 2 원형의 프로젝트 함수

여기서, \mathbf{x}_i 는 설계 변수 i 의 좌표이고, $\bar{\mathbf{x}}^e$ 는 요소 e 의 중심의 좌표이다. 즉, 요소 e 의 중심으로부터 r_{min} 이내로 위치하는 모든 설계 변수가 요소의 재료 밀도를 결정하는데 동시에 영향을 끼치게 되는 것이다. 따라서 집합 N^e 에 포함된 모든 설계 변수값 ϕ_i 에 대해서 가중-평균화된 설계 변수 μ^e 는 다음과 같이 정의된다.

$$\mu^e = \frac{\sum_{i \in N^e} \phi_i w(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}^e)}{\sum_{i \in N^e} w(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}^e)} \quad (2)$$

일반적으로 ϕ_i 는 0에서 1 사이의 값을 가진다. 또한 가중함수 w 는 아래와 같이 정의된다.

$$w(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}^e) = \begin{cases} \frac{r_{min} - \| \mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}^e \|}{r_{min}} & \text{if } i \in N^e \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

또는, 계산상의 편의를 위해서 다음의 식과 같은 균일가중함수가 사용되기도 한다.

$$w(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}^e) = \begin{cases} 1 & \text{if } i \in N^e \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

이와 같이 얻어진 가중-평균화된 설계 변수 μ^e 에 대해서 헤비사이드 계단 함수를 적용시켜 실제 유한요소 해석에 사용되는 재료 밀도 ρ^e 를 얻는다.

$$\rho^e = H(\mu^e) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mu^e > 0 \\ 0 & \text{if } \mu^e = 0 \end{cases} \quad (5)$$

하지만 실제로는 설계민감도 계산을 위해 다음과 같은 수치적 헤비사이드 계단 함수를 사용하게 된다.

$$\rho^e = 1 - e^{-\beta \mu^e} + \mu^e e^{-\beta} \quad (6)$$

여기서 $\beta=0$ 이면 $\rho^e = \mu^e$ 인 선형 관계식을 가지게 되고, $\beta \rightarrow \infty$ 일 때, 헤비사이드 계단 함수에 접근하게 된다.

이와 같은 과정을 통해서 얻어진 요소 e 의 재료 밀도에 대해서 설계 민감도 값을 계산하고 위상 최적 설계를 진행해 나가는 과정은 기존의 방법과 동일하다. 간단한 예로서, 그림 3과 같이 잘 알려진 외팔보 문제에 대해서 컴플라이언스를 최소화시키는 방향으로 위상 최적 설계를 수행해 보자.

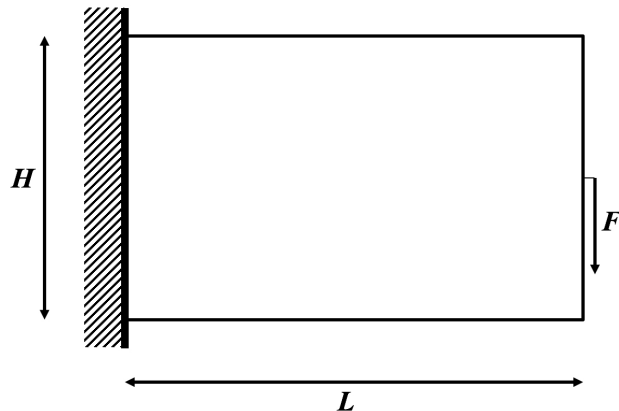


그림 3 외팔보 문제 (L = 40, H = 25)

부피 제약 조건을 30%로 고정시키고 최소 길이 스케일 r_{\min} 값을 변화시켜 가면서 위상 최적 설계를 수행한 결

과는 그림 4와 같다. 그림에서 보는바와 같이 r_{\min} 값이 커짐에 따라서 부재의 최소 두께가 점점 두꺼워지는 것을 확인할 수 있고, 전체적인 재료의 위상이 간결해지는 것을 알 수 있다. 또한 추가적인 후처리 과정없이도 설계자가 원하는 최소 길이 스케일에 맞는 최적 설계 형상을 직접 제공해 준다는 특징을 가지고 있다. 이와 같은 과정을 통해서 위상 최적설계를 통해 얻어지는 구조 부재의 최소 길이 스케일이 $d_{\min} = 2r_{\min}$ 인 것을 확인할 수 있다.

여기까지만 살펴본다면 기존에 개발된 여러 위상 최적 설계 기법과 비슷한 점을 찾아볼 수 있다. 즉, 일정한 크기로 주변의 설계 변수 값을 평균해서 사용하는 개념과 비슷하기 때문이다. 하지만 이 프로젝션 기법은 응답 해석부터 설계 민감도 해석까지 수학적으로 매우 엄밀하게 정의되어 있으며, 그 보다 다음 장에서 살펴볼 확장된 프로젝트션 함수의 사용에서 그 차별성과 수월성을 확인할 수 있다.

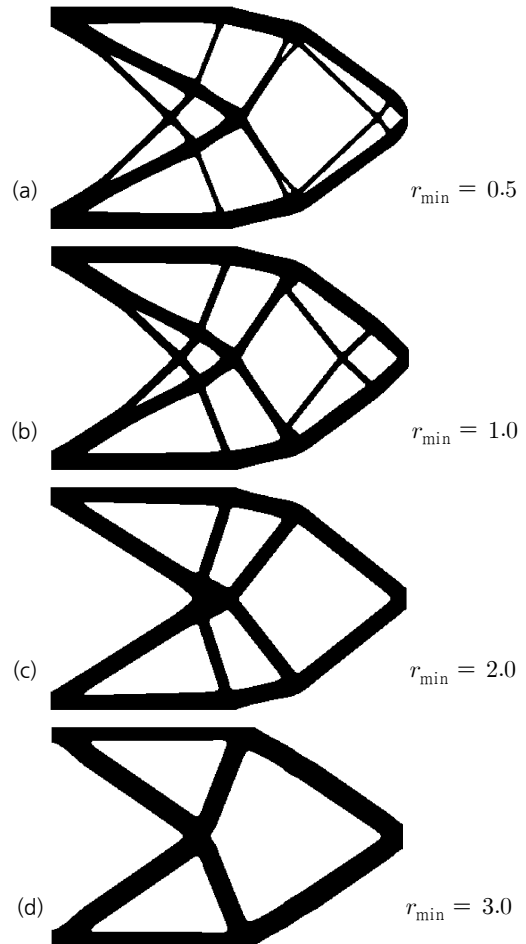


그림 4 최소 길이 스케일의 변화에 따른 최적 설계의 변화

3. 프로젝트션 기법의 확장

앞선 장에서는 가장 기본적인 형태인 원형의 프로젝트션 함수에 대해서 살펴보았는데, 이번 장에는 프로젝트션 함수의 형상을 달리 해보자. 그림 5는 새로운 형태의 프로젝트션 함수의 예시이다.

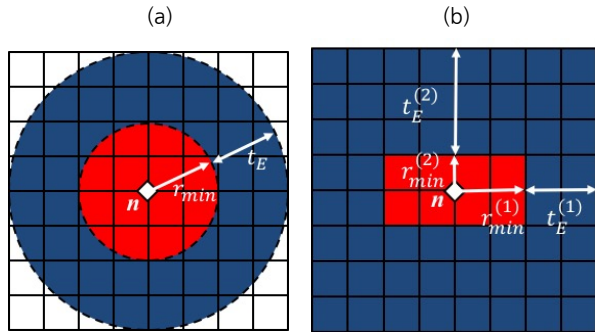


그림 5 원형(a)과 사각형(b) 형상의 이산화된 프로젝트션 함수

그림 5의 프로젝트션 함수가 앞선 그림 2와 다른 점은 중심의 붉은 영역을 푸른 영역이 둘러싸고 있다는 점이다. 2장에서 사용되었던 원형의 프로젝트션 함수는 인접한 프로젝트션 함수들 간에 겹침이 허용되었기 때문에 그림 4와 같은 연속적인 최적 설계 형상이 얻어졌지만, 그림 5의 프로젝트션 함수를 사용하게 되면 붉은 영역과 푸른 영역의 겹침을 서로 간에 허용하지 않기 때문에, 결국 원형 또는 사각형의 형상을 가진 재료가 서로 이산적인 분포를 가지는 최적 설계 결과를 나타내게 되고, 이는 복합재료 등에서 보강재의 위치를 결정하는 문제에 직접 적용이 가능하게 된다. 그림 3과 동일한 외팔보 문제에 대해서 다양한 형상의 보강재를 갖는 복합재료 설계 결과는 그림 6과 같다. 즉, 그림 5에 정의된 여러 가지 스케일 파라미터 값에 따라서 특정 형상을 가지는 보강재의 위치가 위상 최적 설계를 통해서 얻어지는 것을 확인할 수 있다.

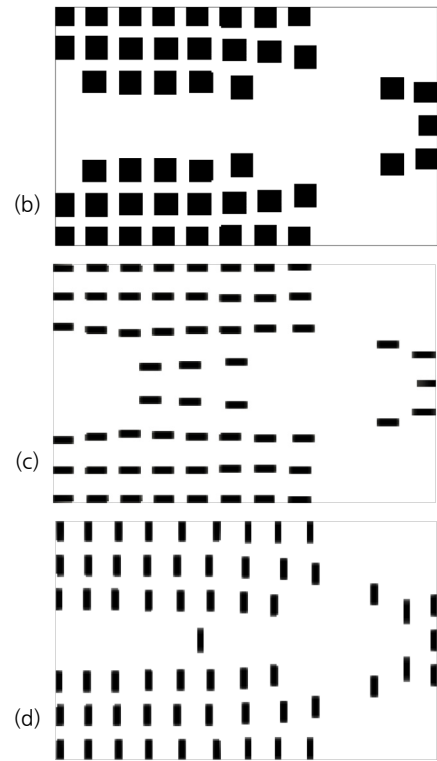
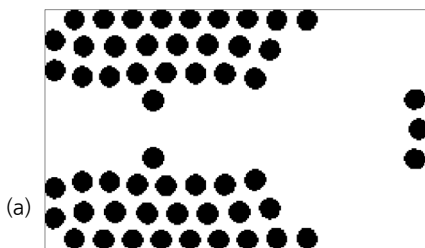


그림 6 확장된 프로젝트션 함수의 복합재료 설계 적용

4. 마이크로 재료 설계로의 적용

앞선 예제들은 모두 2차원 예제였지만, 자연스럽게 3차원 문제로 확장이 가능하다. 이번 장에서는 원통 형상의 프로젝트션 함수를 사용해서 3차원 마이크로 엮임 재료(3-D Micro Woven Materials)에서의 위상 최적 설계를 살펴보고자 한다.



그림 7 3차원 마이크로 엮임 재료

우선 3차원 마이크로 엮임 재료란, 그림 7과 같이 200 마이크로 정도의 직경을 가지는 금속 와이어가 3축 방향으로 서로 엮여져서 만들어진 새로운 형태의 마이크로 재료가

다. 이에 대한 원통형상의 프로젝션 함수의 개략도는 그림 8과 같다. 즉, 위와 같은 엮임 재료의 단위 구조를 구성하는 와이어의 유무에 따라서 그 주위로 정해진 반지름을 갖는 재료가 배치되는 방식이다.

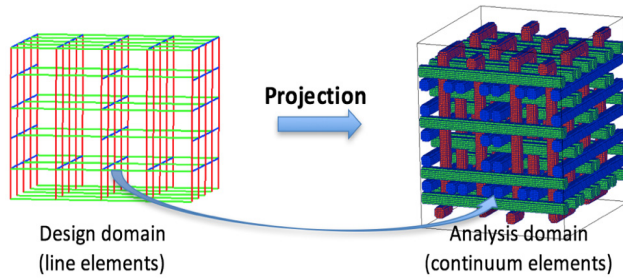


그림 8 원통형 프로젝션 함수의 개략도

균일 격자 형태의 초기 모델로부터 유체투과율을 최대화하는 와이어 최적 배치를 위상 최적 설계를 통해서 구하면 그림 9와 같다. 그리고 이와 같은 최적 설계에 대한 유체의 유선을 출력하면 그림 10과 같다.

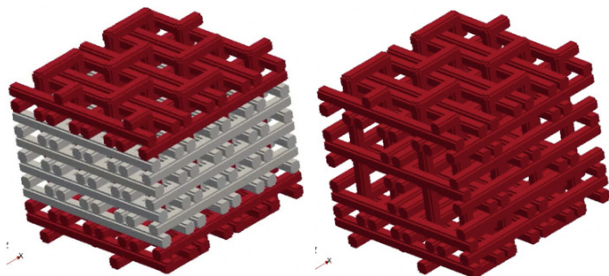


그림 9 3차원 마이크로 엮임 재료에 대한 위상 최적 설계 (최적 설계 전, 후의 와이어 배치도)

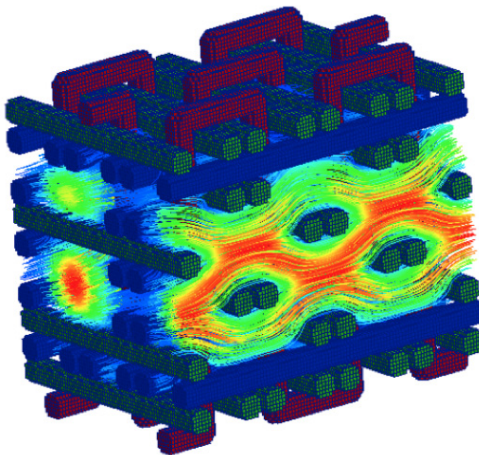


그림 10 최적 설계 와이어 패턴 주위의 유선의 흐름

5. 적층 가공(Additive Manufacturing)

적층 가공이란 절삭 가공에 반대되는 개념으로, 지금까지는 덩어리 형태의 재료를 자르거나 깎아서 생산하는 절삭 가공이 주를 이루었으나, 최근에는 원료를 여러 층으로 쌓거나 결합시키는 방법으로 제품을 만드는 적층 가공 기술이 각광받고 있다. 여기에 대표적인 기술이 3차원 프린팅 기술인데, 이와 같은 기술의 발전에 힘입어 여러 분야의 제품들이 적층 가공을 통해서 새롭게 만들어지고 있다.

적층 가공은 기본적으로 3차원 물체를 수많은 얇은 층을 겹쳐 쌓아서 만들게 되는데, 위상 최적 설계를 통해서 얻어진 재료 밀도 유한요소 모델을 변환 과정을 거쳐 3차원 프린터로 출력할 수 있다. 위상 최적 설계는 기본적으로 설계 영역 내부에 자유로운 재료 배치를 가능하게 하는데, 이러한 측면에서도 3차원 프린터와 잘 어울린다. 적층 가공에도 사용하는 재료나 적층 기법에 따라 여러 가지 기법들이 있지만, 본문에서는 Fused Deposition Modeling (FDM) 기법을 기반으로 한 ABS 플라스틱 재료로 얻은 출력물에 대해서 다루었다.

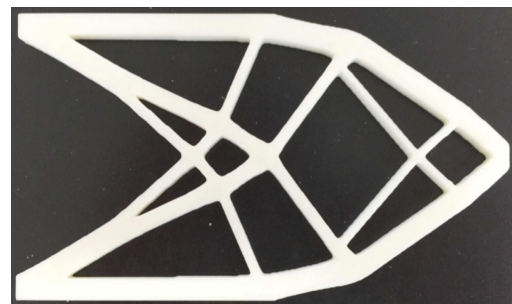


그림 11 3차원 프린터를 활용한 출력 (1)

위의 그림 11은 앞선 2장에서 그림 4(b)의 결과를 3차원 프린터를 활용해서 출력한 결과이다. 위상 최적 설계를 통해서 단순히 0과 1의 재료 분포만을 얻을 수 있는데, 다양한 프로그래밍 언어를 통해서 3차원 프린팅의 표준 모델인 STL 파일로 변환이 가능하다.

또한 그림 12는 40%의 부피 제약 조건 하에서 최대 유체투과율을 가지는 등방성 단위 구조를 각 축 방향으로 3회씩 반복해 놓은 구조물이다. 이 역시 마찬가지로 위상 최적 설계를 통해서 얻어진 재료 분포 모델에 대해서 STL로 변환 과정을 거쳐서 3차원 프린터로 출력한 결과이다. 이와 같은 적층 가공 기술을 통해서 수치 해석 모델을 정확하게 출력 가능하며, 출력 모델을 가지고 설계상의 오류나 개선

점을 직접 확인하는 것이 가능하다. 또한 최적 설계 전후의 모델을 실험적으로 비교, 검증하는 것도 의미가 있을 것이다.

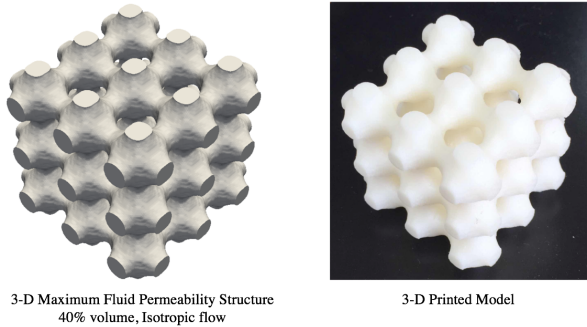


그림 12 3차원 프린터를 활용한 출력 (2)

6. 맺음말

본 기사를 통해서 위상 최적 설계에 사용되는 프로젝션 기법에 대해서 살펴보았다. 여러 수치 예제들을 통해서 살펴본 바와 같이 다양한 형상과 크기를 가지는 프로젝션 함수를 통해서 설계자가 원하는 최소 길이 스케일을 적용하거나, 복합재료 설계 문제에서 특정 형상을 가지는 보강재의 위치를 결정할 수 있었다.

또한 최근 점점 더 각광을 받고 있는 적층 가공에 있어서 위상 최적 설계와의 연계성을 살펴보았고, 위상 최적 설계의 재료 밀도 정보를 간단한 변환 과정을 통해서 3차원 프린터로 출력할 수 있음을 보였다. 여러 공학 분야에서 위상 최적 설계가 사용되고 있는 상황에서 최적의 설계 형상을 보다 쉽고 빠르게 제작할 수 있다면, 위상 최적 설계법이 지금보다 더욱더 널리 보급되고, 머지않아 3차원 프린팅 소프트웨어에 기본적인 모듈로도 탑재될 수도 있을 것이다.

참고문헌

1. Bendsoe, M.P., Kikuchi, N. (1998) Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 71, pp.197~224.
2. Cha, S.-H., Lee, S.-W., Cho, S. (2013) Experimental Validation of Topology Design Optimization, *Journal of*

- Computational Structural Engineering*, 26(4), pp.241~246.
3. Gaynor, A.T., Meisel, N.A., Williams, C.B., Guest, J.K., (2014) Multiple-Material Topology Optimization of Compliant Mechanisms Created Via PolyJet 3D Printing, *ASME Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 136, pp.1-10.
4. Guedes, J., Kikuchi, N. (1990) Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 83, pp.143~198.
5. Guest, J.K. (2015) Optimizing the layout of discrete objects in structures and materials: A projection-based topology optimization approach, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 283, pp.330~351.
6. Guest, J.K., Asadpoure, A., Ha, S.-H. (2011) Eliminating beta-continuation from Heaviside projection and density filter algorithms, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 44(4), pp.443~453.
7. Guest, J.K., Prévost, J.H., Belytschko, T. (2004) Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61, pp.238~254.
8. Ha, S.-H., Guest, J.K. (2014) Optimizing inclusion shapes and patterns in periodic materials using Discrete Object Projection, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 50(1), pp.65~80.
9. Sigmund, O. (2001) A 99 line Topology Optimization Code Written in Matlab, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 21, pp.120~127.
10. Sigmund, O. (2007) Morphology-based black and white filters for topology optimization, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 33, pp.401~424.
11. Sigmund, O., Peterson, J. (1998) Numerical Instabilities in Topology Optimization: A Survey on Procedures Dealing with Checkerboards, Mesh-dependencies and Local Minima, *Structural Optimization*, 16, pp.68~75.
12. Svanberg, K. (1987) The Method of Moving Asymptotes - a New Method for Structural Optimization, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24, pp.359-373.

13. Yushanov, S.P., Bogdanovich, A.E., Mohamed, M. H., (1999) Manufacturing and Property Analysis of a Novel Class of 3-D Woven Composites, *Journal of Thermoplastic Composite Materials*, 12, pp.70~82.
14. Zhao, L., Ha, S., Sharp, K.W., Geltmacher, A.B.,

Fonda, R.W., Kinsey, A., Zhang, Y., Ryan, S.M., Erdeniz, D., Dunand, D.C., Hemker, K.J., Guest, J.K., Weihs, T.P. (2014) Permeability measurements and modeling of topology-optimized metallic 3-D woven lattices, *Acta Materialia*, 81, pp.326~336. 