

Fourier 변환 기법을 이용한 불완전 수리를 실시하는 시스템의 신뢰도 분석*

김호균^{1†} · 손인수²

¹동의대학교 산업경영공학과, ²동의대학교 기계공학과

Reliability Analysis for a System under Imperfect Repair Using Fourier Transform Technique*

Ho Gyun Kim^{1†} · In Soo Son²

¹Department of Industrial & Management Engineering, Dong-Eui University

²Department of Mechanical Engineering, Dong-Eui University

Purpose: Biswas and Sarkar [11] found the availability of a system maintained through several imperfect repairs before a replacement is allowed. However they missed a part of coefficients in the integration. This paper corrects the erratum of Biswas and Sarkar [11] and performs the reliability analysis incorporating the optimal number of imperfect repairs.

Methods: To find the singularities and residues of the suitable complex-valued function for the availability, the computer package Matlab is used. Also the performance measures are calculated by defining and assigning costs.

Results: The accurate availability functions with respect to the numbers of imperfect repairs and the optimal number of imperfect repairs before a replacement are obtained.

Conclusion: The reliability for a system under imperfect repair before a replacement is analyzed using Fourier transform technique.

Keywords: Imperfect Repair, Availability, Fourier Transform Technique, Residue, Singularity

1. 서론

오늘날 제품이나 서비스의 품질과 신뢰성은 기업 경쟁력의 원천 중 하나이다. 수리가능 시스템의 신뢰성 분석에는 어느 특정시간에 시스템이 작동상태에 있을 확률 즉 가용도(availability)가 성능적으로 사용

된다[1, 2]. 대부분의 경우 시간 및 비용을 절약하기 위하여 새 시스템으로 교체하거나 완전수리(perfect repair)를 실시하기 전에 몇 번의 불완전수리(imperfect repair)를 실시한다. 수리 및 보전에 관한 문헌은 상당히 많다[1-5]. 이들 다양한 수리정책은 수리의 성능, 수리 시간, 비용에 의해 구분할 수 있다. 수리의 성능에

* 이 논문은 2016학년도 동의대학교 교내연구비에 의해 연구되었음(201601240001).

† 교신저자 hgkim@deu.ac.kr

2016년 5월 3일 접수, 2016년 5월 26일 수정본 접수, 2016년 6월 2일 게재 확정.

따라 완전수리, 불완전 수리 및 최소수리(minimal repair)로 나누어지고 수리시간이 고려되거나 무시되며 수리비용이 일정하거나 수리시간에 따른 변동비용으로 구분된다. 완전수리 정책은 수리된 유니트가 새 유니트와 동등한 수준으로 되어 완전수리된 유니트는 'as good as new'가 된다. 대부분의 경우 기술적 한계로 완전수리는 존재하지 않으며, 존재할 경우에도 많은 시간과 자원을 요구하므로 완전수리 정책은 실제 불가능한 편이다. 최소수리 정책은 적은 시간과 자원을 요구하지만 수리된 유니트는 고장 직전의 상태로 복구되는 'as bad as old'가 된다. 불완전수리 정책은 이들 양 극단 사이에 시간 및 자원 감소와 수리 성능의 향상 간 절충한 정책이다.

본 논문은 교체 전 후속 고장에 몇 번의 불완전 수리가 허용되는 불완전수리 정책을 고려한다. 불완전 수리의 효과는 후속 작동시간을 단축하고, 후속 불완전 수리시간을 연장시킨다. 빠른 수리 완료 및 비용 절감을 통한 이득이 수명 단축 및 후속 수리시간의 연장으로 인한 손실을 상쇄한다면 불완전수리 정책은 유의미할 것이다. 냉장고, 세탁기 등 가전제품, 조직 내 컴퓨터네트워크, 전기공급시스템 등에서 몇 번의 불완전수리를 실시한 후 시스템이 교체된다.

완전수리 정책에서의 가용도는 잘 알려져 있지만 완전 수리 정책 하에서도 가용도에 관한 문헌은 많지 않다[6, 7]. 가용도를 평가하기 위해 연속시간 마코프 과정(CTMC: continuous time Markov chain)으로 모형화하고 Laplace 변환 기법을 이용하여 가용도를 구하였다[1, 2]. 그러나 기초(underlying) 분포가 지수분포일 경우를 제외하고는 Laplace 역변환을 구하는 것은 어려운 작업이다. Fourier 변환은 실변수 함수를 복소 함수로 확장시키는데 이 복소 함수가 미분가능(해석 함수)하면 해석함수 이론을 이용하여 복잡한 적분을 쉽게 구할 수 있다[8]. Sarkar and Chaudhuri[9]는 완전 수리 하에서 비가용도에 대한 적분 방정식을 만들고 Fourier 변환 기법을 사용하여 감마 수명분포와 지수 수리시간에 대한 가용도를 구하였다. Sarkar and Sarkar[7]은 지속적으로 시스템 상태가 파악되지 않는 상황에서 완전수리 하에서의 주기적 검사시스템의 가용도를 연구하였다. Tang *et al.*[10]은 Sarkar and Sarkar[7]의 논문 중 잘못된 부분을 수정하였다. Biswas and Sarkar[11]은 불완전수리를 실시하는 시스템에 Fourier 변환 기법을 사용하여 가용도를 구하였다. Montoro-Cazorla

and Perez-Ocon[12]는 수리시간이 무시되는 최소수리 하에서 고장 발생을 마코비안 도착과정(Markovian arrival process)으로 확장하여 행렬분석적 방법(matrix-analytic method)을 사용해 신뢰성을 분석하였다. 본 논문에서는 Biswas and Sarkar[11]의 적분 전개식에서의 오류를 수정하고 최적 불완전수리 회수 등 통합적으로 신뢰도를 분석하고자 한다.

본 논문 구성은 다음과 같다. 제2장에서는 교체 전 몇 번의 불완전 수리가 실시되는 보전 모형을 고려하고 가용도를 구하기 위해 Fourier 변환과 역변환 기법을 설명한다. 제3장에서는 수치예제를 통해 수명과 수리시간 분포가 지수분포이고 수명과 수리시간의 매개변수(parameter)가 기하적(geometric)일 때 가용도의 식을 구하고 Biswas and Sarkar[11]의 적분 전개식에서의 오류를 수정한다. 또한 최적 불완전 수리회수를 구한다. 제4장에서는 결론과 추후 연구를 제시한다.

2. Fourier 변환 기법을 사용한 보전 모형

$t=0$ 일 때 작동 상태에서 시작하는 수리가능 시스템을 다루고자 한다. 시스템은 계속적으로 모니터링이 되어 시스템 상태를 파악할 수 있다고 하자. 첫 번째 고장이 발생할 때까지 T_1 동안 작동하고 분포함수 $F_1(t) = P(T_1 \leq t)$ 를 따르고, 시스템이 고장 나면 즉시 불완전 수리가 시작되어 첫 번째 수리시간 D_1 은 분포함수 $G_1(t) = P(D_1 \leq t)$ 를 따른다고 가정한다. 불완전 수리가 이루어져 수리된 시스템은 새 시스템과 같은 상태가 아닐 것이다. 마찬가지로 두 번째 고장이 발생할 때까지 분포함수 $F_2(\cdot)$ 를 갖는 확률 시간 T_2 동안 작동한다. 두 번째 수리도 불완전 수리가 되고 분포함수 $G_2(\cdot)$ 를 갖는 확률 시간 D_2 가 소요된다. 유사하게 k 번의 불완전 수리가 수행되고 난 뒤 시스템은 분포함수 $F_{k+1}(\cdot)$ 를 갖는 확률 시간 T_{k+1} 동안 작동한다. $k+1$ 번째 고장 후 시스템은 새 시스템과 교체된다. 이 때 교체 시간은 무시된다. 새 시스템으로 교체되는 시점은 재생(renewal) 시간이 된다. 후속 재생시간 간에 이 과정이 동일한 조건으로 반복한다. $T_1, D_1, T_2, D_2 \dots$ 는 서로 독립이고 수명시간 및 불완전 수리시간들 간에 다음과 같이 가정한다.

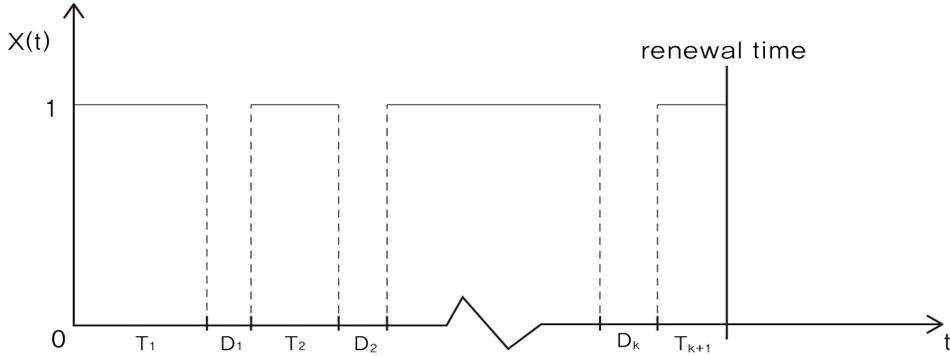


Fig. 1 System state transition under the imperfect repair

가정 1: F_{i+1} 는 확률적으로 F_i ($1 \leq i \leq k$) 보다 작고 G_{i+1} 는 G_i ($1 \leq i \leq k-1$) 보다 크다. 즉 for $\forall 0 \leq x < \infty$, $F_i(x) \leq F_{i+1}(x)$, $G_i(x) \geq G_{i+1}(x)$.

시스템의 상태를 지시 변수 $X(t)$ 로 표현한다. $X(t) = 1$ 이면 시스템은 시간 t 에서 작동하고 $X(t) = 0$ 이면 시간 t 에서 수리 하에 있게 된다. k 번 불완전수리가 실시되는 시스템의 상태 변화는 <Fig. 1>과 같이 나타날 것이다.

시스템의 시간 t 에서 가용도를 $A(t) = P[X(t) = 1]$ 로 정의한다. Fourier 변환 기법으로 가용도 $A(t)$ 를 구하기 위하여 Biswas and Sarkar[11]가 증명한 것을 정리 1로 요약한다. 먼저 시간 t 에서 비가용도를 $B(t) = 1 - A(t)$ 로 나타내고 재생 성질을 이용하여 $B(t)$ 와 수명시간 및 수리시간의 밀도함수를 포함한 적분 방정식이 먼저 구해진다. 이 적분방정식을 t 로 미분하면 $b(t) \equiv B'(t)$ 에 대한 적분방정식이 구해지고, Fourier 변환시켜 $\tilde{b}(s)$ 를 $f_i, g_i, 1 \leq i \leq k+1$ 의 Fourier 변환 \tilde{f}_i, \tilde{g}_i 로써 구할 수 있다. Fourier 변환은 $(-\infty, \infty)$ 에서 정의된 실수 함수 $y(t)$ 를 $s \in (-\infty, \infty)$ 에 대해 다음과 같이 복소 함수로 변환시킨다.

$$\tilde{y}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} y(t) dt \quad (1)$$

여기서 $i = \sqrt{-1}$ 는 허수 기본단위이다. $\tilde{b}(s)$ 식이 구해지면 $z \in C$ 에 대해 다음과 같이 정의한다.

$$c_i(z) \equiv e^{-itz} \tilde{b}(z) \quad (2)$$

정리 1: 식 (2)에서 정의된 $c_i(z)$ 는 고립된(isolated) 특이점들(singularities) z_1, \dots, z_k 를 제외한 하부 반평면(LHP: lower half plane)에서 해석적(analytic)이라고 가정한다. 그러면 시간 $t > 0$ 에서 가용도 $A(t)$ 는 다음 식으로 주어진다.

$$A(t) = 1 - \int_0^t b(u) du \quad (3)$$

여기서 $b(t) = -i \sum_{z_j \in LHP} Res_{z_j} c_i(z)$ 이다.

유수(residue) $Res_{z_j} c_i(z)$ 는 중심을 z_j 로 하고 다른 특이점들을 포함하지 않도록 충분히 작은 반지름을 갖는 원을 따라 시계 반대 방향으로 적분한 것이며 $\lim_{z \rightarrow z_j} (z - z_j) c_i(z)$ 로 계산된다.

증명: $T_1 + D_1$ 의 조건부 확률을 사용하면 $B_1(t) = 1 - A_1(t) = P[X_1(t) = 0]$ 에 대해 다음 적분방정식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} B_1(t) &= P[X_1(t) = 0] \\ &= P[T_1 \leq t \leq T_1 + D_1] \\ &\quad + P[X_2(t) = 0 | T_1 + D_1 \leq t] \\ &= F_1(t) - H_1(t) + \int_0^t B_2(t-x) h_1(x) dx \end{aligned}$$

여기서 $H_1(h_1)$ 은 $T_1 + D_1$ 의 분포함수와 확률밀도함수이다. 같은 방법으로 $1 \leq j \leq k$ 에 대해 적분방정식

을 구하고, k 번째 수리 후에는 X_{k+1} 동안 작동하고 교체되므로 다음 적분방정식을 얻게 된다.

$$B_j(t) = F_j(t) - H_j(t) + \int_0^t B_{j+1}(t-x) h_j(x) dx, \quad 1 \leq j \leq k$$

$$B_{k+1}(t) = \int_0^t B_1(t-x) f_{k+1}(x) dx \quad (4)$$

$t \in (-\infty, 0)$ 에 대하여 $h_j(t) = 0$ 이므로 $t \in (-\infty, 0]$ 에 대하여 $B_j(t) = 0$ 으로 정의한다. 따라서 식 (4)에서 적분의 정의역은 전체 실선으로 확장된다. 식 (4)를 t 에 관해 미분하면 다음 식이 구해진다.

$$b_j(t) = f_j(t) - h_j(t) + \int_0^t b_{j+1}(t-x) h_j(x) dx, \quad 1 \leq j \leq k$$

$$b_{k+1}(t) = \int_0^t b_1(t-x) f_{k+1}(x) dx \quad (5)$$

h 가 f 와 g 의 중첩(convolution) 즉 $h(x) = \int_0^x f(x-u)g(u)du$ 이므로 h 의 Fourier 변환은 $\tilde{h}(s) = \tilde{f}(s)\tilde{g}(s)$ 이다. 식 (5)의 양 변에 Fourier 변환하면 다음 식을 얻게 된다.

$$\tilde{b}_j(s) = \tilde{f}_j(s) - \tilde{h}_j(s) + \tilde{b}_{j+1}(s)\tilde{h}_j(s), \quad 1 \leq j \leq k$$

$$\tilde{b}_{k+1}(s) = \tilde{b}_1(s)\tilde{f}_{k+1}(s) \quad (6)$$

$k=1$ 일 경우, 식 (6)을 이용하여 정리하면 다음 식이 된다.

$$\tilde{b}_1(s) = \frac{\tilde{f}_1(s)[1-\tilde{g}_1(s)]}{1-\tilde{f}_1(s)\tilde{g}_1(s)\tilde{f}_2(s)} \quad (7)$$

같은 방법으로 $k=2$ 일 경우는 다음 식으로 정리된다

$$\tilde{b}_1(s) = \frac{\tilde{f}_1(s)[1-\tilde{g}_1(s)] + \tilde{f}_1(s)\tilde{g}_1(s)\tilde{f}_2(s)[1-\tilde{g}_2(s)]}{1-\tilde{f}_1(s)\tilde{g}_1(s)\tilde{f}_2(s)\tilde{g}_2(s)\tilde{f}_3(s)} \quad (8)$$

일반적으로 $k \geq 1$ 에 대하여 다음 식이 성립된다

$$\tilde{b}_1(s) = \frac{\sum_{i=1}^k [\prod_{j=0}^{i-1} \tilde{f}_j(s)\tilde{g}_j(s)] + \tilde{f}_i(s)[1-\tilde{g}_i(s)]}{1 - [\prod_{j=1}^{k-1} \tilde{f}_j(s)\tilde{g}_j(s)]\tilde{f}_{k+1}(s)} \quad (9)$$

여기서 $\tilde{f}_0(s) = \tilde{g}_0(s) = 1$ 이다.

다음으로 역변환 공식에 의해 $b(t)$ 를 구해보자.

$$b(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-its} \tilde{b}_1(s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c_t(s) ds$$

$c_t(z)$ 는 고립된 특이점들 z_1, \dots, z_k 를 제외한 하부 반평면(LHP)에서 해석적(analytic)이므로 Cauchy의 유수 정리(residue theorem)를 적용하면, $\int_{-\infty}^{\infty} c_t(s) ds = -2\pi i \sum_{z_j} Res_{z_j} c_t(z)$ 가 된다[8]. 따라서 정리 1이 성립하게 된다.

정리 1은 가용도를 구하는 기법을 제공한다. 결국 가용도를 구하는 문제는 적절한 복소 함수의 특이점들을 구하는 문제로 귀결된다. 다음 절에서 지수 수명 시간과 지수 수리시간 하에서 k 번 불완전 수리가 이루어지는 시스템에 대한 가용도를 구하고자 한다. 필요한 복소함수의 특이점들과 그에 따른 유수는 컴퓨터 패키지 Matlab를 사용해 구하였다[13].

3. 수치예제

불완전 수리로 보전되는 생산시스템을 고려하자. 동작시간과 고장시간의 분포함수를 각각 기하적 수명 매개변수로써 $F_i(t) = F(a^{i-1}t)$ for $1 \leq a, G_i(t) = G(b^{i-1}t)$ for $0 \leq b \leq 1$ 이고 기초 분포함수는 모수 α, β 를 갖는 지수분포를 따른다고 가정한다. 여기서 $a=2, b=1$ 로 둔다.

3.1 $k=1$ 일 때

불완전 수리가 한 번 이루어지므로 필요한 T_1, D_1, T_2 의 확률밀도함수들은 $f_1(t) = ae^{-at}, f_2(t) = 2\alpha e^{-2\alpha t}, g_1(t) = \beta e^{-\beta t}, t > 0$ 이고 이들의 Fourier 변

환은 각각 $\tilde{f}_1(s) = \alpha/(\alpha - is)$, $\tilde{f}_2(s) = 2\alpha/(2\alpha - is)$, $\tilde{g}_1(s) = \beta/(\beta - is)$ 이다. 앞의 식 (7)에서 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}\tilde{b}_1(s) &= \frac{\tilde{f}_1(s)[1 - \tilde{g}_1(s)]}{1 - \tilde{f}_1(s)\tilde{g}_1(s)\tilde{f}_2(s)} \\ &= \frac{-\alpha is(2\alpha - is)}{(\alpha - is)(\beta - is)(2\alpha - is) - 2\alpha^2\beta}\end{aligned}$$

$z \in C$ 에 대해 $c_t(z)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}c_t(z) &= \frac{-\alpha iz(2\alpha - iz)}{(\alpha - iz)(\beta - iz)(2\alpha - iz) - 2\alpha^2\beta} e^{-itz} \\ &= \frac{\alpha(2\alpha - iz)}{(\alpha + \beta - iz)(2\alpha - iz) + \alpha\beta} e^{-itz}\end{aligned}$$

$c_t(z)$ 는 $\alpha(2\alpha + 3\beta) - (3\alpha + \beta)iz - z^2$ 의 제곱근인 두 개의 고립된 특이점들 z_1, z_2 외에서는 분석적임을 알 수 있다. 판별식에 따라 다음 두 가지 경우로 구분할 수 있다.

경우 1: $\alpha^2 + \beta^2 - 6\alpha\beta > 0$ 인 경우에는, 특이점은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{1}{2} \left\{ -(3\alpha + \beta) + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 6\alpha\beta} \right\} i \\ &= (-A + B)i, \\ z_2 &= \frac{1}{2} \left\{ -(3\alpha + \beta) - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 6\alpha\beta} \right\} i \\ &= (-A - B)i\end{aligned}$$

z_1 과 z_2 가 LHP에 존재함을 알 수 있고 유수는 다음 식으로 구해진다.

$$\begin{aligned}Res_{z_1 c_t(z)} &= -\frac{\alpha(2\alpha - A + B)e^{t(-A+B)}}{2Bi}, \\ Res_{z_2 c_t(z)} &= \frac{\alpha(2\alpha - A - B)e^{t(-A-B)}}{2Bi}\end{aligned}$$

따라서, 식 (3)에 의해

$$\begin{aligned}b(t) &= \frac{\alpha(2\alpha - A + B)}{2B} e^{t(-A+B)} \\ &\quad - \frac{\alpha(2\alpha - A - B)}{2B} e^{t(-A-B)} \\ &= \alpha e^{-At} \left[\left(\frac{2\alpha - A}{B} \right) \sinh(Bt) + \cosh(Bt) \right]\end{aligned}$$

여기서 $\sinh(u) = [e^u - e^{-u}]/2$, $\cosh(u) = [e^u + e^{-u}]/2$ 이다. $b(t)$ 는 실수 함수이다. $b(t)$ 를 $[0, t)$ 에서 적분하고 1에서 빼면, 가용도 $A(t)$ 가 다음 식으로 구해진다.

$$\begin{aligned}A(t) &= 1 - \frac{2\alpha^2}{A^2 - B^2} + \frac{2\alpha^2}{A^2 - B^2} e^{-At} \cosh(Bt) \\ &\quad + \left[\frac{2\alpha^2}{A^2 - B^2} \frac{A}{B} - \frac{\alpha}{B} \right] e^{-At} \sinh(Bt) \\ &= \frac{3\beta}{2\alpha + 3\beta} + \frac{2\alpha}{2\alpha + 3\beta} e^{-(t/2)(3\alpha + \beta)} \\ &\quad \left\{ \cosh\left(\frac{t}{2} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 6\alpha\beta}\right) + \frac{\alpha - 2\beta}{\sqrt{6\alpha\beta - \alpha^2 - \beta^2}} \right. \\ &\quad \left. \sinh\left(\frac{t}{2} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 6\alpha\beta}\right) \right\}\end{aligned}$$

Biswas and Sarkar[11]에서는 위의 가용도 $A(t)$ 전 개식 가운데 $e^{-At} \sinh(Bt)$ 의 계수 부분에서 A/B 가 빠져있다. 실제로 정확한 $A(t)$ 보다 작게 표현되어 있다. 예로 $\beta = 10\alpha$ 인 경우 가용도는 다음과 같게 된다.

$$\begin{aligned}A(t) &= \frac{15}{16} + \frac{1}{16} e^{-6.5\alpha t} \\ &\quad \{ \cosh(3.2016\alpha t) - 2.9673 \sinh(3.2016\alpha t) \}\end{aligned}$$

경우 2: $\alpha^2 + \beta^2 - 6\alpha\beta < 0$ 인 경우에는,

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{6\alpha\beta - \alpha^2 - \beta^2} - \frac{1}{2}(3\alpha + \beta)i \\ &= D - Ai, \\ z_2 &= -\frac{1}{2} \sqrt{6\alpha\beta - \alpha^2 - \beta^2} - \frac{1}{2}(3\alpha + \beta)i \\ &= -D - Ai\end{aligned}$$

역시 z_1, z_2 는 LHP에 존재한다. 경우 1과 같은 방법으로 구하면 다음과 같이 가용도가 구해진다.

$$\begin{aligned}A(t) &= 1 - \frac{2\alpha^2}{A^2 + D^2} + \frac{2\alpha^2}{A^2 + D^2} e^{-At} \\ &\quad \cos(Dt) + \left[\frac{2\alpha^2}{A^2 + D^2} \frac{A}{D} - \frac{\alpha}{D} \right] e^{-At} \sin(Dt) \\ &= \frac{3\beta}{2\alpha + 3\beta} + \frac{2\alpha}{2\alpha + 3\beta} e^{-(t/2)(3\alpha + \beta)}\end{aligned}$$

$$\left\{ \cos\left(\frac{t}{2}\sqrt{6\alpha\beta - \alpha^2 - \beta^2}\right) + \frac{\alpha - 2\beta}{\sqrt{6\alpha\beta - \alpha^2 - \beta^2}} \sin\left(\frac{t}{2}\sqrt{6\alpha\beta - \alpha^2 - \beta^2}\right) \right\}$$

Biswas and Sarkar[11]에서는 위의 가용도 $A(t)$ 전 개식 가운데 $e^{-At} \sinh(Dt)$ 의 계수 부분에서 A/D 가 빠져있다. 실제로 정확한 $A(t)$ 보다 작게 표현되어 있다. 예로 $\beta = \alpha$ 인 특별한 경우 가용도는 다음과 같게 된다.

$$A(t) = \frac{3}{5} + \frac{2}{15}e^{-2\alpha t} \left\{ \cos \alpha t - \frac{1}{2} \sin \alpha t \right\}, \quad t > 0$$

MTTF = $1/\alpha + 1/(2\alpha) = 3/(2\alpha)$, MDT = $1/\beta$ 이기 때문에 두 가지 경우에 안정상태 가용도는 $A = \frac{MTTF}{MTTF + MDT} = \frac{3\beta}{2\alpha + 3\beta}$ 가 됨을 확인할 수 있다. 실제로는 $1/\alpha \gg 1/\beta$ 즉 $\beta \gg \alpha$ 이므로 여기에서는 $\beta = 20\alpha$ (년⁻¹)으로 가정하고 수치계산을 하였다. $\beta = 20\alpha$ 일 때 Matlab으로 수치계산한 결과 특이점들은 $z_1 = -3.1184i, z_2 = -19.8815i$ 이고 가용도는 다음과 같게 된다.

$$A(t) = 0.9677 + 0.0323e^{-11.5t} \{ \cosh(8.3815t) - 2.3265 \sinh(8.3815t) \}$$

3.2 k = 2 이상일 때

$k = 2$ 일 때는 불완전 수리가 두 번 이루어지므로 식 (8)의 $\tilde{b}_1(s)$ 를 구하기 위해 추가로 확률밀도함수들 $f_3(t) = 4\alpha e^{-\alpha t}, g_2(t) = \beta e^{-\beta t}$ 가 필요하다. 같은 방법으로 복소함수 $c_i(z)$ 를 정의하고 수치계산으로 특이점을 구하면 $z_1 = 0.7589 - 20.0490i, z_2 = -0.7589 - 20.0490i, z_3 = 1.6726 - 3.4510i, z_4 = -1.6726 - 3.4510i$ 가 된다. 특이점들이 LHP에 존재함을 확인할 수 있다. 정리 1에 의해 유수를 구하고 가용도를 구하면 다음과 같게 된다.

$$A(t) = 0.9460 - [0.0239 \sin(1.6726t) - 0.0146 \cos(1.6726t)]e^{-3.451t} + [0.0395 \cos(0.7589t) - 0.1562 \sin(0.7589t)]e^{-20.049t}$$

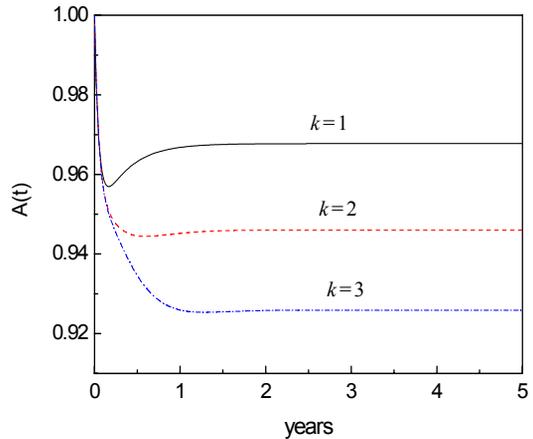


Fig. 2 Availability functions with respect to k ($\beta = 20\alpha$)

안정상태 가용도는 0.9460임을 알 수 있다.

같은 방법으로 $k = 3$ 일 때 구해보면 다음 6개의 특이점이 있다. $z_1 = -9.3012i, z_2 = -17.5011i, z_3 = 1.4512 - 21.0761i, z_4 = -1.4512 - 21.0761i, z_5 = 2.2659 - 3.0227i, z_6 = -2.2659 - 3.0227i$. 이 때 가용도는 다음과 같게 된다.

$$A(t) = 0.9259 - 0.0146e^{-9.3012t} + 0.0654e^{-17.5011t} - [0.0096 \cos(1.4512t) + 0.1103 \sin(1.4512t)]e^{-21.0761t} + [0.0329 \cos(2.2659t) + 0.0289 \sin(2.2659t)]e^{-3.0227t}$$

안정상태 가용도는 0.9259임을 알 수 있다. 같은 방법으로 $k \geq 4$ 일 때의 가용도를 구할 수 있을 것이다.

불완전 수리 횟수에 따른 가용도 함수를 <Fig. 2>에 도시하였다. 불완전 수리 횟수가 증가하면 가용도 함수는 상당히 감소함을 알 수 있다. 따라서 교체가 불완전 수리보다 비용이 상당히 소요될 경우에만 다중 불완전 수리가 선택될 것이다.

3.3 최적 불완전 수리 횟수

교체 전 고장이 발생할 때 여러 번의 불완전수리를 실시하는 보전정책에서 최적 불완전 수리 횟수를 결정하도록 하자. 최적 정책은 시간당 평균 수익을 최대로 하는 불완전 수리 횟수를 구하면 된다. 최적 수리

Table 1 Performance measures for different values of the replacement cost

C_R	k	E[PC]	E[CT]	P[k]	C_R	k	P[k]
1	0	4.0	1	4.0	2	0	3.0
	1	6.495	1.55	4.1903		1	3.5452
	2	7.740	1.85	4.1838		2	3.6432
	3	8.360	2.025	4.1284		3	3.6346
3	0				3	0	2.0
	1					1	2.9
	2					2	3.1027
	3					3	3.1407
	4					4	3.1193

횃수를 구하기 위해 수익과 비용을 다음과 같이 정의한다. 시스템이 작동 중일 때 단위시간 당 수익을 $c_0 = 5$, 불완전 수리시간 동안 단위시간당 비용을 $c_I = 0.1$, 교체비용 $c_R = 1$ 로 할당한다. 이때 기대 주기 $E[CT] = E[\sum_{i=1}^k (T_i + D_i) + T_{k+1}]$ 이고 한 주기의 기대수익 $E[PC] = c_0 E[\sum_{i=1}^{k+1} T_i] - c_I E[\sum_{i=1}^k D_i] - c_R$ 이 되어 단위시간당 수익 $P(k)$ 는 다음 식을 갖게 된다.

$$P(k) = \frac{E[PC]}{E[CT]} = \frac{c_0 E[\sum_{i=1}^{k+1} T_i] - c_I E[\sum_{i=1}^k D_i] - c_R}{E[\sum_{i=1}^k (T_i + D_i) + T_{k+1}]} \quad (10)$$

<Table 1>은 $\beta = 20\alpha$ ($\alpha = 1$) 일 경우에 교체비용 $c_R = 1, 2, 3$ 일 때의 최적 불완전 수리횃수를 나타낸다. 교체비용이 증가할수록 최적 불완전 수리횃수는 증가하나 기대수익은 감소함을 알 수 있다.

4. 결 론

수리가능 시스템의 성능분석에 가용도가 사용되고 수리에는 완전수리, 최소수리 및 불완전수리가 있다. 완전수리 정책에서의 가용도는 잘 알려져 있지만 완전 수리 정책 하에서도 가용도에 관한 문헌은 많지 않다. 가용도를 평가하기 위해 연속시간마코프과정(CTMC: continuous time Markov chain)으로 모형화하고 Laplace

변환 기법을 이용하여 가용도를 구하였으나 기초(underlying) 분포가 지수분포일 경우를 제외하고는 Laplace 역 변환을 구하는 것은 어려운 작업이다. Biswas and Sarkar[11]은 Fourier 변환 기법을 사용하여 교체 전 여러 번의 불완전 수리를 실시하는 시스템의 가용도를 구하였다. 본 논문에서는 Biswas and Sarkar[11]의 가용도를 구하는 적분 전개식에서 빠진 부분을 수정하고 최적 불완전수리 회수 등 신뢰성을 통합적으로 분석하였다.

불완전 수리는 수리 후 동작시간이 짧아지므로 시스템의 성능을 낮추어 불완전 수리 횃수가 증가할수록 가용도 함수는 상당히 감소함을 알 수 있다. 그러나 교체비용이 불완전 수리 비용보다 커질수록 최적 불완전 수리횃수는 증가함을 알 수 있었다.

본 모형에서는 교체 전 여러 번의 불완전 수리를 실시하는 보전 모형을 고려했으나 다른 보전 모형과 기초 분포가 지수분포가 아닐 경우에 Fourier 변환기법을 적용할 수 있을 것이다.

또한 시스템의 상태를 파악하는데 검사가 필요해 검사정책이 추가되는 경우도 연구 대상이 될 것이다

References

[1] Seo, S. G., Kim, H. G., Kwon, H. M., Cha, M. S. and Yoon, W. Y. (2015). "Reliability Engineering (2nd Ed.)". Kyobomoongo.
 [2] Rausand, M. and Hoyland, A. (2004). "System Reliability Theory: Models, Statistical Methods, and

- Applications". John Wiley & Sons.
- [3] Blischke, W. R. and Murthy, D. N. P. (2000). "Reliability: modeling, prediction, and optimization". John Wiley & Sons.
- [4] Nakagawa, T. (2006). "Maintenance Theory". Springer Science & Business Media.
- [5] Wang, H. (2002). "A survey of maintenance policies of deteriorating systems". *European Journal of Operations Research*, Vol. 139, No. 3, pp. 469-489.
- [6] Cui, L. and Xie, M. (2005). "Availability of a periodically inspected system with random repair or replacement times". *Journal of Statistical Planning and Interface*, Vol. 131, No. 1, pp. 89-100.
- [7] Sarkar, J. and Sarkar, S. (2000). "Availability of a periodically inspected system under perfect repair". *Journal of Statistical Planning and Interface*, Vol. 91, No. 1, pp. 77-90.
- [8] Kreyszig, E. (2010). "Advanced Engineering Mathematics". John Wiley & Sons.
- [9] Sarkar, J. and Chaudhuri, G. (1999). "Availability of a system with gamma life and exponential repair time under a perfect repair policy". *Statistics & Probability Letters*, Vol. 43, No. 2, pp. 189-196.
- [10] Tang, T., Lin, D., Banjevic, D. and Jardine, A. K. (2011). "Erratum to 'Availability of a periodically inspected system under perfect repair' [J. Statist. Plann. Inference 91(2000) 77-99]". *Journal of Statistical Planning and Interface*, Vol. 141, No. 1, pp. 610.
- [11] Biswas, A. and Sarkar, J. (2000), "Availability of a system maintained through several imperfect repairs before a replacement or a perfect repair". *Statistics & Probability Letters*, Vol. 50, No. 2, pp.105-114.
- [12] Montoro-Cazorla, D. and Perez-Ocon, R. (2006). "Reliability of a system under two types of failures using a Markovian arrival process". *Operations Research Letters*, Vol. 34, No. 5, pp. 525-530.
- [13] Baik, T. H., Chun, C. H. and Kim, K. S. (2010). "Matlab Concise". Infinity Books.