

파동방정식 수치해의 일관성에 관한 연구

편석준* · 박윤희

인하대학교 에너지자원공학과

A Study on Consistency of Numerical Solutions for Wave Equation

Sukjoon Pyun* and Yunhui Park

Department of Energy Resources Engineering, Inha University

요 약: 탄성과 자료의 역산은 파동방정식에 기초하고 있으므로 파동방정식의 해를 정확하게 구하는 것이 가장 중요하다. 특히, 전파형역산은 파동장 전체를 이용하기 때문에 정문제에 해당하는 모델링이 정확하게 이루어져야 신뢰할 수 있는 결과를 얻게 된다. 파동방정식의 수치해를 구하는 대표적인 기법인 유한차분법과 유한요소법은 해의 수렴성을 보장할 수 있어야 하는데, 해의 수렴성은 이론적으로 일반화된 증명이 되어 있으나 실제 문제에 적용할 경우 일관성과 안정성을 분석해야 한다. 모델링 결과의 일관성은 송신원 함수의 구현이 매우 중요한 부분인데, 유한차분법은 디랙 델타 함수(Dirac delta function)를 나타낼 때 격자 간격으로 표준화된 싱크 함수(sinc function)를 사용해야 하는 반면 유한요소법은 격자 간격에 관계없이 기저함수 값을 사용하면 된다. 주파수 영역 파동방정식을 사용할 경우 송신 파형 함수의 스펙트럼을 정확하게 표현하기 위해 샘플링 이론으로 정의되는 시간 간격보다 더 조밀한 샘플링 간격을 사용하고 나이퀴스트(Nyquist) 주파수보다 더 높은 주파수를 최대 주파수로 사용해야 한다. 또한, 복소 각주파수를 사용하는 경우 감쇠 파동방정식을 만족하기 위해서는 송신 파형 함수를 먼저 감쇠한 후 사용해야 한다. 이러한 요건들이 모두 만족되었을 때 신뢰할 수 있는 역산 알고리즘 개발이 가능하다.

주요어: 유한차분법, 유한요소법, 일관성, 디랙 델타 함수, 감쇠 파동방정식

Abstract: Since seismic inversion is based on the wave equation, it is important to calculate the solution of wave equation exactly. In particular, full waveform inversion would produce reliable results only when the forward modeling is accurately performed because it uses full waveform. When we use finite-difference or finite-element method to solve the wave equation, the convergence of numerical scheme should be guaranteed. Although the general proof of convergence is provided theoretically, the consistency and stability of numerical schemes should be verified for practical applications. The implementation of source function is the most crucial factor for the consistency of modeling schemes. While we have to use the sinc function normalized by grid spacing to correctly describe the Dirac delta function in the finite-difference method, we can simply use the value of basis function, regardless of grid spacing, to implement the Dirac delta function in the finite-element method. If we use frequency-domain wave equation, we need to use a conservative criterion to determine both sampling interval and maximum frequency for the source wavelet generation. In addition, the source wavelet should be attenuated before applying it for modeling in order to make it obey damped wave equation in case of using complex angular frequency. With these conditions satisfied, we can develop reliable inversion algorithms.

Keywords: finite-difference method, finite-element method, consistency, Dirac delta function, damped wave equation

Received: 7 July 2016; Revised: 25 August 2016;

Accepted: 26 August 2016

*Corresponding author

E-mail: pyunsj@inha.ac.kr

Address: Department of Energy Resources Engineering, Inha University,
100 Inharo Nam-gu, Incheon 22212, Korea

©2016, Korean Society of Earth and Exploration Geophysicists

This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

서 론

지구물리분야에서는 지층이나 지질구조와 관련된 여러 물리적 현상을 이용하여 지구 내부 구조를 파악하는 것을 주 목적으로 한다. 이 목적을 달성하기 위해서 특정한 물리적 현상에 대한 정문제(forward problem)를 정의하고 이를 이용하여 역문제(inverse problem)를 푸는 것이 핵심이다. 탄성과 분야에서는 수많은 역산 문제들이 존재하는데 그 중 전파형 역산(full waveform inversion)이 고급 영상화 기술로 여겨지며 최근 가장 큰 관심을 받고 있다(Virieux and Operto, 2009). 전파형 역산이 유망한 기술로서 오랜 기간 각광받고 있지만 방대한 계산 시간, 비선형성에 의한 비유일해 문제(또는 주기 놓침(cycle skip)문제), 현장 자료를 정확히 모사하기 위한 모델링 기법의 한계 등 몇 가지 해결되지 않는 문제점이 있다. 특히, 3차원 특성, 지향성, 이방성, 점성 등 현장자료를 정확하게 모사하기 위한 노력이 많은 연구를 통해 이루어지고 있다. 탄성과의 거동을 모사하는 모델링 기법은 매우 다양하게 개발되었는데 이론적 배경이나 구현 방법 등에 의해 구별될 수 있다(Carcione et al., 2002; Robertsson et al., 2007). 이렇게 다양한 모델링 기법을 통해 정문제를 풀고 역문제를 구현할 때에는 모델링 기법의 정확성이 더욱 중요해진다.

일반적으로 합성자료를 사용하여 개발한 알고리즘을 검증할 때 관측자료를 생성하는 정문제와 모델변수를 구하는 역문제에 사용되는 모델링 기법이 동일할 경우 GIGO (Garbage In, Garbage Out) 또는 역산 범죄(inverse crime)라고 불리운다. 이는 정문제와 역문제에 동일한 알고리즘을 사용하기 때문에 역문제를 구현하는 알고리즘의 정확성을 판단하기 어렵고 결과의 신뢰성이 떨어진다는 점을 의미하는 용어이다. 따라서 다른 종류의 모델링 기법을 사용하여 관측자료를 생성하고 역산을 수행해야 알고리즘을 정확하게 검증할 수 있다. 일례로 Jeong et al. (2013)은 역산 범죄를 피하기 위하여 전파형 역산을 위해 사용하는 모델링 기법과 관측 자료를 생성하기 위해 사용하는 모델링 기법을 명시적으로 달리 사용하였다. 그러나 다른 종류의 모델링 기법을 사용하더라도 수치적으로 동일한 해를 얻을 수 있어야 정확한 역산 알고리즘을 구현할 수 있다.

본 논문에서는 음향파와 완전파형역산에서 사용되는 유한차분법, 유한요소법, 시간 영역, 주파수 영역 모델링 기법 간의 차이점을 비교하고, 이들 기법들이 일관성 있는 수치해를 얻기 위해 고려해야 할 사항과 방법에 대해 기술하고자 한다. 본론의 전반부에는 수치해를 구하기 위한 기본 이론과 일관성 있는 수치해를 구하기 위한 이론에 대해 설명한다. 후반부에는 전반부에서 이론적으로 밝힌 방법론의 효용성을 수치 예제를 통해 보여주고자 한다.

파동방정식의 수치 모델링

유한차분법

파동방정식을 수치적으로 풀이하기 위한 방법으로 가장 널리 사용되는 해법은 유한차분법이다. 유한차분법에 의한 파동방정식의 풀이는 오래 전부터 이미 널리 사용되어 왔고 수학적으로도 완전한 해석이 이루어져 있으나 원칙적으로는 어떤 수치해법을 적용하기 위해서는 수렴성(convergence)에 대한 해석이 먼저 이루어져야 한다. 여기서는 편의상 1차원 양방향 음향 파동방정식을 이용하여 수렴성을 확인해 보겠다. 밀도가 균질한 매질에서 1차원 양방향 음향 파동방정식은 다음과 같다.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} + f(z,t) \tag{1}$$

여기서 c 는 매질에서의 파동 전파 속도, u 는 파동장, f 는 송신원 함수이다. z 와 t 는 각각 공간과 시간에 대한 변수이다. 일반적으로 유한 차분법의 수렴성을 증명하기는 어렵기 때문에 Lax-Richtmyer 등가 정리(Strikwerda, 2004)에 의해 차분연산자의 일관성(consistency)과 안정성(stability)을 보임으로써 수렴성을 증명한다. Lax-Richtmyer 등가 정리에 의하면 양호한 조건(well-posed)의 초기값 문제인 편미분 방정식에 대한 일관된 유한차분식은 안정한 경우에 수렴한다. 유한차분법의 일관성을 확인하기 위해 편의상 식 (1)의 파동방정식을 다음과 같이 정의한다.

$$Du = \frac{1}{c^2} u_{tt} - u_{zz} \tag{2}$$

여기서 D 는 미분 연산자이고 $u_{tt} = \partial^2 u / \partial t^2$, $u_{zz} = \partial^2 u / \partial z^2$ 이다. 이 때 중심유한차분에 의한 차분 연산자는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$D_{k,h} u = \frac{1}{c^2} \frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{k^2} - \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} \tag{3}$$

여기서 $u_m^n = u(t_n, z_m) = u(nk, mh)$ 이고 k 와 h 는 각각 시간과 공간에 대한 샘플링 간격이다. n 과 m 은 각각 시간과 공간에 대한 일련 번호이다. 함수 u 를 t 와 z 에 대해 테일러 전개(Taylor expansion)하면 다음과 같다.

$$u_m^{n+1} = u_m^n + ku_t + \frac{1}{2}k^2 u_{tt} + \frac{1}{6}k^3 u_{ttt} + \frac{1}{24}k^4 u_{tttt} + \frac{1}{120}k^5 u_{ttttt} + O(k^6) \tag{4}$$

$$u_m^{n-1} = u_m^n - ku_t + \frac{1}{2}k^2 u_{tt} - \frac{1}{6}k^3 u_{ttt} + \frac{1}{24}k^4 u_{tttt} - \frac{1}{120}k^5 u_{ttttt} + O(k^6) \tag{5}$$

$$u_{m+1}^n = u_m^n + hu_z + \frac{1}{2}h^2 u_{zz} + \frac{1}{6}h^3 u_{zzz} + \frac{1}{24}h^4 u_{zzzz} + \frac{1}{120}h^5 u_{zzzzz} + O(h^6) \tag{6}$$

$$u_{m-1}^n = u_m^n - hu_z + \frac{1}{2}h^2 u_{zz} - \frac{1}{6}h^3 u_{zzz} + \frac{1}{24}h^4 u_{zzzz} - \frac{1}{120}h^5 u_{zzzzz} + O(h^6) \tag{7}$$

식 (4), (5), (6), (7)에 의해 식 (3)의 차분 연산자는 다음과 같

이 전개된다.

$$D_{k,h}u = \frac{1}{c^2}u_{tt} - u_{zz} + \frac{1}{12c^2}k^2u_{tttt} - \frac{1}{12}h^2u_{zzzz} + O(k^4) + O(h^4) \quad (8)$$

식 (2)의 편미분 연산자와 식 (8)의 차분 연산자의 차이는 다음과 같다.

$$Du - D_{k,h}u = -\frac{1}{12c^2}k^2u_{tttt} + \frac{1}{12}h^2u_{zzzz} + O(k^4) + O(h^4) \quad (9)$$

k 와 h 가 0으로 수렴함에 따라 식 (9)도 0으로 수렴한다. 그러므로 식 (3)의 차분 연산자는 식 (2)의 편미분 연산자와 일관된 결과를 준다고 말할 수 있다.

식 (3)의 차분식에 대한 수치적 안정성은 폰 노이만(Von Neumann) 분석으로 확인할 수 있다. 폰 노이만 분석은 푸리에(Fourier) 분석을 이용하여 안정성에 대한 충분 조건을 만족시킬 수 있다(Strikwerda, 2004). Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) 조건수(p)를 도입하여 식 (3)을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$u_m^{n+1} = 2u_m^n - u_m^{n-1} + p^2(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) \quad (10)$$

$$p = ck/h \quad (11)$$

푸리에 변환식을 이용하여 u_m^n 을 표현하면 다음과 같다.

$$u_m^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{imh\xi} \underline{u}^n(\xi) d\xi \quad (12)$$

여기서 ξ 는 파수(wavenumber)이고 $\underline{u}^n(\xi)$ 은 공간 변수에 대해서 푸리에 변환한 파동장이다. 식 (12)를 식 (10)에 대입하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$u_m^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{imh\xi} \left[\left\{ 2 + p^2(e^{ih\xi} - 2 + e^{-ih\xi}) \right\} \underline{u}^n(\xi) - \underline{u}^{n-1}(\xi) \right] d\xi \quad (13)$$

위의 식을 만족하기 위해서 다음과 같은 점화식이 성립해야 한다.

$$\underline{u}^{n+1}(\xi) = \left\{ 2 - 4p^2 \sin^2(h\xi/2) \right\} \underline{u}^n(\xi) - \underline{u}^{n-1}(\xi) \quad (14)$$

여기서 $\underline{u}^{n+1}(\xi)$ 은 다음과 같이 증폭 인자(amplification factor)가 η 인 관계식으로 표현할 수 있다.

$$\underline{u}^{n+1}(\xi) = \eta \underline{u}^n(\xi) \quad (15)$$

증폭 인자를 구하기 위해 식 (14)를 $\underline{u}^{n-1}(\xi)$ 로 나누고 정리하면 다음과 같이 2차 다항식으로 표현할 수 있다.

$$\eta^2 - 2A\eta + 1 = 0 \quad (16)$$

여기서 $A = 1 - 2p^2 \sin^2(h\xi/2)$ 이다.

식 (16)의 해는 A 의 범위에 따라 다음과 같이 두 가지로 나타난다.

$$\eta = \begin{cases} A \pm \sqrt{A^2 - 1}, & |A| \geq 1 \\ A \pm i\sqrt{1 - A^2}, & |A| < 1 \end{cases} \quad (17)$$

시간 적분에 의한 파동장 값이 수렴하기 위해서는 증폭 인자가 1보다 작거나 같아야 하므로 $|A| < 1$ 를 만족해야 한다. 따라서 다음과 같은 안정 조건을 얻을 수 있다.

$$p = c \frac{k}{h} < 1 \quad (18)$$

유한요소법

유한차분법과 더불어 파동방정식을 수치적으로 풀이하는 대표적인 기법이 유한요소법이다. 유한차분법에 비해 계산 시간이 길다는 단점이 있으나 해의 정확도가 높고 불규칙한 경계를 갖는 영역에 적용하기가 유리하다. 편미분 방정식과 일관된 해를 준다는 것은 복잡한 함수해석학적 이론에 의해 증명되어 있고(Becker *et al.*, 1981), 안정성은 유한차분법과 마찬가지로 폰 노이만 분석을 통해 해석할 수 있다. 여기서는 다음 절의 송신원 구현을 설명하기 위해 기본적인 수식을 유도하고자 한다. 시간 영역 2차원 파동방정식은 다음과 같다.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, z, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, z, t)}{\partial z^2} + f(x, z, t) \quad (19)$$

변수들을 생략하고 미분 기호를 사용함으로써 다음과 같이 보다 간단하게 표현할 수 있다.

$$\frac{1}{c^2} \ddot{u} = \nabla^2 u + f \quad (20)$$

여기서 \ddot{u} 는 파동장의 시간에 대한 2차 미분이고 ∇^2 는 라플라스 연산자이다. 식 (20)을 만족하는 파동장을 구하기 위해 가중잔차법(method of weighted residual)을 적용한다. 식 (20)에서 좌변과 우변의 차이를 잔차로 정의하고 적절한 가중함수 $v(x, z)$ 를 곱하여 적분하면 다음과 같다.

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{c^2} \ddot{u}v - \nabla^2 uv - fv \right) dx dz = 0 \quad (21)$$

여기서 Ω 는 모델링을 수행하는 영역이다. 부분적분을 통해 2계 미분식을 1계 미분식으로 변형하고 노이만 경계조건(Neumann boundary condition)을 적용하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\int_{\Omega} \left[\frac{1}{c^2} \ddot{u}v + \nabla u \cdot \nabla v - fv \right] d\Omega = 0 \quad (22)$$

이러한 과정을 통해 얻은 식을 수학적으로는 약한 공식(weak formula)이라고 한다. 이것은 해를 구성하는 함수공간이 2차 미분까지 연속해야 한다는 조건에서 1차 미분까지만 연속하면

된다는 조건으로 약화되었기 때문에 붙여진 이름이다.

식 (22)를 수치적으로 풀기 위해 유한 차원의 기저함수를 선형결합하여 파동방정식의 해와 가중함수를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$u = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) \phi_i(x, z) \quad (23)$$

$$v = \sum_{j=1}^n \beta_j \phi_j(x, z) \quad (24)$$

여기서 ϕ_i, ϕ_j 는 기저함수, α_i, β_j 는 가중계수이고 n 은 절점 (node)의 개수이다. 식 (23), (24)를 식 (22)에 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{j=1}^n \beta_j \sum_{i=1}^n \left[\ddot{\alpha}_i \int_{\Omega} \frac{1}{c^2} \phi_i \phi_j d\Omega - \alpha_i \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j d\Omega \right] = \sum_{j=1}^n \beta_j \int_{\Omega} f \phi_j d\Omega \quad (25)$$

여기서 가중계수 β_j 는 임의의 값을 갖기 때문에 식 (25)가 항등식이 되기 위해서는 모든 j 에 대해 다음의 관계가 성립해야 한다.

$$\sum_{i=1}^n [M_{ij} \ddot{\alpha}_i - K_{ij} \alpha_i] = F_j \quad (26)$$

여기서

$$M_{ij} = \int_{\Omega} \frac{1}{c^2} \phi_i \phi_j d\Omega \quad (27)$$

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j d\Omega \quad (28)$$

$$F_j = \int_{\Omega} f \phi_j d\Omega \quad (29)$$

이고, 각각 질량행렬, 강성행렬, 송신원 벡터의 성분이 된다. 식 (26)의 적분값을 구하고 가중계수 α_i 에 대한 선형연립방정식을 구성하여 파동방정식을 수치적으로 풀이하게 된다. 이와 같은 유한요소법 풀이 과정을 Galerkin 방법이라고 한다.

송신원 구현

유한차분법에서 송신원을 구현하는 방법에는 크게 초기값 방법(initial value method)과 하중 함수 방법(forcing function method) 두 가지로 구분할 수 있다. 초기값 방법은 해석적 해를 송신원을 포함하는 영역에 초기값으로 주고 모델링하는 것으로 송신원 근처의 파동장이 정확하게 모델링 되지만 시간 순서에 따라 구현해주어야 하기 때문에 주파수 영역 모델링에서는 사용될 수 없다는 한계점이 있다. 반면에 하중 함수 방법은 송신원 항을 방정식에 더하여 모델링하는 것으로 시간 영역, 주파수 영역 모두 사용하기에 쉽지만 송신원에 가까운 지점에서 수치 오차가 커지고 복잡한 식으로 인해 수치적인 안

정성이 감소된다(Hicks, 2002).

물리탐사를 위한 파동방정식 모델링에서는 주로 하중 함수법을 적용하는데, 점 송신원을 표현하기 위해 공간 좌표에 대한 디랙 델타(Dirac delta) 함수를 송신원 항으로 사용한다. 수치해를 구하기 위해서는 디랙 델타 함수를 이산화 해야 하므로 실제로는 디랙 델타 함수의 한정띠(band-limited) 함수 형태인 싱크(sinc) 함수를 사용한다(Hicks, 2002).

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad (30)$$

모델링을 위해 싱크 함수를 격자 간격에 대해 이산화 하면 다음과 같다.

$$\delta(m - m_s) = \text{sinc}\left(\frac{x - x_s}{h}\right) \quad (31)$$

여기서 m_s 는 송신원이 위치한 격자점 번호이고 x_s 는 송신원 좌표를 나타낸다(즉, $m_s h = x_s$). 만약 식 (31)의 싱크 함수가 디랙 델타 함수를 정확하게 근사한다고 하면 격자 간격이 0으로 수렴할 때 디랙 델타 함수의 성질을 만족해야 한다. 그러나 식 (31)의 싱크 함수는 다음과 같이 디랙 델타 함수의 성질을 만족하지 않는다.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{x - x_s}{h}\right) \varphi(x) dx \neq \varphi(x_s) \quad (32)$$

따라서 유한차분법을 이용하여 디랙 델타 함수로 표현되는 송신원 항을 정확하게 구현하기 위해서는 싱크 함수를 격자 간격으로 나누어주어야 한다(Carcione *et al.*, 2002). 이론적으로는 격자 간격으로 진폭을 조절한 싱크 함수가 다음과 같이 디랙 델타 함수의 성질을 정확하게 만족한다.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h} \text{sinc}\left(\frac{x - x_s}{h}\right) \varphi(x) dx = \varphi(x_s) \quad (33)$$

그러므로 디랙 델타 함수는 다음과 같이 정의해야 한다.

$$\delta(m - m_s) = \frac{1}{h} \text{sinc}\left(\frac{x - x_s}{h}\right) \quad (34)$$

식 (34)를 이용한 모델링 결과의 일관성은 수치 예제를 통해 확인할 것이다.

유한요소법에서 점 송신원을 디랙 델타 함수로 표현할 경우는 유한차분법과 달리 매우 간단해진다. 식 (29)에서 1차원 문제로 가정하고 송신원 함수를 디랙 델타 함수로 치환하여 적분을 수행하면 다음과 같다.

$$F_j = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \delta(x - x_s) \phi_j dx = \phi_j(x_s) \quad (35)$$

여기서 x_{\min} 과 x_{\max} 는 모델링 영역의 시작점과 끝점 좌표이다.

디랙 델타 함수의 특성에 따라 적분값은 점 송신원 위치에서 기저함수의 값이 된다. 따라서 점 송신원 위치를 격자점에 위치시키면 송신원 값으로 1을 사용하면 된다. 이와 같이 유한 요소법에서는 격자 간격에 관계없이 동일한 진폭 값으로 점 송신원을 표현할 수 있다.

주파수영역 모델링

식 (1)의 파동방정식을 시간변수에 대해 푸리에 변환하면 다음과 같은 주파수 영역 파동방정식을 얻을 수 있다.

$$-\frac{\omega^2}{c^2}\tilde{u}(z,\omega) = \frac{\partial^2\tilde{u}(z,\omega)}{\partial z^2} + \tilde{f}(z,\omega) \quad (36)$$

여기서 ω 는 각주파수이고 $\tilde{u}(= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-i\omega t} dt)$ 는 주파수 영역 파동장, $\tilde{f}(= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt)$ 는 주파수 영역 송신원 함수이다. 주파수 영역에서 파동방정식은 헬름홀츠(Helmholtz) 방정식이므로 해의 존재와 유일성을 담보하기 위해서는 적절한 경계조건이 있어야 한다. 이론적으로 흡수 경계조건(absorbing boundary condition)이 주어진 헬름홀츠 방정식은 유일한 해를 갖는다는 것이 증명되어 있다(Douglas *et al.*, 1993; Douglas *et al.*, 1994). 그러나 일반적으로 안정적인 해를 얻기 위해서는 복소 각주파수(complex angular frequency)를 사용하여 주파수 영역 파동방정식을 풀게 되는데 이는 원래의 파동방정식의 해가 아닌 감쇠 파동방정식의 해를 구하는 것이 된다. 식 (36)에서 실수 각주파수(ω) 대신 감쇠계수(α)를 포함한 복소 각주파수($\omega - i\alpha$)를 사용하여 해를 구하는 것은 다음과 같은 감쇠 파동방정식의 해를 구하는 것과 같다(부록A 참조).

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial t^2} + \frac{2\alpha}{c^2}\frac{\partial\hat{u}}{\partial t} + \frac{\alpha^2}{c^2}\hat{u} = \frac{\partial^2\hat{u}}{\partial z^2} + \hat{f} \quad (37)$$

식 (37)의 감쇠 파동방정식은 식 (1)의 파동방정식과 다른 미분방정식이므로 식 (37)의 송신원 함수 \hat{f} 은 식 (1)의 송신원 함수 f 와 달라야 한다. 정확하게는 다음과 같은 조건을 만족해야 한다(부록A 참조).

$$\hat{f} = fe^{-\alpha t} \quad (38)$$

식 (38)을 만족하는 송신원 함수를 사용하여 식 (37)을 풀면 감쇠 파동장을 구할 수 있고 감쇠계수를 이용한 진폭 보정을 통해 식 (1)로부터 구한 파동장과 정확하게 일치하는 파동장을 구할 수 있다.

수치해의 일관성

본 연구에서는 수치해의 일관성을 확인하기 위하여 Marmousi 모형(Versteeg *et al.*, 1994)의 일부를 사용하였다. 해당 모형의 수평 거리는 4.6 km, 깊이는 3 km이다(Fig. 1). 모델링을 위해 사용한 송신 파형은 최대 주파수 9.375 hz를 갖

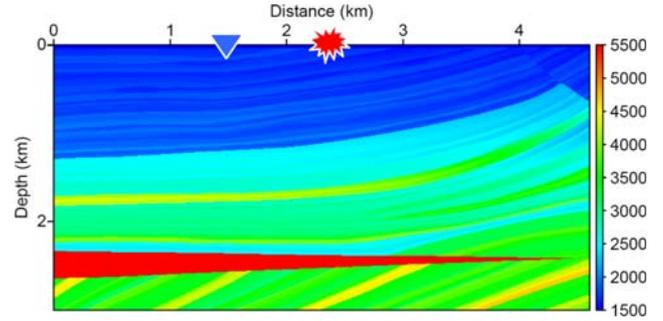


Fig. 1. An extracted velocity model from the Marmousi model. (Explosion: a source, triangle: a receiver)

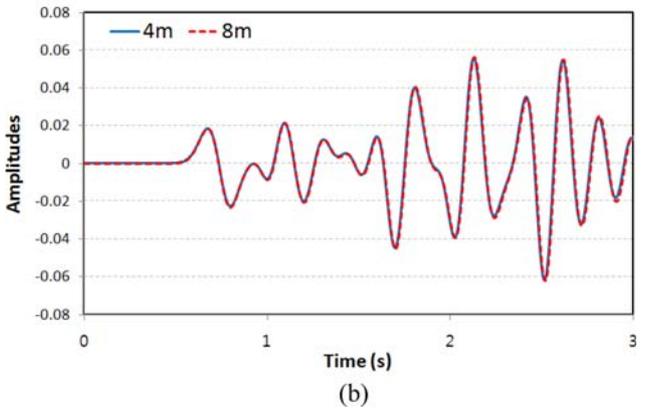
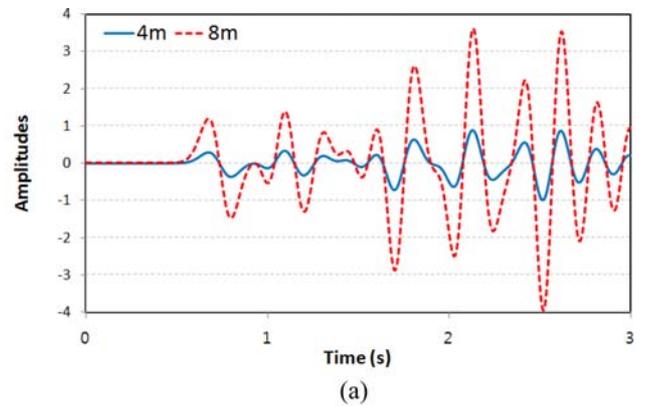


Fig. 2. Comparisons of modeled wavefields using 4 m and 8 m grid spacings (a) when the source function is not normalized and (b) normalized by the grid spacing.

는 1차 미분 가우스 함수이고 총 3초간 기록하였다.

격자 간격에 따른 모델링 결과의 일관성

유한차분법으로 모델링을 수행할 때 이산화된 디랙 델타 함수를 표현하려면 격자 간격을 고려하여 정확한 싱크 함수를 정의해야 한다. 격자 간격에 따른 모델링 결과를 비교하기 위하여 4 m 격자 간격과 8 m 격자 간격의 Marmousi 속도 모형을 이용하여 모델링을 수행하였다. 식 (31)과 같이 격자 간격을 고려하지 않은 디랙 델타 함수를 사용할 경우 진폭이 동일하지 않음을 확인할 수 있다(Fig. 2a). 반면에 식 (34)와 같이

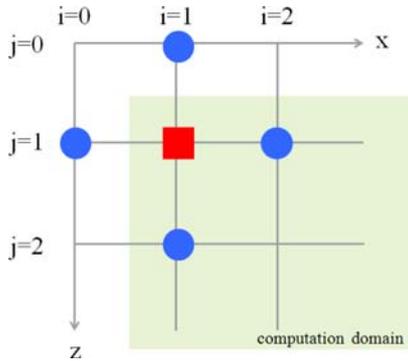


Fig. 3. A schematic illustration of the finite-difference stencil at the boundary of computational domain. (Square: current grid point, circles: neighboring grid points, shaded zone: computational domain)

정확한 디랙 델타 함수를 사용하여 모델링하면 다른 격자 간격으로 인해 발생하는 진폭 차이를 보정하여 동일한 트레이스를 얻을 수 있다(Fig. 2b).

유한차분법과 유한요소법의 일치

유한차분법과 유한요소법은 모델링 영역을 매개화하는 구조가 다르므로 속도 모델을 수학적으로 표현할 때 일관성 있는

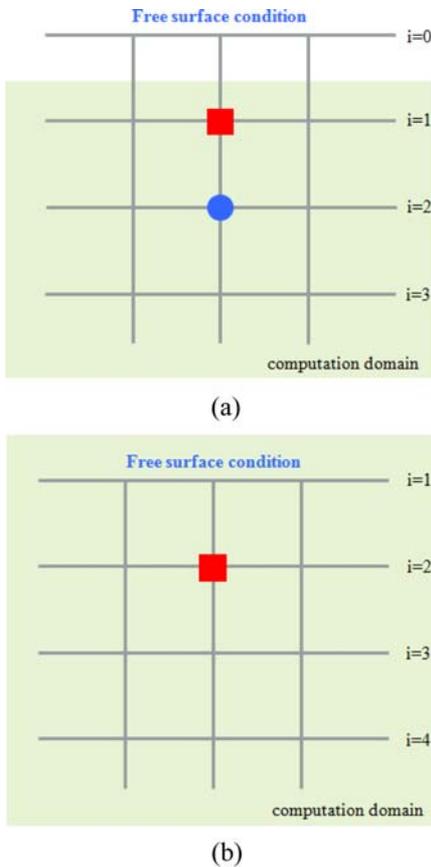


Fig. 4. The free surface and source location (a) on the finite-difference grid and (b) the finite-element mesh. (Square: correct source location, circle: wrong source location)

방법을 사용해야 한다. 특히 유한차분법과 유한요소법으로 계산된 파동장을 비교하기 위해서는 송신원 위치를 정확히 일치시켜야 한다. 유한차분법은 임의의 격자점에서 파동장을 구할 때 해당 격자점에 이웃한 격자점들에 대한 이전 시간대의 파동장을 필요로 한다(Fig. 3). 이러한 이유로 계산 영역 끝단의 격자점에서 파동장을 구할 때는 계산 영역 외부에 위치한 격자점의 파동장이 필요하게 된다. 특히 자유면 경계에서 파동장을 계산할 경우에는 끝단에서의 파동장이 경계조건으로 고정되기 때문에 끝단의 격자점은 계산 영역의 자유도에서 배제된다. 이와 달리 유한요소법에서는 자유면 경계에 해당하는 끝단 격자점이 첫 번째 요소에 속하는 격자점이므로 계산 영역의 자유도에 포함하여 구현하게 된다.

Fig. 4는 유한차분법(Fig. 4a)과 유한요소법(Fig. 4b)에서 자유면 하부의 송신원을 구현하는 구조를 개념적으로 보여준다. Fig. 4b에서 사각형으로 표시된 절점에 송신원을 위치시킨 유한요소법 모델링 결과와 동일한 결과를 얻기 위해서는 Fig. 4a에서 사각형으로 표시된 절점에 송신원을 위치시키고 유한차분법을 적용해야 한다. Fig. 4a에서 원으로 표시된 격자점 위치(i=2)에 송신원을 두고 모델링을 수행하면 두 트레이스 사이에 큰 진폭 차이가 발생함을 확인할 수 있다(Fig. 5a). 이러한 현상은 자유면으로부터 송신원 깊이의 차이가 존재하기 때문에 고스트(ghost)가 다른 시간 지연(delay)을 갖고 중첩되어 나타

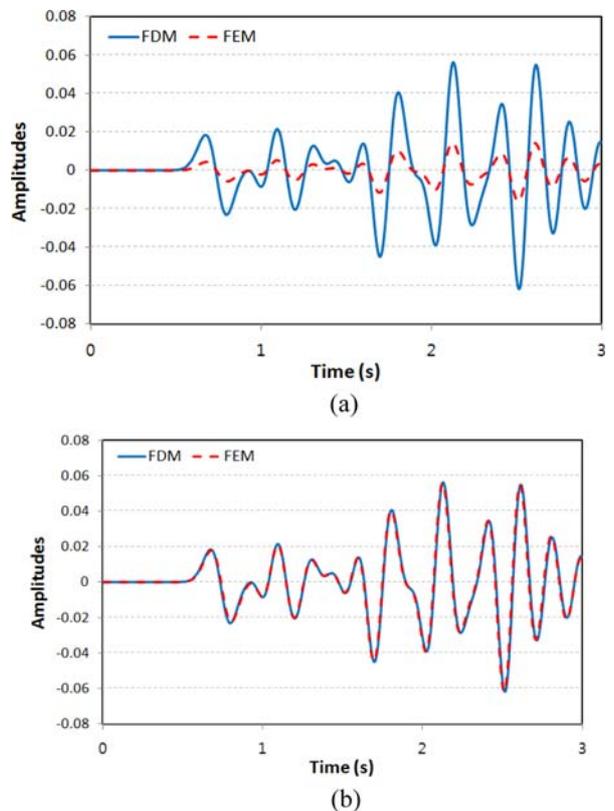


Fig. 5. Comparisons of the traces modeled by (a) mis-located sources and (b) consistent sources.

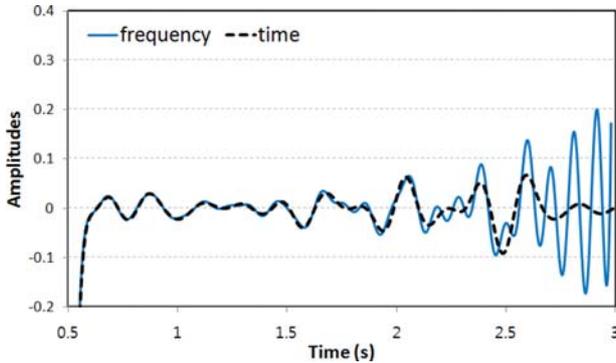


Fig. 6. A comparison between time-domain wavefield (dashed line) and frequency-domain wavefield (solid line) recorded at the source location.

나는 것이다. 자유면 경계조건을 고려하여 정확한 위치에 송신원을 주면 두 트레이스가 동일하게 나타남을 확인할 수 있다 (Fig. 5b).

시간 영역과 주파수 영역 모델링 비교

주파수 영역 유한차분법을 이용하여 계산된 트레이스 중 송신원 위치 또는 그 근처에서 기록된 트레이스는 시간 영역 유한차분법을 이용하여 계산된 트레이스와 일치하지 않는다(Fig. 6). 특히 후기 시간대에서 진폭이 큰 차이를 보이는데 이는 주파수 영역 모델링에서 원인을 찾을 수 있다. 상이한 결과가 나타나는 이유는 주파수 영역과 시간 영역에서 결정되는 시간 샘플링 간격(Δt)이 다르기 때문이다. 주파수 영역에서 샘플링 간격은 송신 파형을 생성하기 위해 사용되며 다음과 같이 샘플링 이론에 따라 결정된다.

$$\Delta t = \frac{1}{2f_{\max}} \tag{39}$$

여기서 f_{\max} 는 송신 파형의 스펙트럼이 갖는 최대 주파수이다.

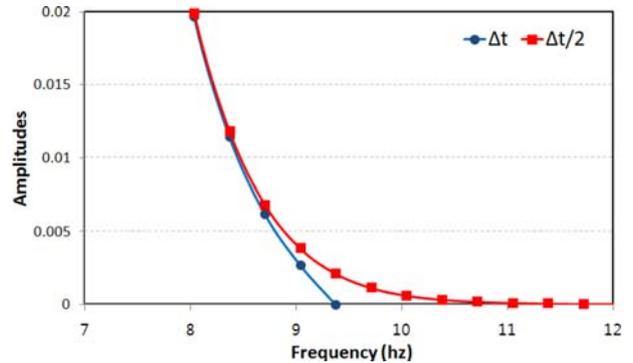


Fig. 7. The amplitude spectrum of source wavelet used for frequency-domain modeling. (Square: amplitude spectrum by dense sampling theorem, Circle: amplitude spectrum by traditional sampling theorem).

반면에 시간 영역에서 샘플링 간격은 식 (18)로 표현되는 안정성 분석을 통해 결정된다. 이렇게 주파수 영역과 시간영역에서 서로 상이한 샘플링 간격을 사용함으로써 얻어지는 송신 파형은 진폭 스펙트럼에서 차이가 발생한다. Fig. 7은 주파수 영역 모델링에서 사용하는 송신 파형의 스펙트럼을 식 (39)의 샘플링 간격을 사용하여 생성한 경우와 그보다 절반 크기의 샘플링 간격을 사용하여 생성한 경우에 대해 도시한 그래프이다. 식 (39)의 샘플링 간격을 통해 생성된 송신 파형은 높은 주파수 성분을 정확하게 표현하지 못하기 때문에 주파수 영역 모델링 결과의 왜곡을 일으킨다. 반면에 샘플링 이론에 의한 샘플링 간격보다 훨씬 더 작은 샘플링 간격으로 송신 파형을 생성하는 시간 영역 모델링 기법은 이러한 문제가 발생하지 않게 된다.

이러한 문제점을 해결하기 위해서는 주파수 영역 모델링 수행 시 송신파형 생성을 위한 샘플링 간격을 이론보다 작게 설정해줘야 한다. 그러나 시간 영역 모델링과 동일한 샘플링 간격을 이용하여 주파수 영역 모델링을 수행하면 계산해야 할 주파수의 개수가 현저하게 증가하므로 계산 시간이 불필요하

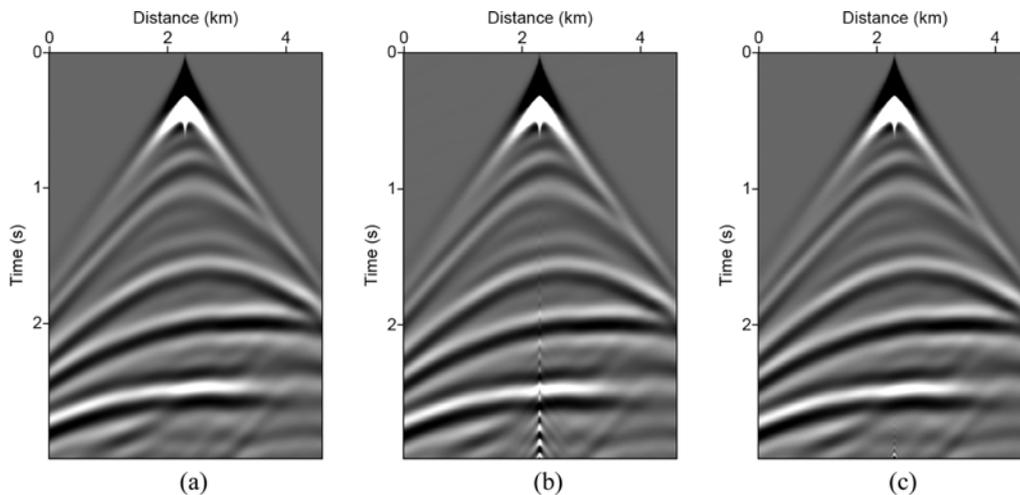


Fig. 8. Seismograms modeled by (a) time-domain modeling, (b) frequency-domain modeling with wrong wavelet spectrum, and (c) frequency-domain modeling with corrected wavelet spectrum.

게 증가한다. 따라서 계산 효율성을 위해 샘플링 이론으로 계산되는 샘플링 간격의 절반 크기를 이용하여 주파수 영역에서 모델링을 수행한 뒤 시간 영역 모델링 결과와 비교하였다(Fig. 8). 인공 경계면에서의 반사파 잡음을 최소화하기 위해 시간 영역 모델링 기법에는 Reynolds (1978)가 제안한 경계조건을 적용하였고 주파수 영역 모델링 기법에는 Clayton and Engquist (1980)의 45° 근사 경계조건을 사용하였다. 실제로는 더 정확한 비교를 위해 인공 경계면에서의 속도를 확장하여 반사파 잡음을 원천적으로 배제하였다. 샘플링 이론에 의한 시간 간격을 이용하여 주파수 영역 모델링을 수행한 경우 가까운 벌림거리에서 잡음이 강하게 나타나는 것을 확인할 수 있다(Fig. 8b). 절반 크기의 샘플링 간격을 사용하여 주파수 영역 모델링을 수행한 경우 가까운 벌림거리에서 나타나던 잡음이 현저하게 줄어든 것을 관찰할 수 있다. 자세한 비교를 위해 Fig. 8a와 8c의 모델링 결과에서 영(0) 벌림거리에 위치한 트레이스를 추출하여 Fig. 9에 도시하였다. Fig. 6에서와 달리 1.6초 이후부터 나타나던 불안정한 파동장들이 대부분 정확하게 계산되어 시간 영역에서 계산된 파동장과 동일하게 나타남을 확인할 수 있다. 3초 부근의 진폭 이상을 완벽하게 제거하기 위해서는 더 작은 샘플링 간격을 이용하여 송신 파형을 생성하고 그에 따라 모델링을 수행해야 한다.

이와 별도로 시간 영역과 주파수 영역 모델링 결과의 일관성을 얻기 위해서는 감쇠 파동방정식의 정확한 구현이 필요하다. 앞 절에서 언급했던 바와 같이 일반적으로 안정적인 파동방정식의 해를 얻기 위해서는 감쇠 계수를 적용하여 주파수 영역에서 모델링을 수행한 뒤 역 푸리에 변환을 이용하여 시간 영역으로 파동장을 변환한다. 이 결과를 시간 영역에서 계산된 트레이스와 비교하면 감쇠 효과로 인해 진폭이 작게 나타남을 확인할 수 있다(Fig. 10a). 감쇠된 진폭을 보상하기 위해 모델링에 사용한 감쇠계수를 이용하여 지수함수적으로 진폭을 조정하면 시간 영역 결과에 비해 약간 큰 진폭 값을 갖게 된다(Fig. 10b). 이러한 문제는 부정확한 감쇠 파동방정식

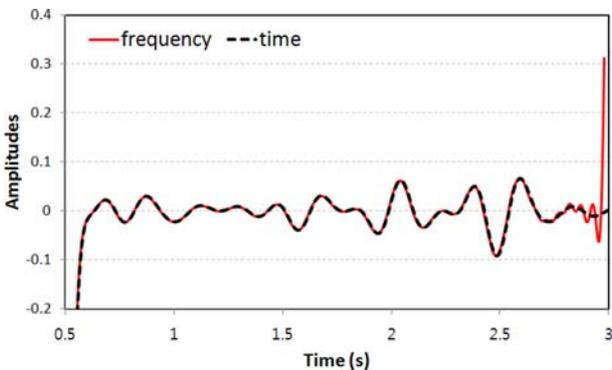


Fig. 9. A comparison between time-domain wavefield (dashed line) and frequency-domain wavefield (solid line) recorded at the source location when the spectrum of source wavelet is improved by increasing Nyquist frequency.

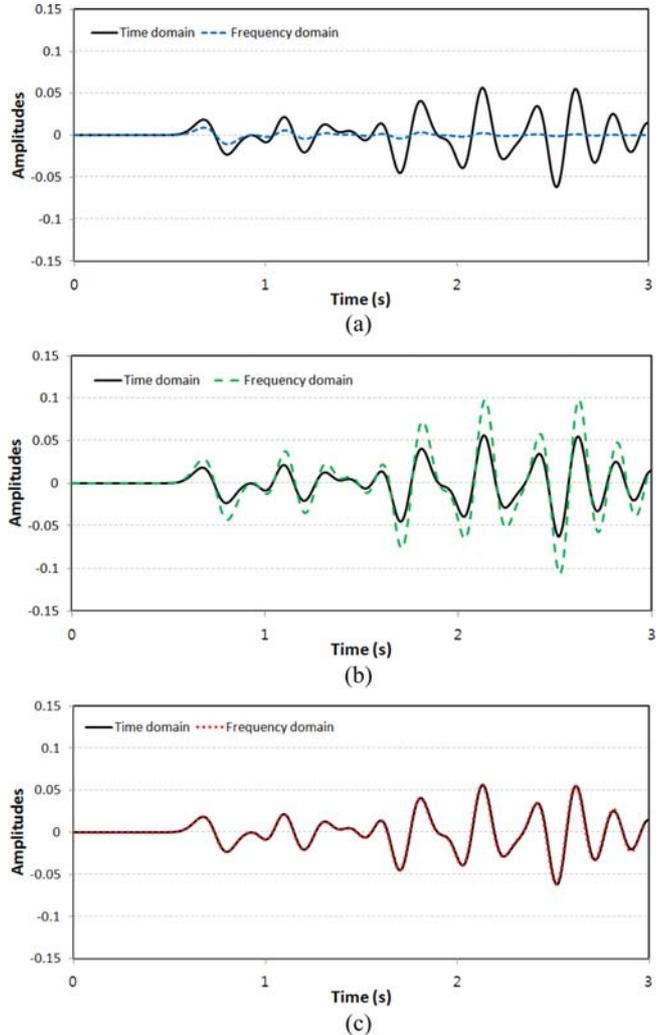


Fig. 10. Comparisons between time-domain and frequency-domain modeling: (a) damped wavefield without amplitude recovery, (b) damped wavefield with incorrect amplitude recovery, and (c) damped wavefield with correct amplitude recovery.

을 사용하여 발생하는 문제이다. 정확한 감쇠 파동방정식을 풀기 위해서는 식 (38)과 같이 감쇠된 송신 파형을 이용하여 모델링을 수행하고 진폭 보정을 해주어야 한다. 이러한 과정을 수행하면 주파수 영역 모델링 결과가 시간 영역 모델링 결과와 동일하게 나타난다(Fig. 10c).

결론

파동방정식의 해를 구하는 것은 탄성과 자료를 이해하고 역문제를 통해 지하구조나 물성을 유추하는데 가장 기본적인 서도 중요한 과정이다. 특히, 최근 많은 연구가 이루어지고 있는 전파형역산과 같은 기술은 파동의 일부만이 아닌 전체를 사용하기 때문에 정확한 파동방정식의 해가 필요하다. 본 논문에서 다룬 것처럼 잘 정립된 유한차분법이나 유한요소법이 이

용하여 수치해를 얻을 때에도 일반적으로 알려진 수렴성이나 수치적 안정성을 정확하게 분석할 필요가 있다. 또한 정확한 수치 해를 구하는 것은 다양한 수치적 방법 사이의 일관성을 유지하는 것과 동일하며, 이를 위해 각 수치 해법의 특성을 정확하게 파악하는 것이 필요하다. 파동방정식의 해를 정확하게 구하기 위해서는 디랙 델타 함수로 표현되는 공간 영역의 송신원 함수 구현과 시간 영역에서 정의되는 송신 파형의 스펙트럼 구현이 엄밀하게 정의되어야 한다. 파동방정식의 수치해를 안정적으로 구하기 위해 사용되는 감쇠 파동방정식도 시간 영역과 주파수 영역 수치해 사이의 차이를 발생시키는 주요 원인이므로 정확한 송신원과 진폭 보상을 적용해야 한다. 수치예제를 통해 확인한 것처럼 수치적 기법의 일관성과 안정성을 고려하고 송신원을 정확하게 구현하면 정확한 파동방정식의 해를 구할 수 있다. 이러한 과정을 거쳐 개발된 모델링 또는 역산 알고리즘은 수치해의 오차에서 발생하는 시행착오나 잘못된 역산 결과를 그대로 믿게 되는 중대한 오류에서 어느정도 자유로울 수 있을 것으로 기대한다.

감사의 글

본 연구는 2015년도 산업통상자원부의 재원으로 한국에너지기술연구원(KETEP)의 지원을 받아 수행한 연구 과제입니다(No. 20142510101810). 또한 한국지질자원연구원 주요사업인 ‘고성능 석유해저 탄성파탐사 자료처리 및 다성분 탐사기술 개발’ 과제(16-3313)의 일환으로 수행되었습니다.

References

- Becker, E. B., Carey, G. F., and Oden, J. T., 1981, *Finite Elements, An Introduction: Volume I*, PRENTICE-HALL, Inc.
- Carcione, J. M., Herman, G. C., and Ten Kroode, A. P. E., 2002, Seismic modeling, *Geophysics*, **67**, 1304-1325.
- Clayton, R. W., and Engquist, B., 1980, Absorbing boundary conditions for wave-equation migration, *Geophysics*, **45**, 895-904.
- Douglas, Jr. J., Santos, J. E., Sheen, D., and Bennethum, L. S., 1993, Frequency domain treatment of one-dimensional scalar waves, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **3**, 171-194.
- Douglas, Jr. J., Sheen, D., and Santos, J. E., 1994, Approximation of scalar waves in the space-frequency domain, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **4**, 509-531.
- Hicks, G. J., 2002, Arbitrary source and receiver positioning in finite-difference schemes using Kaiser windowed sinc functions, *Geophysics*, **67**, 156-165.
- Jeong, W., Pyun, S., Son, W., and Min, D. J., 2013, A numerical study of simultaneous-source full waveform inversion with 11-norm. *Geophysical Journal International*, **194**, 1727-1737.
- Reynolds, A. C., 1978, Boundary conditions for the numerical

solution of wave propagation problems, *Geophysics*, **43**, 1099-1110.

Robertsson, J. O., Bednar, B., Blanch, J., Kostov, C., and van Manen, D. J., 2007, Introduction to the supplement on seismic modeling with applications to acquisition, processing, and interpretation. *Geophysics*, **72**, SM1-SM4.

Strikwerda, J. C., 2004, *Finite difference schemes and partial differential equations*, SIAM.

Versteeg, R., 1994, The Marmousi experience: Velocity model determination on a synthetic complex data set, *The Leading Edge*, **13**, 927-936.

Virieux, J., and Operto, S., 2009, An overview of full-waveform inversion in exploration geophysics, *Geophysics*, **74**, WCC1-WCC26.

부록 A

식 (36)의 파동방정식에서 실수 각주파수(ω) 대신 복수 각주파수($\omega - i\alpha$)를 대입하면 다음과 같다.

$$-\frac{(\omega - i\alpha)^2}{c^2} \tilde{u} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} + \tilde{f} \quad (\text{A-1})$$

식 (A-1)을 전개하여 정리하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$-\frac{\omega^2}{c^2} \tilde{u} + \frac{2i\omega\alpha}{c^2} \tilde{u} + \frac{\alpha^2}{c^2} \tilde{u} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} + \tilde{f} \quad (\text{A-2})$$

다시 역 푸리에 변환하면 공간과 시간에 대한 식으로 정리할 수 있다.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} + \frac{2\alpha}{c^2} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \frac{\alpha^2}{c^2} \hat{u} = \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial z^2} + \hat{f} \quad (\text{A-3})$$

식 (A-3)의 \hat{u} 는 감쇠 파동장이므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{u} = ue^{-\alpha t} \quad (\text{A-4})$$

식 (A-4)를 u 에 대해 정리하고 식 (1)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\hat{u}e^{\alpha t}) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\hat{u}e^{\alpha t}) + f \quad (\text{A-5})$$

식 (A-5)를 전개하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} + \frac{2\alpha}{c^2} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \frac{\alpha^2}{c^2} \hat{u} = \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial z^2} + fe^{-\alpha t} \quad (\text{A-6})$$

따라서 식 (A-3)과 식 (A-6)을 비교하면 감쇠 파동장에서 사용해야 하는 정확한 송신원을 유도할 수 있다.

$$\hat{f} = fe^{-\alpha t} \quad (\text{A-7})$$