

가상영상 PIV기반 압력장 계산법 평가

이창제* · 조경래**† · 김의간** · 김동혁** · 도덕희**†

Evaluations on a Pressure-Field Calculation Method using PIV Synthetic Image

Chang Je Lee, Gyong Rae Cho, Uei Kan Kim, Dong Hyuk Kim, Deog Hee Doh

Abstract In this study, a Masked Omni-Directional Integration(MODI) method for pressure calculation is proposed using the Particle Image Velocimetry (PIV) data. To obtain the velocity field, the Affine PIV method was adopted. Synthetic images were generated for a solid body rotation. Calculation on the pressure was based on the Navier-Stokes equation. The results obtained by the MODI were compared with those obtained by theoretical pressure and by the Omni-Directional Integration(ODI) method. It was shown that the minimum error by the proposed MODI method was attained when the mask size was 1.

Key Words : MODI(마스킹기반 전방향 적분), PIV(입자영상유속계), synthetic images(가상영상), solid body rotation(강체회전)

1. 연구 배경

유동장에 있어 압력을 측정하는 방법에는 크게 2가지 방법이 있다. 첫 번째로 압력 프로브(Probe) 또는 압력센서를 이용하여 국부적으로 압력을 측정하는 방법이 있으나 측정 영역이 국소적이고 공간적인 압력을 측정하지는 못하는 단점이 있다. 두 번째로는 비접촉식 속도측정법인 PIV(Particle Image Velocimetry)법을 이용하여 공간의 속도를 측정하고 있다. 일반적으로 측정된 속도를 바탕으로 Navier-Stokes 방정식을 사용하여 압력을 계산하게 된다. 압력을 구하기 위해서는 일반적으로 격자를 설정하여 한 점에서 압력을 구하게 되는데,

이는 적분이 필요하며, 적분하는 방법에 따라 선적분법⁽¹⁾(Line Integration Method)과 전 방향 적분법⁽²⁾(Omni-Directional Integration, ODI)이 있다. 선적분법의 경우 방향성이 존재하며, 이런 특성으로 인해 유동 방향에 따라 오차가 커지게 된다. 전방향 적분법은 모든 방향에서 적분경로가 형성되어 방향성에 따른 오차를 줄여 정확도를 높였다. 하지만 높아진 정확도에도 불구하고 모든 방향에서 적분경로가 형성되지 때문에 계산시간이 많아진다는 단점이 존재한다. 이러한 단점들을 보완 개선한 압력장 계산 알고리즘이 필요로 하게 되었다. 본 연구에서는 어파인변환(Affine Transformation)을 이용한 PIV로 유동장의 속도를 측정하고 ODI 알고리즘을 발전시킨 Masked Omni-Directional Integration(MODI)알고리즘을 Solid Body를 회전시켰을 때의 가상 영상에 적용하여 평가하는 것을 연구의 목적으로 삼고 있다.

**† 한국해양대학교 기계공학부

E-mail : doh@kmou.ac.kr

* KIST

2. 어파인변환 기반 PIV

어파인변환(Affine Transform)은 회전, 전단, 축소, 확장 등을 포함하는 선형변형이다⁽³⁾. 유체유동은 대표적으로 비선형 특성을 지니나, 매우 짧은 순간의 경우에서의 유체변형을 고려하면, 어파인변환 특성을 유체유동에 적용가능하다. 본 연구에서는 Doh 등⁽³⁾이 제안한 어파인변환 기반의 PIV법을 적용하여 속도장을 얻고자 하였다. 이하는 속도장을 얻기 위하여 적용된 어파인변환 기반의 PIV로 속도장을 얻는 과정을 설명한다. PIV계산상, 실험영상으로부터 얻어지게 되는 속도는 테일러 전개 식으로 나타낼 수 있는데, 이차항 이상을 무시하고, (x_0, y_0) 을 중심으로 주변의 상관영역을 만들면 u, v 속도 성분은 아래 식 (1)으로 표시된다.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u / \partial x & \partial u / \partial y \\ \partial v / \partial x & \partial v / \partial y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

식(1)의 우변은 변형과 이동에 대한 항이며, 이동항은 상관영역의 속도벡터 또는 총 이동량을 나타낸다. 또한, 어파인 변환은 식(2)로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ y &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \end{aligned} \quad (2)$$

이동항과 변형항을 분리하면 식(3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} x_s - x_0 \\ y_s - y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_f - x_0 \\ y_f - y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} \quad (3)$$

여기서, x_f, y_f 는 첫 번째 영상, x_s, y_s 는 두 번째 영상에서의 입자중심의 좌표이며, x_o, y_o 는 PIV 계산에서와 같이 격자 좌표를 나타낸다. 두 영상의 시간차를 Δt 라고 하면, 식(3)은 식(4)로 표시될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

여기서, $u = \frac{x_s - x_f}{\Delta t}$, $v = \frac{y_s - y_f}{\Delta t}$, $u_0 = \frac{a_{13}}{\Delta t}$, $v_0 = \frac{a_{23}}{\Delta t}$ 이다.

식 (3)과 식(4)를 이용하여 다음과 같은 식(5)로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \partial u / \partial x & \partial u / \partial y \\ \partial v / \partial x & \partial v / \partial y \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

구하고자하는 속도는 u_0, v_0 인데 이를 구하기 위해서는 $a_{11} \sim a_{23}$ 까지의 계수를 구하기 위해 확률일치 PIV법⁽⁴⁾으로 초기 속도벡터를 시작으로 모든 격자점에서의 변형이 최소화될 때까지 반복 계산을 수행하여 최종속도벡터를 구하였다. 이때, 정해진 아주 짧은 시간안의 유체의 유동을 선형으로 가정하면, 주어진 격자점의 2차원면적은 위의 식을 만족하게 되므로 3개 이상의 입자 쌍의 위치 정보를 이용하여 최소자승법으로 미지수를 구하였다.

3. 압력장 계산 알고리즘

압력장 계산에는 아래 식 (6)과 같은 Poisson 방정식을 사용하였고, Navier-Stokes 방정식으로부터 얻어지는 식(7)을 사용하였다.

$$\nabla^2 P = -2 \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \quad (6)$$

$$\nabla P = -\rho \left(\frac{D\vec{U}}{Dt} - \nu \nabla^2 \vec{U} \right) \quad (7)$$

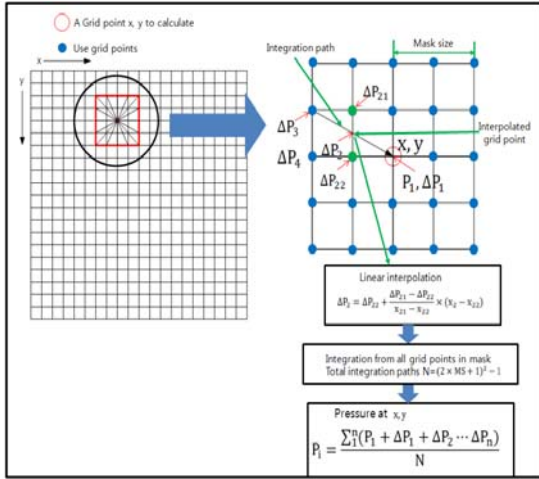


Figure 1. Schematic of Masked Omni-Directional Integration (when the mask size(MS) is 2)

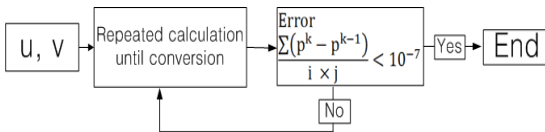


Figure 2. Procedure of pressure calculations

본 연구에서는 ODI알고리즘⁽²⁾을 발전시킨 형태의 계산알고리즘인 MODI (Masked Omni-Directional Integration) 알고리즘을 제안하고자 하였다. 이 알고리즘은 ODI알고리즘의 단점인 계산 영역의 모든 방향에 대하여 적분함으로 인한 장시간의 계산이 필요한 반면, MODI는 압력계산에 있어서 특정영역 내에서만 계산이 수행되므로 적분 경로의 수가 줄어든다. 즉, 소정의 크기인 ($n \times m$)의 마스크를 사용하여 제한된 영역 내에서만 적분 경로가 생성된다. Fig. 1에 한 점에 OMDI의 계산방법을 간략히 나타낸다. 한 점에서의 적분경로의 수는 $(2 \times MS + 1)^2 - 1$ 로 결정이 된다. 예를 들어, 마스크 사이즈(Mask Size, MS)가 5일 때는 120개의 적분 경로가 생성된다. Fig. 2에 압력에 대한 계산 과정을 나타낸다. 식 (8)은 한 점에서 계산되는 식을 나타내었다.

$$P_i = \frac{\sum_1^n (P_1 + \Delta P_1 + \Delta P_2 \dots + \Delta P_n)}{N} \quad (8)$$

여기서, P_i 는 다음에 계산에 이용되는 압력, n 은 1개의 적분경로에 있는 격자점의 개수, ΔP 는 격자에서 계산되어진 압력을 나타낸다.

계산과정은 다음과 같이 진행된다. Fig. 1은 마스크크기(MS, mask size)가 2일 때 한 점에서 압력이 계산되는 과정이다. MS가 2라는 것은 계산점으로부터 좌우, 상하방향으로 2개씩의 격자점까지 계산영역을 설정함을 의미한다. 즉, 그림에서 빨간색 경계가 결정된 MS이다. 오른쪽 그림이 이 영역을 확대한 것인데, 마스크 중심으로 가는 화살표는 한 점에서 사용되는 적분 경로를 나타내고 있다. MS 2일 때는 24개의 격자점에서 중심으로 가는 경로가 생성이 된다. 수렴 조건으로는 이전의 계산된 모든 격자점과 현재의 계산된 모든 격자점의 차이의 평균이 10^{-7} 보다 작을 때 까지 반복 계산하게 된다. 적분 경로가 격자점이 아닌 곳을 지날 때는 주위의 값을 이용하여, 아래 식(9)을 기반으로 선형 보간을 하여 ΔP 를 계산하게 된다.

$$\Delta P_2 = \Delta P_{22} + \frac{\Delta P_{32} - \Delta P_{22}}{x_{21} - x_{22}} \times (x_2 - x_{22}) \quad (9)$$

이러한 방법으로 총 24개의 경로에서 계산되어진 값의 평균을 최종적으로 구하고자 하는 압력으로 하였다.

4. 성능 평가

앞서 설명한 압력 알고리즘의 성능 평가를 위하여 본 연구에서는 강한 회전성을 보이며 연속성과 Navier-Stokes 방정식을 만족하는 Solid Body Rotation(SBR)을 사용하였다. 아래 식 (10)은 SBR을 나타내는 이론 식에 해당되는데 이 식을 기반으로 가상영상을 생성하였다. 가상영상 생성법은 Doh 등⁽⁵⁾의 방법을 적용하였다.

$$u = -Mx, v = My \quad (10)$$

여기서, M 은 이동량, x, y 는 좌표를 의미한다. 가상영상 입자 생성은 식(11)을 사용하였다.

$$I(X) = I_0 \exp\left(-\frac{X - X_c}{2\sigma^2}\right) \quad (11)$$

여기서, I_0 는 최대 입자 밝기, X_c 는 입자의 무게중심, σ 는 표준편차를 의미한다. SBR의 영상크기는 512x512 pixel로 총 200장을 생성하였다. Fig. 3는 생성된 SBR에 대한 가상영상이며, Fig. 4는 어파인변환 기반의 PIV법으로 얻어낸 평균 속도벡터이다.

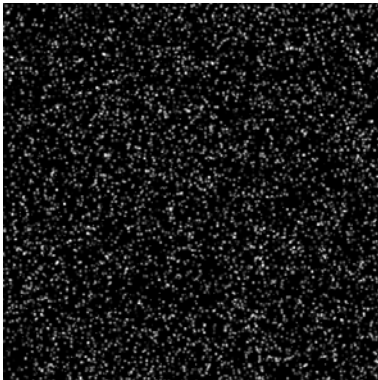


Figure 3. Generated synthetic image of solid body rotation

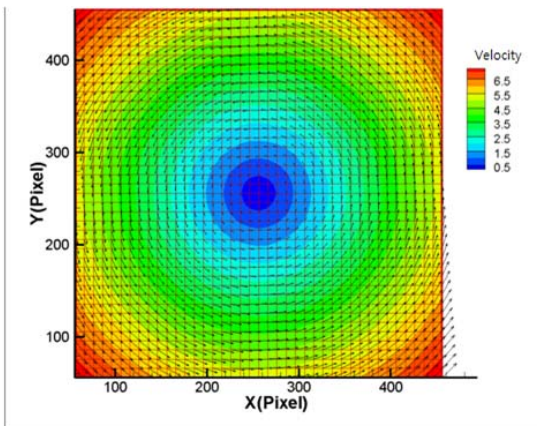


Figure 4. Mean velocity vector field

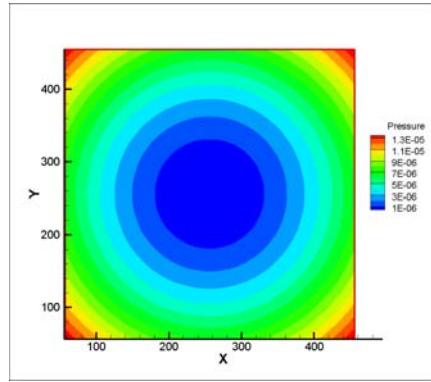


Figure 5. Theory mean pressure field

Fig. 5는 SBR에 대한 이론적 압력장을 나타내는데, 이론적 압력값은 아래 식 식(12)로 계산될 수 있다.

$$p = \frac{\rho}{2} F^2(t)(x^2 + y^2) + C \quad (12)$$

MODI의 성능을 평가하기 위해 MS를 1~40까지 변화시켜 압력을 계산하였고, 이를 ODI에 의한 결과와 이론 압력 결과와 비교하였다. Fig. 6은 MODI 알고리즘으로 구한, MS가 1일 때의 압력장을 나타내고, Fig. 7은 ODI알고리즘으로 구한 압력장을 나타낸다.

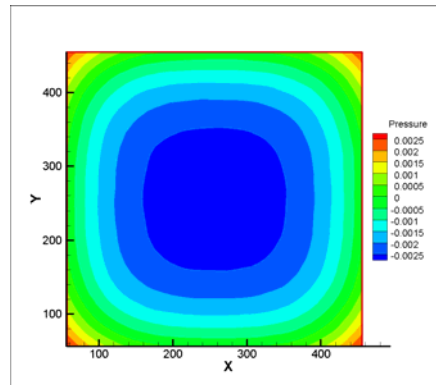


Figure 6. Mean pressure field using MS=1

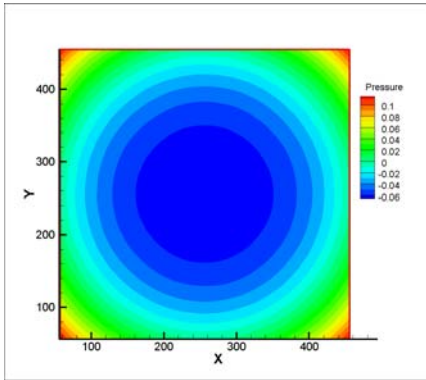


Figure 7. Mean pressure field using ODI

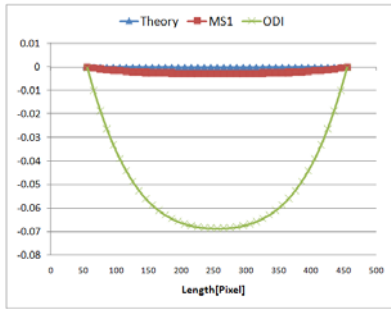


Figure 8. Comparison of Theory and MS 1 and ODI

Fig. 8은 Fig. 6과 Fig. 7의 중심선상의 압력 프로파일을 나타낸다. 그림 전체를 보면 ODI알고리즘에 의하여 구한 압력장 패턴이 이론 압력장 패턴과 유사하게 보이는 관계로, ODI알고리즘이 성능이 우수한 것처럼 보이나, 실제 값을 보면 ODI알고리즘에 의한 압력값이 MODI알고리즘의 MS=1의 압력값에 비하여 매우 큼을 알 수 있다. 이는 외곽의 높은 압력값의 영향을 받아 전체적으로 높은 압력이 계산된 것에 기인한다. OMDI알고리즘의 MS=1의 경우에는 이러한 영향을 최소화하기 때문에 압력값이 이론값과 가깝게 나타났다고 볼 수 있다. 한편, MODI의 모서리 부분이 이론값과 ODI와 모양이 다른 것을 알 수 있는데, 이것은 마스크 모양에 따른 영향으로 보인다. Fig. 9는 회전체의 면적을 MS의 면적으로 나눈 값으로 MS크기에 따른 이론 압력값과 차이를 나타내었다. MS가 1일 때 다른 크기보다 오차가 작게 나타났다. 이는

MS가 1일 때가 최적임을 시사한다. 한편, 그림에서 마스크 크기면적과 와의 크기 면적비(MS Area/Vortex Area) 값이 0.673을 기점으로 오차가 더 이상 커지지 않고 포화되는 것을 알 수 있는데, 이는 와의 마스크의 크기가 와의 크기보다 최소한 67.3%이내 이어야 함을 시사한다고 볼 수 있다. 이보다 크면 항상 존재하는 바이어스(bias) 오차가 발생하게 됨을 시사한다.

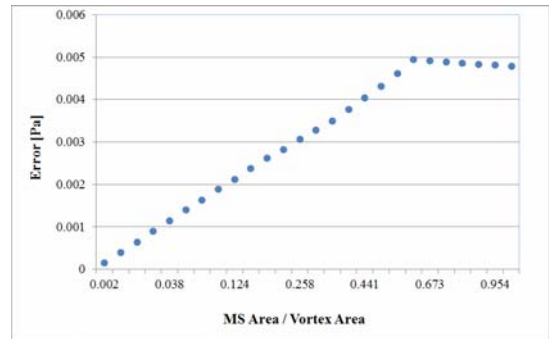


Figure 9. Deviations for the ratio of the mask size and rotation size

5. 맺음말

PIV에 의하여 얻어진 속도장을 이용하여 압력장을 계산할 수 있는 Masked Omni-Directional Integration 알고리즘을 구현하는 과정에서 다음과 같이 요약될 수 있다.

Solid Body Rotation(SBR)에 대한 OMDI알고리즘은 마스크크기(mask size, MS)가 1일 때 ODI알고리즘보다 이론값기준으로 오차가 가장 적음이 확인되었다.

OMDI알고리즘에서 마스크(mask)의 형상이 사각(square)인 관계로, 이 형상에 의한 압력장의 패턴이 다소 달라짐을 확인할 수 있었는데, 실제로 영향을 미치는 값은 매우 작다.

후 기

본 연구는 한국연구재단 기초연구지원사업(지역대우수과학자, No. 2014R1A1A4A01005191), 지

역혁신인력양성사업(No.2015H1C1A1035890), 중
 견핵심사업(No.2015R1A2A2A01006803)의 연구비
 로 수행되었음.

REFERENCE

- 1) Auteri, F., Carini M., Zagaglia, D., Montagnani, D., Gibertini, G., Merz, C.B. and Zanotti, A., 2015, "A novel approach for reconstructing pressure from PIV velocity measurements," Experiments in Fluids, Vol. 56, No.2, pp.1-22.
- 2) Liu, X. and Katz, J., 2006, "Instantaneous pressure and material acceleration measurements using a four-exposure PIV system," Experiments in Fluids, Vol. 41, pp.227~240.
- 3) Doh, D.H., Cho, G.R. and Lee, J. M. 2011, "Hybrid Particle Image Velocimetry based on Affine Transformation." KSME(B), Vol. 35, No.6, pp. 603~608.
- 4) Baek, S. J. and Lee, S. J., 1995, "Development of a new 2-Frame Particle Tracking Algorithm using Match Probability," Trans. of the KSME(B), Vol. 19, No. 7, pp.1741~1748.
- 5) Doh, D. H. and Hwang, T. G., 2004, "Performance test on 2-dimensional PIV and 3-dimensional PIV using standard images, KSME(B), Vol. 28(11), pp. 1315-1321.