한국정밀공학회지 제 33 권 제 9 호 pp. 745-751 September 2016 / 745
J. Korean Soc. Precis. Eng., Vol. 33, No. 9, pp. 745-751 http://dx.doi.org/10.7736/KSPE.2016.33.9.745
ISSN 1225-9071(Print), ISSN 2287-8769(Online)

자유곡면의 가감속 제어에 관한 연구

A Study on the Acceleration and Deceleration Control of Free-Form Surfaces

백대균 [1], 양승한 [2,✉]
Dae Kyun Baek[1] and Seung-Han Yang[2,✉]

1 경북대학교 기계연구소 (Institute of Mechanical Engineering Technology, Kyungpook National Universtiy)
2 경북대학교 기계공학부 (School of Mechanical Engineering, Kyungpook National Universtiy)
✉ Corresponding author: syang@knu.ac.kr, Tel: +82-53-950-6569

Manuscript received: 2015.10.26. / Revised: 2016.4.18. / Accepted: 2016.5.31.

This paper presents the acceleration and deceleration control of free-form surfaces. A rapid variation of acceleration (or Deceleration) drives the system into a machine shock, resulting in the inaccuracy of the path control of the NURBS curve. The pattern of acceleration control can be established using the curvature of the NURBS curve. The curvature can be easily calculated from the first and second derivative of the NURBS curve used in Taylor's expansion for NURBS interpolation. However, the derivatives are not used in the recursive method for NURBS interpolation. Hence, we attempted the difference-derivatives for calculating the NURBS curvature. Both, Taylor's expansion and the recursive method, are used jointly for controlling the acceleration in the same interpolation algorithm.

KEYWORDS: Free-Form surface (자유곡면), NURBS (넙스), Taylor's expansion (테일러 전개), Recursive method (재귀적 방법)

1. 서론

현재 많은 자동차, 항공 및 기계부품의 3차원 곡면은 자유곡면 (Free-Form Surfaces)으로 이루어져 있다. NURBS (None-Uniform Rational B-Spline Curve)[1]가 자유곡면 모델링에 가장 많이 사용되고 있다. CAD에서 3차원 모델링은 제작단계에서 공작기계에 의한 곡면가공 및 로봇에 의한 제어가 이루어진다. 이제까지 이러한 자유곡면의 제어를 위해서 CAM에서 곡선을 작은 선분으로 나누어 CNC시스템에서 직선보간으로 제어를 수행하고 있다. 선형화된 선분을 CAM에서 CNC컨트롤러로 전송하게 되면 여러 가지 단점이 발생하게 된다. 전송중 데이터 손실을 가져올 수 있고, 너무 방대한 데이터로 CNC시스템에 전송시간이 많이 걸리고 CNC시스템의 메모리에 모두 저장이 불가능할 수도 있다. 선형화된 많은 데이터를 전송하는 문제와 함께 발생하는 다른 문제는 곡선을 직선으로 분할하게 되므로 정밀도가 저하되고, 또한 자유곡선을 직선보간으로 제어하게 되면 제어정밀도가 저하된다. 최

근의 생산현장은 고정밀도의 부품을 제작해야 하는 요구가 나날이 증가하고 있어 이러한 기존의 자유곡면 제어방법은 새로운 방법에 대한 필요성을 증가시켜오고 있다.

NURBS 보간은 목적의 길이로 곡선을 분할하기 위해 NURBS 방정식에서 매개변수 증분치 Δu_j 를 적절히 찾아서 보간하는 것이다. NURBS 보간법은 주로 Taylor 전개를 이용하여 많이 연구하고 있다.[2] 1차[3,4] 또는 2차 Tayor전개[5-7]를 이용하여 매개변수의 증분치 Δu_j 를 찾는다. 1차 Taylor 전개는 계산속도는 빠르나 오차가 많이 발생하여 2차 Taylor 전개를 이용한 연구가 주류를 이루고 있다. 그러나 Taylor 전개는 여전히 큰 절단오차 (Truncation Error)를 가지고 있어 최근에는 Taylor 전개를 이용하지 않는 방법에 대한 연구가 진행되고 있다.

그 중에서도 재귀적 방식[8]은 계산속도와 정밀도가 우수하다. 현재 경로제어의 정밀도를 올리기 위해 급격한 가속과 감속을 피하는 연구가 많이 수행되고 있다. NURBS 곡선의 경로제어도 이러한 연구가 많이 수행되고 있다. 본 연구에서는 재귀적 방법에서 NURBS 곡선의 곡률을 차분-미분방정식 (Difference-Differential Equation)으로 구해 곡률을 구하고 급격한 가감속을 피해 정밀한 경로 제어를 하는 방법에 대해 살펴보고, 또한 재귀적 방법과 Taylor 전개의 장점을 이용한 하이브리드 방식에서 NURBS 곡선의 곡률을 구하고 가감속을 피해 정밀한 제어를 하는 방법에 대해 고찰하고자 한다. 제안된 방법에 대해 시뮬레이션을 통해 검증하고자 한다.

2. NURBS 보간기

2.1 NURBS 방정식

NURBS 곡선은 다음과 같이 표시된다.[1]

$$\mathbf{P}(u) = \frac{\sum_{i=0}^{n} N_{i,k}(u) w_i \mathbf{B}_i}{\sum_{i=0}^{n} N_{i,k}(u) w_i} \tag{1}$$

여기서 $N_{i,k}(u)$는 기저함수로서 다음과 같이 정의된다.

$$N_{i,1}(u) = \begin{cases} 1 & u_i \le u \le u_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2}$$

그리고

$$N_{i,k}(u) = \frac{(u-u_i)}{(u_{i+k-1}-u_i)} N_{i,k-1}(u) + \frac{(u_{i+1}-u)}{(u_{i+k}-u_{i+1})} N_{i+1,k-1}(u) \tag{3}$$

여기서 $[u_i, \ldots, u_{i+k}]$는 절점 벡터이고, u_i는 절점이다. P(u)는 임의의 값 u에서 위치벡터, $B_i(u)$는 조정점 벡터이다. 3차원의 경우 $B_i=\{X_i, Y_i, Z_i\}^T$ 이고, 변수 n은 조정점의 수보다 1이 적고, w_i 는 가중치이다. 기저함수 식(2)와 식(3)은 재귀적 성질을 가지고 있고, 이러한 재귀적 성질을 이용하여 재귀적 NURBS 보간법이 개발되었다.

2.2 Taylor 전개를 이용한 NURBS 보간기

NURBS 보간은 다음과 같이 매개변수 증분치 Δu_j 를 적절히 찾는 것이다.

$$u_{j+1} = u_j + \Delta u_j \tag{4}$$

여기서 u_j는 현재 매개변수이고, u_{j+1}는 갱신된 매개변수이다. 곡선의 보간점들은 새로운 매개변수 u_{j+1}를 함수에 대입하여 구할 수 있다. 1차 Taylor 전개를 이용한 보간법[3,4]은 다음과 같다.

$$u_{j+1} = u_j + \frac{V_j \Delta T}{\left\| \frac{dP(u)}{du} \right\|_{u=u_j}} \tag{5}$$

여기서 ΔT 는 샘플링 시간 (s)이고, V_j 는 순간속도이다. 2차 Taylor 전개를 이용하여 새로운 매개변수 u_{j+1}를 다음과 같이 구할 수 있다.[5,6]

$$u_{j+1} = u_j + \frac{V_j \Delta T}{\left\| \frac{dP(u)}{du} \right\|_{u=u_j}} + \frac{\Delta T^2}{2} \left(\frac{\left. \frac{dV_j}{dt} \right|_{t=t_j}}{\left\| \frac{dP(u)}{du} \right\|_{u=u_j}} - \frac{V_j^2 \left. \left(\frac{dP(u)}{du} \cdot \frac{d^2P(u)}{du^2} \right) \right|_{u=u_j}}{\left\| \frac{dP(u)}{du} \right\|^4_{u=u_j}} \right) \tag{6}$$

2.3 재귀적 방법에 의한 NURBS 보간기

재귀적 방법을 이용한 보간기[8]는 NURBS 곡선의 재귀적 성질을 이용하여 구한다. 앞선 증분치와 구해진 선분길이, 그리고 새로운 증분치와 목적의 선분길이를 비례식으로 표시하고, 새로운 증

분치를 계속 갱신하여 구한다. 재귀적 방법의 일반화된 식은 다음과 같다.

$$\Delta u_{j_k} = \frac{d \cdot \Delta u_{j_{(k-1)}}}{s_{j_{(k-1)}}}, \quad j \geq 0, \quad k = 2 \cdots m \tag{7}$$

여기서 $s_{j_{(k-1)}} = \left|\mathbf{P}(u_{j_{(k-1)}}) - \mathbf{P}(u_j)\right|$ 이고, $u_{j_{(k-1)}} = u_j + \Delta u_{j_{(k-1)}}$ 이다. 재귀적 방법은 항상 앞선 선분길이와 앞선 증분치가 필요하므로 맨 처음 증분치를 구할 수 없다. 따라서 맨 처음 증분치는 Taylor 1차 전개를 이용하거나 NURBS 곡선의 정보를 이용해서 구하면 편리하다.

2.4 Taylor 전개와 재귀적 방법에 의한 NURBS 보간기

재귀적 방법의 가장 큰 장점은 계산속도가 빠르고 정밀한 NURBS 보간법이나, 단점은 NURBS 미분값이 없으므로 곡률을 계산할 수 없다. 따라서 곡률에 따른 속도 변화를 위해서 다음장에서 살펴볼 것처럼 차분-미분방정식을 이용해야 된다. 차분-미분방정식은 안정성을 보장할 수 없어 Taylor 전개에서 1차와 2차 NURBS 미분값을 이용하고 재귀적 보간법을 이용하는 방법을 제안하고자 한다. 이러한 방법은 계산시간은 더 걸리지만 안정성은 매우 뛰어난 방법이 된다. 최종 증분치는 재귀적 NURBS 보간법으로 결정하고 모든 새로운 증분치 계산에서 초기 증분치 Δu_{j1} 는 2차 Taylor 전개를 이용하고, 2차 Taylor 전개에 사용된 1, 2차 미분값을 NURBS 곡선의 곡률계산에 사용한다. 새로운 증분치 계산은 다음과 같다.

$$\Delta u_{j_k} = \frac{d \cdot \Delta u_{j_{(k-1)}}}{s_{j_{(k-1)}}}, \quad j \geq 0, \quad k = 2 \cdots m \tag{8}$$

여기서 $s_{j_{(k-1)}} = \left|\mathbf{P}(u_{j_{(k-1)}}) - \mathbf{P}(u_j)\right|$ 이고, $u_{j_{(k-1)}} = u_j + \Delta u_{j_{(k-1)}}$ 이다.

$$u_{j_1} = \frac{V_j \Delta T}{\left\| \frac{dP(u)}{du} \right\|_{u=u_j}} + \frac{\Delta T^2}{2}\left(\frac{\left.\frac{dV_j}{dt}\right|_{t=t_j}}{\left\| \frac{dP(u)}{du} \right\|_{u=u_j}} - \frac{V_j^2 \left.\left(\frac{dP(u)}{du} \cdot \frac{d^2P(u)}{du^2} \right)\right|_{u=u_j}}{\left\| \frac{dP(u)}{du} \right\|^4_{u=u_j}} \right)$$

3. NURBS 곡률을 이용한 가속도 제어

3.1 차분-미분방정식에 의한 곡률계산

식(7)에서 보는 것처럼 재귀적 방법에 의한 NURBS 보간기는 NURBS 방정식으로 선분의 길이를 구하고, 구해진 증분치로 새로운 증분치를 갱신하므로 NURBS 곡선의 미분값으로 곡률을 계산하지 못한다. 따라서 본 연구에서는 앞선 데이터를 이용하여 차분방정식으로 1차와 2차 미분값을 구하고 곡률을 계산하여 곡률에 따라 속도를 제어하고 과도한 가감속을 억제하도록 하는 방법을 고찰하고자 한다. 먼저 앞선 좌표값들을 이용한 1차와 2차 미분값은 다음과 같이 표시할 수 있다.

먼저 Backshift Operator B를 이용하여 좌표값을 표시하면 다음과 같다.

$$Bx_t = x_{t-1} \tag{9}$$

$$B(Bx_t) = B^2 x_t = x_{t\text{-}2} \tag{10}$$

1차 차분-미분방정식은 B를 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$x'(u_j) = x(u_j) - x(u_{j\text{-}1}) = x(u_j) - Bx(u_j) = (1 - B)x(u_j) \tag{11}$$

2차 차분-미분방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x''(u_j) &= x(u_j) - 2x(u_{j\text{-}1}) + x(u_{j\text{-}2}) \\ &= (1 - 2\mathrm{B} + B^2)x(u_j) = (1 - B)^2 x(u_j) \end{aligned} \tag{12}$$

매개변수 u_j에서 곡률은 다음과 같다.

$$k(u_j) = \frac{\left|\mathrm{P}'(u_j) \times \mathrm{P}''(u_j)\right|}{\left|\mathrm{P}'(u_j)\right|^3} \tag{13}$$

여기서 $\mathrm{P}'(u_j) = [(1 - B)x(u_j), (1 - B)y(u_j), (1 - B)z(u_j)]$, $\mathrm{P}''(u_j) = [(1 - B)^2 x(u_j), (1 - B)^2 y(u_j), (1 - B)^2 z(u_j)]$ 재귀적 NURBS 보간의 장점은 미분값이 필요없어 보간은 빠르나 곡률을 구하는 것이 어려움이 있어 차분-미분방정식으로 곡률을 구해야 한다. 식(6)에서 보는 것처럼 Taylor 전개를 이용한 보간법은 1차와 2차 미분값을 가지고 있으므로 NURBS 곡선의 곡률은 식(13)를 이용해서 쉽게 구할 수 있다.

3.2 차분-미분방정식에 의한 NURBS 곡선의 가속도 제어

주어진 NURBS 곡선 (Fig. 1)에서 차분-미분방

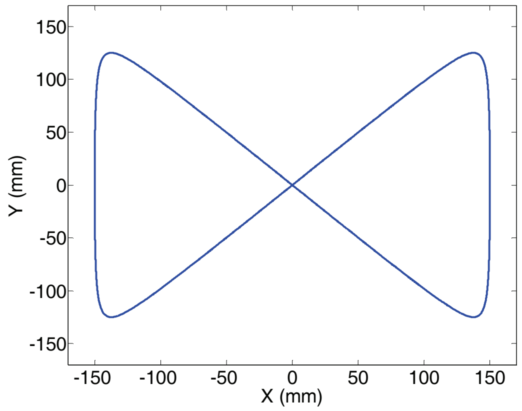

Fig. 1 NURBS curve

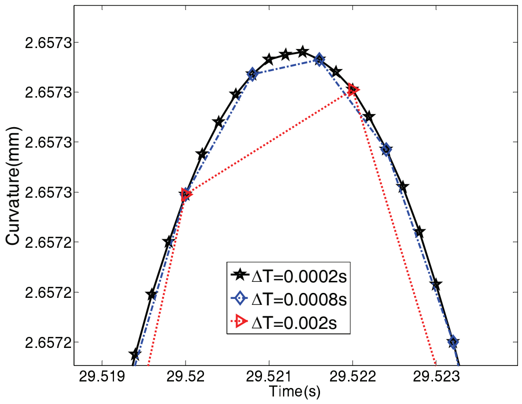

Fig. 2 The curvature of the NURBS curve using the derivatives of the NURBS

정식으로 곡률을 구하고 곡률이 심하면 속도를 늦추어 가속도를 줄이고 곡률이 작으면 속도를 증가시키는 방식으로 시뮬레이션하여 성능을 고찰하였다. NURBS 곡선의 정보는 다음과 같다.

(1) 조정점: {0, 0, 0}, {-150, -150, 0}, {-150, 150, 0}, {0, 0, 0}, {150, -150, 0}, {150, 150, 0}, {0, 0, 0}.
(2) 가중치 벡터: W= {1, 25, 25, 1, 25, 25, 1}.
(3) 절점벡터: U= {0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.5, 0.75, 1, 1, 1}.

NURBS 방정식의 1, 2차 미분으로 속도 V_j 를 상수로 두고 샘플링 간격을 변화시키며 곡률을 구하고, 재귀적 방법으로 Fig. 1의 NURBS 곡선에 대해 속도 동일한 조건으로 NURBS 곡선을 보간하고 1, 2차 차분-미분방정식으로 곡률을 구하여 서로 비교 하였다.

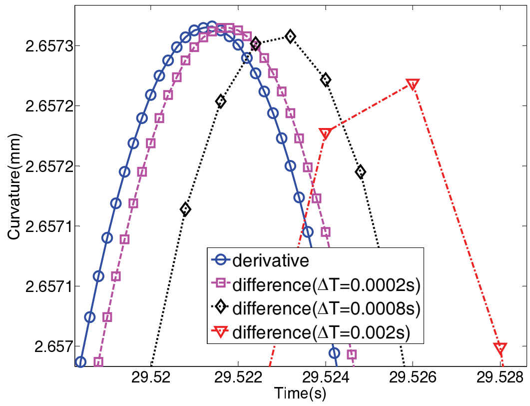

Fig. 3 The curvature of the NURBS curve using the difference -derivatives of the NURBS

Fig. 2는 NURBS 미분 방정식으로 구한 곡률이고, Fig. 3은 차분-미분방정식으로 구한 곡률이다. 샘플링 간격이 커지면 정확도가 떨어지나 속도가 일정하면 차분-미분방정식으로 곡률을 구할 수가 있음을 알 수 있다. 급격한 가감속에 의한 정밀도 저하를 방지하기 위해 속도를 변화시키는 경우에 대해 차분-미분방정식의 가능성을 시뮬레이션 하였다.

가속도는 곡률에 가장 큰 영향을 받으므로 곡률이 심하면 속도를 늦추고 곡률이 작으면 속도를 높이는 방법을 제어에서 많이 채택하고 있다. 순간 속도 V_j를 다음과 같이 정할 수 있다.

$$V_j = V_0 - C_0 k(u_j) \tag{14}$$

여기서 V_0는 직선구간에서 최고속도(초기속도)이고 C_0는 곡률에 따라 감속 정도를 나타내는 상수이다.

먼저 V_0= 200 mm/s, C_0= 520, ΔT = 0.002 s으로 하고 재귀적 방법으로 Fig. 1의 NURBS 곡선을 보간하였다. 곡선의 곡률을 차분-미분방정식으로 구하고, 순간 속도값을 식(14)와 같이 구한 후 보간하려는 선분길이 d= 0.002V_j 에 대하여 식(7)로 재귀적 방법으로 보간하였다.

차분-미분방정식에서 구한 순간 속도를 Taylor 정리의 NURBS 미분으로 구한 것과 비교하여 Fig. 4에 나타내었다. 차분-미분방정식에서 구한 결과와 NURBS 미분방정식에서 구한 결과는 잘 일치함을 알 수 있다. Fig. 4에서 전체 영역에서는 차이가 잘 나타나지 않으므로 곡률이 큰 부분을 확대하여 Fig. 5에 나타내었다. Fig. 5에서 보는 것처럼 차분-

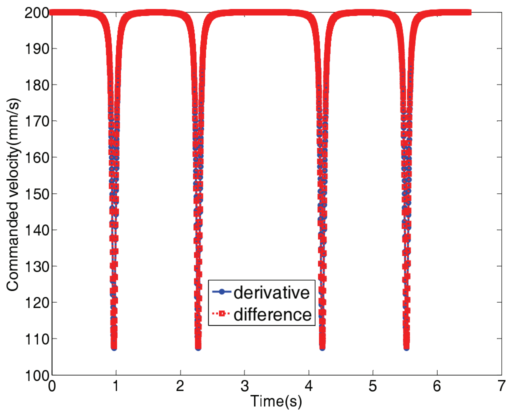

Fig. 4 The instant commanded velocity considering the curvature

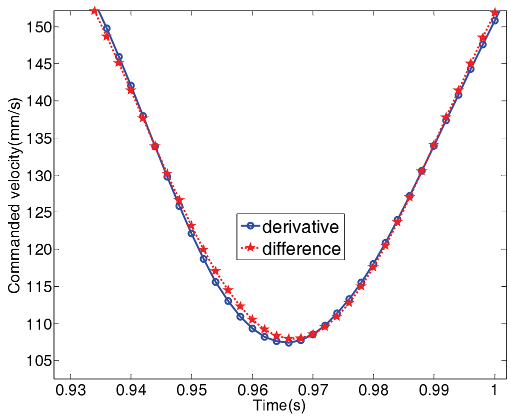

Fig. 5 The instant commanded velocity in the zoomed-in region

미분방정식으로 곡률을 구하고 순간속도를 구해도 속도제어에는 큰 문제가 없음을 알 수 있다.

곡률에 따른 순간속도의 변화에 의한 가속도 변화 효과를 알아보기 위해 먼저 곡률에 따라 속도를 변화시키지 않는 일반적인 경우에 대해 가속도를 시뮬레이션 하였다. 속도를 200 mm/s 상수로 두고 재귀적 방법으로 NURBS 보간을 하고 X축의 가속도를 구하여 Fig. 6에 나타내었다. 다음으로 Figs. 4와 5같이 곡률에 따라 속도를 변화시킬 때의 X축의 가속도를 구해 Fig. 7에 나타내었다. Figs. 6과 7을 비교해보면 가속도가 약 1/2로 줄어들었음을 알 수 있다.

차분-미분방정식으로 곡률을 구하는 가장 큰 장점은 NURBS 곡선을 미분하지 않으므로 계산속

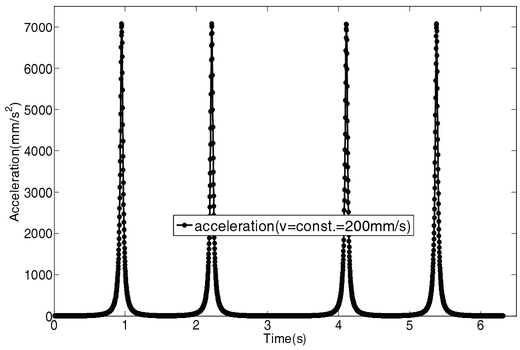

Fig. 6 The acceleration of the NURBS interpolation with the constant velocity

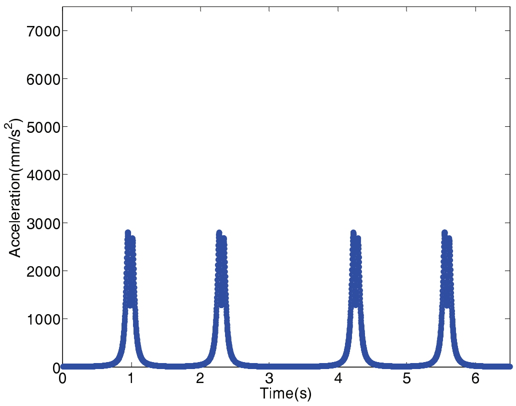

Fig. 7 The acceleration of the NURBS interpolation with the varying velocity

도가 빠르고 재귀적 NURBS 보간법으로 보간할 수 있다.

그러나 단점은 속도변화가 크게 되면 에러가 발생할 수 있다. 따라서 식(14)에서 상수 C_0값을 아주 크게 하여 시뮬레이션 하였다. V_0는 마찬가지로 200 mm/s로 두고 동일한 조건에서 C_0= 650으로 두고 곡률을 구하고 속도를 계산 하였다.

Fig. 8에 곡률에 따른 순간속도를 나타내었는데 속도가 제대로 계산되지 않음을 알 수 있다. 즉, 속도 변화가 심하면 차분-미분방정식에 오차가 심하게 발생하여 1차, 2차 미분값이 제대로 계산되지 않음을 알 수 있다.

Fig. 8의 가속도를 구하여 Fig. 9에 나타내었는데 속도의 변화가 심한 경우에는 차분-미분방정식을 이용한 곡률 계산에 의한 제어 방법은 불가능함을 알 수 있다. 재귀적 NURBS 보간방법은 등속

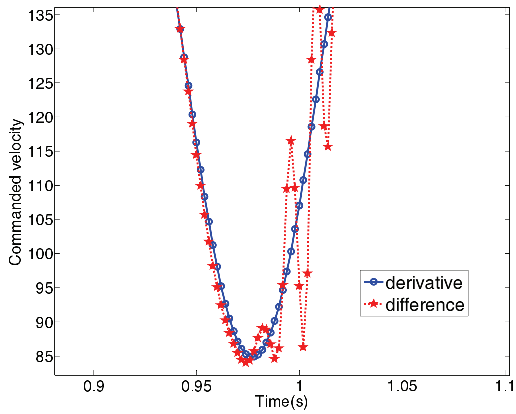

Fig. 8 The instant commanded velocity in the zoomed-in region (C_0= 650)

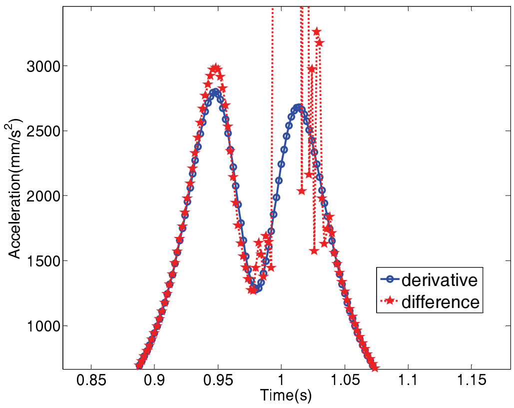

Fig. 9 The acceleration of the NURBS interpolation of the recursive method with the varying velocity (C_0= 650)

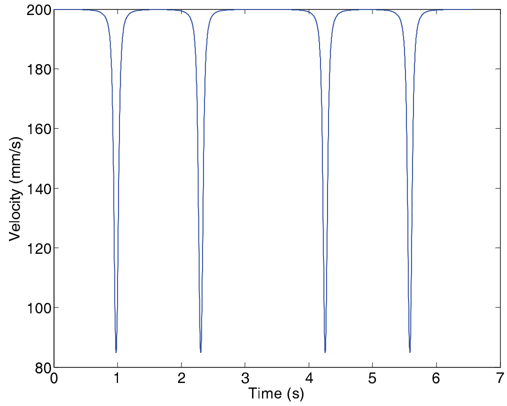

Fig. 10 The instant commanded velocity considering the curvature using Taylor's expansion and the recursive method (m= 2, C_0= 650)

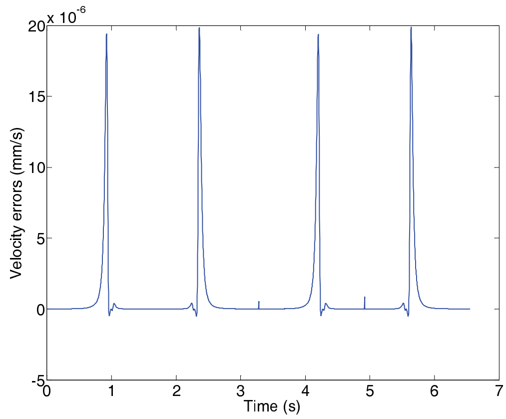

Fig. 11 Velocity error of the NURBS interpolator using Taylor's expansion and the recursive method (m= 2, C_0= 650)

에서는 매우 우수한 성능을 나타내지만 곡률을 고려한 가변 속도제어에서는 한정된 범위에서 차분-미분방정식을 이용하여 곡률을 계산할 수 있음을 알 수 있다.

3.3 Taylor 전개와 재귀적 방법에 의한 NURBS 곡선의 가속도 제어

2차 Taylor 전개를 이용한 NURBS 보간은 계산시간이 길고 정밀도가 낮은 문제를 가지고 있으나 현재 가장 많이 사용되고 있는 방식이다. 본 연구에서는 모든 매개변수에서 2차 Taylor 전개에서 구한 증분치를 재귀적 NURBS 보간법의 초기치로 사용하였다. 물론 계산시간은 재귀적 방법의 차수 (m) 만큼 길어지지만, 그 시간은 매우 짧아 큰 문제가 되지 않는다. Taylor 전개와 재귀적 보간방법을 이용하는 가장 큰 장점은 1차 2차 미분값을 곡률계산에 사용할 수 있어 가속도 제어에 매우 유용하다.

Fig. 1의 NURBS 곡선에 대해 1차와 2차 NURBS 미분값으로 곡률을 구하고 식(14)로 가변속도를 구하고 그 속도를 이용하여 식(8)과 같이 2차 Taylor 전개와 재귀적 방법 (m= 2)으로 보간하였다. NURBS 미분값으로 곡률을 구하고, C_0= 650으로 가변 속도를 구해 Fig. 10에 나타내었다. 속도 변화량은 Figs. 8과 10이 같으나 Fig. 10의 가변속도

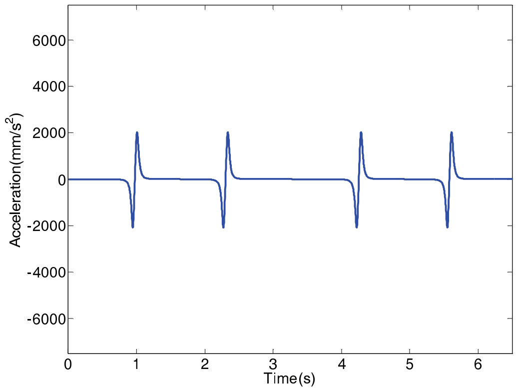

Fig. 12 The acceleration of the NURBS interpolation of the Taylor's expansion and the recursive method with the varying velocity (m= 2, C_0= 650)

에서는 섭동이 없고 부드럽게 감속과 가속이 됨을 알 수 있다. 명령된 속도 Fig. 10과 보간후의 좌표값으로부터 계산한 속도의 에러를 구해서 Fig. 11에 나타내었다. 그림에서 보는 것처럼 에러의 최고값은 약 2.0e-7으로 아주 정밀하게 보간되었음을 알 수 있다. 가변 속도제어의 가장 큰 이유는 곡률이 심한 부분에서 가속도를 줄여서 제어 정밀도를 높이는 것이므로, Taylor 전개와 재귀적 방법을 이용한 가변 속도제어의 X축 가속도는 Fig. 12에 나타내었다. 등속일 때의 가속도 Fig. 6과 비교해보면 가속도가 약 1/3 이상으로 줄어들었음을 알 수 있다.

4. 결론

자유곡면의 정밀제어를 위해 NURBS 곡선의 곡률에 따라 가속도를 제어하였다. NURBS 곡선의 미분값을 이용해 곡률을 구하고 곡률에 비례하여 가속과 감속을 수행하는 방법인데 재귀적 NURBS 보간에서는 미분값이 없으므로 차분-미분방정식을 이용하여 곡률을 구하여 제어하였다. 속도의 변화가 작을 때는 차분-미분방정식으로 곡률을 정확하게 계산할 수 있으나, 속도의 변화가 급격할 때는 차분-미분방정식의 에러로 곡률을 제대로 계산하지 못함을 알 수 있었다. 그러나 속도 변화가 주어진 초기 속도의 50%이하에서는 곡률계산이 정확하여 가속도 제어에 재귀적 방법을 적용할 수 있음을 알 수 있었다.

재귀적 방법과 Taylor 전개를 동시에 사용하면 계산시간이 길어지는 단점은 있지만 NURBS 보간도 매우 정밀하고 가속도 제어도 모든 가감속 영역에서 가능하였다. NURBS 곡선의 곡률이 심한 경로에 속도를 곡률에 비례하여 등속도의 1/2정도로 감속한 결과 등속일 때의 가속도보다 1/3로 줄어들었다.

후 기

이 논문은 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 대학중점연구소 지원사업으로 수행된 연구임(2010-0020089).

REFERENCES

1. Piegl, L. and Tiller, W., "The NURBS Book," Springer, 2nd Ed., pp. 1-228, 1997.
2. Koren, Y., Lo, C., and Shpitalni, M., "CNC Interpolators: Algorithms and Analysis," ASME Production Engineering Division, Vol. 64, pp. 83-92, 1993.
3. Yang, D. C. and Kong, T., "Parametric Interpolator Versus Linear Interpolator for Precision CNC Machining," Computer-Aided Design, Vol. 26, No. 3, pp. 225-234, 1994.
4. Zhang, Q. G. and Greenway, R. B., "Development and Implementation of a NURBS Curve Motion Interpolator," Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, Vol. 14, No. 1, pp. 27-36, 1998.
5. Yeh, S.-S. and Hsu, P.-L., "The Speed-Controlled Interpolator for Machining Parametric Curves," Computer-Aided Design, Vol. 31, No. 5, pp. 349-357, 1999.
6. Farouki, R. T. and Tsai, Y.-F., "Exact Taylor Series Coefficients for Variable-Feedrate CNC Curve Interpolators," Computer-Aided Design, Vol. 33, No. 2, pp. 155-165, 2001.
7. Lei, W., Sung, M., Lin, L., and Huang, J., "Fast Real-Time NURBS Path Interpolation for CNC Machine Tools," International Journal of Machine Tools and Manufacture, Vol. 47, No. 10, pp. 1530-1541, 2007.
8. Baek, D.-K, Ko, T.-J., and Yang, S.-H., "Fast and Precision NURBS Interpolator for CNC Systems," Int. J. Precis. Eng. Manuf., Vol. 13, No. 6, pp. 955-961, 2012.