

미분변환법을 이용한 다중 크랙을 갖는 비균일 나노빔의 진동해석

신영재^{1*}, 박성현², 김진홍², 유영찬³

Vibration Analysis of Multi Cracked Nonuniform Nanobeam by using Differential Transformation Method

Young-Jae Shin^{1*}, Sung-Hyun Park², Jin-Hong Kim², Yeong-Chan Yoo³

Abstract: In this study, the governing equations of motion for multi-cracked nonuniform nanobeam based on nonlocal elasticity theory and embedded in an elastic medium were derived. DTM(differential transformation method) was applied to vibration analysis of multi-cracked nonuniform nanobeam based on nonlocal elasticity theory and embedded in an elastic medium. The non-dimensional natural frequencies of this nanobeam were obtained for eoe, crack stiffness and elastic medium stiffness with various boundary conditions. The results obtained by this method was compared with previous works and showed the close agreement between two methods. The important conclusions obtained by this study are as follows : 1. As the length of nanobeam is shorter, the effect of scale coefficient is greater. 2. The locations of crack change non-dimensional natural frequency, In the case of fixed-fixed ends, the non-dimensional natural frequency is the biggest in the first crack location of 0.6L of nanobeam length, and the smallest in both ends. In the case of fixed-free ends, the closer the location of first crack go tho the free end, the bigger the non-dimensional natural frequency. 3. As the stiffness of crack is greater, the non-dimensional natural frequency is smaller, And the effect of crack stiffness is similar on both fixed-free ends and fixed-fixed ends. 4. The bigger the stiffness of elastic medium, the greater the non - dimensional natural frequency.

Keywords: Differential transformation method, Nonlocal elasticity theory, Nonlocal effect, Vibration analysis, Nanobeam

1. 서 론

나노빔은 선폭 및 두께가 나노스케일의 크기를 가지는 빔이다. 나노빔은 원자 현미경의 탐침봉으로써 힘이나 질량 측정과 바이오 분자 센서 그리고 무선 통신 분야등 많은 범위에서 사용된다. 나노빔과 같은 나노구조의 기계적인 거동을 해석하는데, 분자동역학 시뮬레이션(molecular dynamics simulation)과 연속체 역학을 사용해왔다. 이러한 방법은 비용과 시간이 많이 들기 때문에 나노빔의 해석이 어려웠다. 이를 해결하기 위해 최근에 널리 사용되고 있는 이론 중 하나가 Eringen에 의해 처음 시작된 비국지 탄성이론(nonlocal elasticity theory)이다. 이 탄성이론에서 작은 척도효과(small scale effect)는 어떤 점에서의 응력은 그 점에서의 변형률뿐만 아니라 영역내의 다른 모든 지점에서의 변형률의 함수로 가정함으로써 얻어진

다. 나노빔의 연구는 Aydogdu(2012)이 탄성매질속 균일한 CNT (carbon nano tube)를 비국지 탄성이론을 이용한 축방향 진동해석을 하였으며, Kim(2014)이 광결정 나노빔 레이저와 그 응용에 관한 연구를 하였고, Jeong(2014)이 전기로 구동되는 나노빔 레이저에 대한 연구를 하였다.

나노빔과 같은 나노스케일의 구조물은 크랙에 대한 영향이 중요하다. 나노빔의 크랙에 관한 연구는 Hsu et al.(2011)이 크랙을 가진 균일한 나노빔을 비국지 탄성이론을 이용한 축방향 진동해석을 하였다. 하지만 이 연구는 크랙이 한 개만 발생했을 경우의 연구이다. 나노빔의 크랙이 다중으로 발생하면 나노빔의 물성치는 많은 변화가 생기며 이를 정확하게 해석할 필요성이 있다. 또한 나노빔의 물성치를 높이기위해 탄성매질속에 박아서 사용하는 경우가 많다. 그러므로 탄성매질속에서의 나노빔의 기계적 거동을 해석하는 것 또한 매우 중요하다. 나노빔은 나노스케일에서 단면적이 가변이거나 밀도나 재료 특성이 비선형적인 경우도 존재하는데, 이러한 경우 비선형적인 문제를 해석하여야 할 필요성이 있다. 비선형적인 문제를 해석하는 수치해석 방법 중 하나인 미분변환법(Differential transformation method)은 수치해석의 수렴도가 빠르며 해의 정확도 또한 높기 때문에 이를 사용한다.

¹정회원, 안동대학교 기계설계공학과 교수, 교신저자

²정회원, 안동대학교 대학원 기계설계공학과

³정회원, 안동대학교 건축공학과 교수

*Corresponding author: yjshin@andong.ac.kr

Professor, Department of Mechanical Design Engineering, Andong National University

•본 논문에 대한 토의를 2016년 10월 1일까지 학회로 보내주시면 2016년 11월 호에 토론결과를 게재하겠습니다.

본 연구는 비국지 탄성이론과 미분변환법을 이용하여 탄성 매질속 다중 크랙을 가진 비균질 나노빔의 지배방정식을 유도하고, 유도된 지배방정식과 경계조건에 미분변환법을 적용하여 축 방향의 진동해석을 하며, 나노빔의 첫단과 끝단의 경계조건이 각각 고정단(Clamped end)과 자유단(Free end)의 경우에 대하여 수치해석들을 수행하였다. 이 연구에서는 비국지 작은 척도효과(nonlocal small scale effect), 탄성매질의 강성, 크랙의 위치, 크랙의 강성 그리고 비국지 탄성이론의 모델에 대한 진동해석 결과를 고찰하고자 한다.

2. 지배방정식

2.1 나노빔의 비국지 탄성 모델

Fig. 1은 본 연구에서 사용된 탄성매질속 다중 크랙이 포함된 나노빔의 모델이다. 여기서 L 은 보의 전체 길이이며, A 와 B 는 크랙이 발생한 위치이다. Fig. 1에 나타낸 나노빔의 지배방정식을 유도하기 위해 비국지 탄성이론을 적용한다.

비국지 탄성이론에 따르면, 물체의 기준점 x 에서의 응력이 그 점에서의 응력 뿐만 아니라 영역내의 다른 모든 점에서의 응력의 함수로 표현된다. 이것은 음향양자 분산에서 격자 역학의 원자이론과 실험관찰이 일치한다. 균질 등방성 탄성체의 구성방정식은 식 (1)과 같이 표현된다.

$$EA \frac{\partial u}{\partial X} = N - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 N}{\partial X^2} \quad (1)$$

여기서, u 는 종 방향 좌표(X) 방향의 변위이고, $N = \int_A \sigma_{xx} dA$ 는 국지 탄성에 대한 단위길이당 축 방향 힘이며, EA 와 σ_{xx} 는 각각 축 방향의 강성도와 xx 방향으로의 국지 응력이다. $e_0 a$ 는 척도계수(scale coefficient)이며, 재료상수(material constant)를 표현하는 곳에 사용되는데, 이를 $\tau = \frac{e_0 a}{L}$ 로 표현한다. 여기서 e_0 는 상수이며, a 와 L 은 각각 내부와 외부 특성 길이를 나타낸다. 내부 특성길이(internal characteristic length)가 외부 특성 길이(external characteristic length)와 비교해서 무시할 정도이면 τ 는 0에 접근하고 내부 특성길이가 외부 특

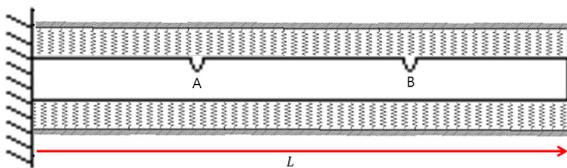


Fig. 1 Configuration of multi cracked nanobeam embedded in a elastic medium

성길이와 상당히 가까워지면 τ 는 1에 접근한다. τ 는 0에 접근할수록 척도효과가 작아지며, τ 가 1에 접근에 접근할수록 척도효과가 커진다. 척도효과가 커질수록 무차원 고유진동수의 크기는 작아진다.

비균질 나노빔의 비국지 탄성이론 구성 관계식을 유도하기 위하여 단면적을 임의의 다항식으로 정의한다. 임의의 다항식으로 표현된 가변 단면적은 비균일성을 의미하며 다음과 같이 표현한다. 즉, 임의의 위치 x 에서의 단면적 $A(x)$ 는 식 (2)와 같이 표현된다.

$$A(x) = A_0(1 + \eta_1 x + \eta_2 x^2 + \dots \eta_i x^i) = A_0 \eta(x) \quad (2)$$

여기서 A_0 는 $x=0$ 에서의 단면적이고, $\eta(x) = 1 + \eta_1 x + \eta_2 x^2 + \dots \eta_i x^i$ 로 $x=0$ 에 대한 임의의 위치 x 에서의 단면적 비를 나타낸다.

식 (2)를 식 (1)에 대입하면 비균질 나노빔의 비국지 탄성이론의 구성관계식이 다음과 같이 표현된다.

$$EA_0 \eta(x) \frac{\partial u}{\partial X} = N - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 N}{\partial X^2} \quad (3)$$

나노빔의 축 방향 진동 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial N}{\partial X} + f = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4)$$

여기서, f 는 나노빔 위에 작용하는 분포하중이고, m 은 단위길이당 질량이다.

식 (2)를 식 (4)에 대입하면 비균질 나노빔의 축 방향 진동 방정식이 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial N}{\partial X} = \rho A_0 \eta(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - f \quad (5)$$

식 (5)에서 만약 $\eta(x) = 1$ 이면, 식 (6)은 탄성매질속 균일한 나노빔의 축 방향 진동 방정식이 된다.

식 (5)를 식 (3)에 대입하여 정리하면

$$EA_0 \eta(x) \frac{\partial u}{\partial X} = N - (e_0 a)^2 \frac{\partial}{\partial X} [A_0 \eta(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - f] \quad (6)$$

로 되고, 국지 탄성에서 축 방향의 힘 N 은 다음과 같다.

$$N = [EA_0 \eta(x) + (e_0 a)^2 \rho A_0 \eta(x) \frac{\partial}{\partial X}] \frac{\partial u}{\partial X} - (e_0 a)^2 \frac{\partial f}{\partial X} \quad (7)$$

비국지 탄성이론이 적용된 탄성매질속 나노빔의 지배방정식을 유도하기 위해 식 (3)을 양변을 X 로 편미분하면 식 (8)과 같은 편미분 방정식을 얻는다.

$$EA_0 \frac{\partial}{\partial X} [\eta(x) \frac{\partial u}{\partial X}] = \frac{\partial N}{\partial X} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^3 N}{\partial X^3} \quad (8)$$

식 (8)에 식 (5)를 대입하여 정리하면 식 (9)와 같은 비국지 탄성이론이 적용된 탄성매질속 비균일 나노빔의 지배방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} & [EA_0 \eta(x) + (e_0 a)^2 \rho A_0 \eta(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2}] [\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}] + [EA_0 \eta(x)]' \\ & + 2(e_0 a)^2 \rho A_0 \eta(x)' \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\frac{\partial u}{\partial X}] + [-\rho A_0 \eta(x) + \\ & (e_0 a)^2 \rho A_0 \eta(x)''] [\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}] + f - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

상기 식은 비국지 탄성이론이 적용된 탄성매질속 비균일 나노빔 모델의 기본방정식이고, 만약 $e_0 a = 0$ 이라면 이 식은 고전적 빔 모델의 운동방정식이 된다.

2.2 탄성매질속 나노빔의 지배방정식과 경계조건

재질의 강도를 높이기 위해 나노빔을 탄성매질에 박으면 탄성매질은 나노빔의 기계적 거동에 큰 영향을 미친다.

본 연구에서는 나노빔의 외부에 탄성매질이 박혀있는 경우를 고찰하고자 탄성매질에 의한 축 방향 힘은 다음과 같이 가정한다.

$$f = -cu \quad (10)$$

여기서, c 는 탄성매질의 강성이다.

식 (10)을 식 (7)와 식 (9)에 대입하여 정리하면 식 (11) 및 식 (12)와 같이 유도된다.

$$N = [EA_0 \eta(x) + (e_0 a)^2 \rho A_0 \eta(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2}] \frac{\partial u}{\partial X} + (e_0 a)^2 c \frac{\partial u}{\partial X} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & [EA_0 \eta(x) + (e_0 a)^2 c + (e_0 a)^2 \rho A_0 \eta(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2}] [\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}] \\ & + [EA_0 \eta(x)]' + 2(e_0 a)^2 \rho A_0 \eta(x)' \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\frac{\partial u}{\partial X}] \\ & + [-\rho A_0 \eta(x) + (e_0 a)^2 \rho A_0 \eta(x)''] [\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}] - cu = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

상기 식 (12)는 비국지 탄성이론에 기초한 탄성매질속 비균일 나노빔의 종 방향 운동방정식이 되며, $c = 0$ 인 경우는 비국지 탄성이론에 기초한 비균일 나노빔의 종 방향 운동방정식이 된다.

탄성매질속 나노빔의 해석을 위해서 고려하는 경계조건은 고정단과 자유단의 두 경우를 다룬다.

• 고정단-고정단 경계조건

고정단은 물리적으로 변위가 0인 경우를 의미하므로 양단의 변위를 0으로 하는 다음 식들이 고정단-고정단의 경계조건 식들이 된다.

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0 \quad (13)$$

• 고정단-자유단 경계조건

고정단은 변위가 0이고, 자유단은 축 방향의 힘 N 값이 0이 됨을 의미하므로 이 경계조건을 만족하는 식은 다음과 같다.

$$u(0,t) = 0, \quad u'(L,t) = 0 \quad (14)$$

2.3 탄성매질속 다중 크랙 나노빔의 크랙 해석

본 연구에서는 Fig. 1과 같이 탄성매질속 비균일 나노빔이 위치 A 와 B 에 크랙을 가진 것으로 가정하였다. 크랙을 가진 나노빔은 크랙을 경계로 나노빔을 나누고, 그 사이에는 질량이 없는 탄성스프링을 연결된 것으로 간주하여 해석한다. 따라서 탄성매질속 다중 크랙을 포함한 비균일 나노빔의 지배 방정식을 유도하면 식 (15)와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} & [EA_0 \eta(x) + (e_0 a)^2 c + (e_0 a)^2 \rho A_0 \eta(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2}] [\frac{\partial^2 u_1}{\partial X^2}] \\ & + [EA_0 \eta(x)]' + 2(e_0 a)^2 \rho A_0 \eta(x)' \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\frac{\partial u_1}{\partial X}] \quad 0 \leq x < L_1 \\ & - [\rho A_0 \eta(x) - (e_0 a)^2 \rho A_0 \eta(x)''] [\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}] - cu_1 = 0 \\ & [EA_0 \eta(x) + (e_0 a)^2 c + (e_0 a)^2 \rho A_0 \eta(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2}] [\frac{\partial^2 u_2}{\partial X^2}] \\ & + [EA_0 \eta(x)]' + 2(e_0 a)^2 \rho A_0 \eta(x)' \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\frac{\partial u_2}{\partial X}] \quad L_1 \leq x < L_2 \\ & + [-\rho A_0 \eta(x) + (e_0 a)^2 \rho A_0 \eta(x)''] [\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}] - cu_2 = 0 \\ & [EA_0 \eta(x) + (e_0 a)^2 c + (e_0 a)^2 \rho A_0 \eta(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2}] [\frac{\partial^2 u_3}{\partial X^2}] \\ & + [EA_0 \eta(x)]' + 2(e_0 a)^2 \rho A_0 \eta(x)' \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\frac{\partial u_3}{\partial X}] \quad L_2 \leq x < L \\ & + [-\rho A_0 \eta(x) + (e_0 a)^2 \rho A_0 \eta(x)''] [\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}] - cu_3 = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

본 연구에서는 경계조건을 고정단-고정단 경계조건과 고정단-자유단 경계조건에 대해 고찰하며, 이에 대한 경계조건식은 앞 장의 결과를 적용하면 다음과 같이 표현된다.

• 고정단-고정단 경계조건

$$u_1(0,t) = 0, \quad u_3(L,t) = 0 \quad (16)$$

• 고정단-자유단 경계조건

$$u_1(0,t) = 0, \quad u_3'(L,t) = 0 \quad (17)$$

크랙이 발생한 위치 A와 B에서의 연속조건은 크랙이 발생한 위치에서 근접한 나노빔의 변위가 같아야하고 또한 식 (19)과 같이 축 방향 힘에 관한 관계식이 존재하게 된다.

• 변위 연속방정식(Continuity equation of displacement)

$$\frac{\partial u_1(L_1,t)}{\partial X} = \frac{\partial u_2(L_1,t)}{\partial X}, \quad \frac{\partial u_2(L_1,t)}{\partial X} = \frac{\partial u_3(L_1,t)}{\partial X} \quad (18)$$

• 축 방향 힘 연속방정식(Continuity equation of axial force)

$$k_1 [u_1(L_1,t) - u_2(L_1,t)] = - [EA_0\eta(x) + c(e_0a)^2 + (e_0a)^2\rho A_0\eta(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2}] \frac{\partial u_1}{\partial X} \Big|_{X=L_1}$$

$$k_2 [u_2(L_1,t) - u_3(L_1,t)] = - [EA_0\eta(x) + c(e_0a)^2 + (e_0a)^2\rho A_0\eta(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2}] \frac{\partial u_2}{\partial X} \Big|_{X=L_1} \quad (19)$$

2.4 탄성매질속 다중 크랙을 포함한 비균일 나노빔의 무차원 지배방정식

축 방향 진동수를 구하기 위해 세 부분의 지배방정식의 해를 조화운동이라고 가정한다.

$$u_1 = V_1(X) e^{i\omega t}, u_2 = V_2(X) e^{i\omega t}, u_3 = V_3(X) e^{i\omega t} \quad (20)$$

여기서 ω 는 나노빔의 고유진동수이다.

무차원 지배방정식을 유도하기 위하여 아래와 같은 무차원 파라메타(non-dimensional parameter)들을 도입한다.

$$\xi = \frac{X}{L}, U_1 = \frac{V_1}{L}, U_2 = \frac{V_2}{L}, U_3 = \frac{V_3}{L}, \quad (21)$$

$$\xi_1 = \frac{L_1}{L}, \xi_2 = \frac{L_2}{L}, \epsilon = \left(\frac{e_0a}{L}\right)^2$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{\rho A_0 \omega^2 L^2}{EA_0}}, \quad \bar{C} = \frac{cL^2}{EA_0}, \quad K_1 = \frac{EA_0}{k_1L}, \quad K_2 = \frac{EA_0}{k_2L}$$

여기서, ϵ, Ω, K 는 각각 무차원 비국지 파라메타, 무차원 고유진동수 그리고 무차원 크랙의 강성 파라메타이다.

지배방정식의 조화함수 해 식 (20)을 지배방정식 (15)에 대입하고, 무차원 파라메타 식 (21)을 적용하면 탄성매질속 다중 크랙을 포함한 비균질 나노빔의 무차원 지배방정식 (22)를 구할 수 있다.

$$(\eta(x) - \epsilon\Omega^2\eta(x) + \epsilon\bar{C}) \frac{d^2 U_1}{d\xi^2} + \left(\frac{\eta(x)'}{L} - 2\epsilon\Omega^2 L\eta'(x)\right) \frac{dU_1}{d\xi} + (\Omega\eta(x) - \epsilon\Omega^2 L^2\eta''(x) - \bar{C}) U_1 = 0$$

$$0 \leq \xi < \xi_1$$

$$(\eta(x) - \epsilon\Omega^2\eta(x) + \epsilon\bar{C}) \frac{d^2 U_2}{d\xi^2} + \left(\frac{\eta(x)'}{L} - 2\epsilon\Omega^2 L\eta'(x)\right) \frac{dU_2}{d\xi} + (\Omega\eta(x) - \epsilon\Omega^2 L^2\eta''(x) - \bar{C}) U_2 = 0$$

$$\xi_1 \leq \xi < \xi_2$$

$$(\eta(x) - \epsilon\Omega^2\eta(x) + \epsilon\bar{C}) \frac{d^2 U_3}{d\xi^2} + \left(\frac{\eta(x)'}{L} - 2\epsilon\Omega^2 L\eta'(x)\right) \frac{dU_3}{d\xi} + (\Omega^2\eta(x) - \epsilon\Omega^2 L^2\eta''(x) - \bar{C}) U_3 = 0$$

$$\xi_2 \leq \xi < 1 \quad (22)$$

여기서 \bar{C} 는 탄성매질의 강성이 포함된 무차원 강성 변수이고 ϵ 는 e_0a 가 포함된 무차원 척도계수에 대한 변수이며, Ω 는 고유진동수 ω 가 포함된 무차원 고유진동수에 대한 변수이다.

경계조건 식 (16) 및 식 (17)에 무차원 파라메타 식 (21)을 적용하면 탄성매질속 다중 크랙을 포함한 나노빔의 무차원 경계조건 식 (23) 및 식 (24)를 구할 수 있다.

• 고정단-고정단의 경계조건

$$U_1(0,t) = 0, \quad U_3(1,t) = 0 \quad (23)$$

• 고정단-자유단의 경계조건

$$U_1(0,t) = 0, \quad U_3'(1,t) = 0 \quad (24)$$

연속방정식 식 (18) 및 식 (19)에 무차원 파라메타 식 (21)을 적용하면 식 (25) 및 식 (26)과 같은 무차원 연속방정식을 얻을 수 있다.

• 변위 연속방정식(Continuity equation of displacement)

$$\frac{dU_1(\xi_1,t)}{d\xi} = \frac{dU_2(\xi_1,t)}{d\xi}, \quad \frac{dU_2(\xi_2,t)}{d\xi} = \frac{dU_3(\xi_2,t)}{d\xi} \quad (25)$$

• 축 방향 힘 연속방정식(Continuity equation of axial force)

$$U_1(\xi_1,t) + K_1(\eta(x) - \epsilon \Omega^2 \eta(x) + \epsilon \bar{C}) \frac{dU_1(\xi_1,t)}{d\xi} = U_2(\xi_1,t)$$

$$U_2(\xi_2,t) + K_2(\eta(x) - \epsilon \Omega^2 \eta(x) + \epsilon \bar{C}) \frac{dU_2(\xi_2,t)}{d\xi} = U_3(\xi_2,t) \quad (26)$$

3. 미분변환법

미분변환법(Differential Transformation Method)은 Zhou (1986)가 전기회로의 선형과 비선형 문제를 풀기위해 제안했다. 미분변환법은 테일러 시리즈(Taylor series expansion)를 기초로 연구되었다. 이 방법은 선형과 비선형의 공학 문제에 적용할 수 있고, 간단한 순환 관계에 의해서 해를 구할 수 있으며 해의 정확도가 대단히 높다.

임의의 원함수(original function)에 대한 미분변환은

$$Y(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \quad (27)$$

와 같이 정의 되고, 여기서 $Y(k)$ 를 T-function이라 한다. $Y(k)$ 의 미분역변환(differential inverse transformation)은

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k Y(k) \quad (28)$$

로 정의 되므로, 원함수 $y(x)$ 는 다음 식으로 유도된다.

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \quad (29)$$

상기 식 (26)에서 미분변환법은 테일러 시리즈에서 유래되었다는 것을 알 수 있다.

실제의 적용에 있어서는 $y(x)$ 는 근사적으로 유한개의 항만을 고려한다.

$$y(x) = \sum_{k=0}^n x^k Y(k) \quad (30)$$

Table 1 Examples of the differential transformation of the original function

원함수(original unction)	T함수 (T-function)
$w(x) = y(x) \pm z(x)$	$W(k) = Y(k) \pm Z(k)$
$z(x) = \lambda y(x)$	$Z(k) = \lambda Y(k)$
$w(x) = \frac{dy(x)}{dx}$	$W(k) = (k+1) Y(k+1)$
$w(x) = \frac{d^2 y(x)}{dx^2}$	$W(k) = (k+1)(k+2) Y(k+2)$
$w(x) = z(x)y(x)$	$W(k) = \sum_{l=0}^k Z(l) Y(k-l)$
$w(x) = x^m$	$W(k) = \delta(k-m) \text{ at } \begin{matrix} 1 & k=m \\ 0 & k \neq m \end{matrix}$
$w(x) = z_1(x)z_2(x) \dots z_n(x)$	$W(k) = \sum_{k_{n-1}=0}^{k_n} \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \dots \sum_{k_1=0}^{k_2} [Z_1(k_1)Z_2(k_2-k_1) \dots Z_{n-1}(k_{n-1}-k_{n-2})Z_n(k_n-k_{n-1})]$

여기서 n 은 자연수이며 해의 수렴도를 결정한다.

Table 1은 미분변환법에 관한 기본적인 연산의 예를 나타낸 것이다.

4. 미분변환법의 적용

탄성매질속 다중 크랙을 포함한 비균일 나노빔 무차원 지배방정식 중 $(\eta(x) - \epsilon \Omega \eta(x) + \epsilon \bar{C}) \frac{d^2 U_1}{d\xi^2} + (\frac{\eta(x)'}{L} - 2\epsilon \Omega L \eta'(x)) \frac{dU_1}{d\xi} + (\Omega \eta(x) - \epsilon \Omega L^2 \eta''(x) - \bar{C}) U_1$ 를 미분변환법의 기본연산을 적용하면 식 (31)과 같이된다.

$$(1 - \epsilon \Omega^2) \sum_{l=0}^k N(l)(k+1-l)(k+2-l) Y_1(k+2-l) + \epsilon \bar{C}(k+1)(k+2) Y_1(k+2) + \Omega^2 \sum_{l=0}^k N(l) Y_1(k-l) + (\frac{1}{L} - 2\epsilon \Omega^2 L) \sum_{l=0}^k (l+1)N(l+1)(k+1-l) Y_1(k+1-l) - \epsilon \Omega^2 L^2 \sum_{l=0}^k (l+1)(l+2)N(l+2) Y_1(k-l) - \bar{C} Y_1(k) \quad (31)$$

여기서 Y_i , N 함수는 U_i , η 의 미분변환을 나타낸다.

식 (31)과 같은 형태로 탄성매질속 다중 크랙을 포함한 비균일 나노빔의 무차원 지배방정식 (22)에 미분변환법의 기본연산을 적용하면 식 (32)와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
& (1 - \epsilon \Omega^2) \sum_{l=0}^k N(l)(k+1-l)(k+2-l) Y_1(k+2-l) \\
& + \epsilon \bar{C}(k+1)(k+2) Y_1(k+2) + \Omega^2 \sum_{l=0}^k N(l) Y_1(k-l) \\
& + \left(\frac{1}{L} - 2\epsilon \Omega^2 L\right) \sum_{l=0}^k (l+1)N(l+1)(k+1-l) Y_1(k+1-l) \\
& - \epsilon \Omega^2 L^2 \sum_{l=0}^k (l+1)(l+2)N(l+2) Y_1(k-l) - \bar{C} Y_1(k) \\
& 0 \leq \xi < \xi_1 \\
& (1 - \epsilon \Omega^2) \sum_{l=0}^k N(l)(k+1-l)(k+2-l) Y_2(k+2-l) \\
& + \epsilon \bar{C}(k+1)(k+2) Y_2(k+2) + \Omega^2 \sum_{l=0}^k N(l) Y_2(k-l) \\
& + \left(\frac{1}{L} - 2\epsilon \Omega^2 L\right) \sum_{l=0}^k (l+1)N(l+1)(k+1-l) Y_2(k+1-l) \\
& - \epsilon \Omega^2 L^2 \sum_{l=0}^k (l+1)(l+2)N(l+2) Y_2(k-l) - \bar{C} Y_2(k) \\
& \xi_1 \leq \xi < \xi_2 \\
& (1 - \epsilon \Omega^2) \sum_{l=0}^k N(l)(k+1-l)(k+2-l) Y_3(k+2-l) \\
& + \epsilon \bar{C}(k+1)(k+2) Y_3(k+2) + \Omega^2 \sum_{l=0}^k N(l) Y_3(k-l) \\
& + \left(\frac{1}{L} - 2\epsilon \Omega^2 L\right) \sum_{l=0}^k (l+1)N(l+1)(k+1-l) Y_3(k+1-l) \\
& - \epsilon \Omega^2 L^2 \sum_{l=0}^k (l+1)(l+2)N(l+2) Y_3(k-l) - \bar{C} Y_3(k) \\
& \xi_2 \leq \xi < \xi_3
\end{aligned} \tag{32}$$

탄성매질속 다중 크랙을 포함한 나노빔의 무차원 경계조건 식 (23)과 식 (24)에 미분변환법의 기본연산을 적용하면 다음과 같이 표현된다.

- 고정단-고정단의 경계조건

$$Y_1(0) = 0, \sum_{k=0}^n \xi_3 Y_3(k) = 0 \tag{33}$$

- 고정단-자유단의 경계조건

$$Y_1(0) = 0, \sum_{k=0}^n k \xi_3^{k-1} Y_3(k) = 0 \tag{34}$$

탄성매질속의 다중 크랙을 포함한 나노빔의 연속방정식 식 (25)과 식 (26)에 미분변환법을 적용하면 다음과 같이 표현된다.

- 변위 연속방정식(Continuity equation of displacement)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n k \xi_1^{k-1} Y_1(k) &= \sum_{k=0}^n k 0^{k-1} Y_2(k) \\
\sum_{k=0}^n k \xi_2^{k-1} Y_2(k) &= \sum_{k=0}^n k 0^{k-1} Y_3(k) \xi
\end{aligned} \tag{35}$$

- 축 방향 힘 연속방정식(Continuity equation of axial force)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \xi_1^k Y_1(k) + K_1(1 - \epsilon \Omega^2) \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^k N(l)(k-l) \xi_1^{k-l-1} Y_1(k) \\
+ K_1 \epsilon \bar{C} \sum_{k=0}^n k \xi_1^{k-1} Y_1(k) &= \sum_{k=0}^n 0^k Y_2(k) \\
\sum_{k=0}^n \xi_2^k Y_2(k) + K_2(1 - \epsilon \Omega^2) \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^k N(l)(k-l) \xi_2^{k-l-1} Y_2(k) \\
+ K_2 \epsilon \bar{C} \sum_{k=0}^n k \xi_2^{k-1} Y_2(k) &= \sum_{k=0}^n 0^k Y_3(k)
\end{aligned} \tag{36}$$

5. 수치해석 및 고찰

본 연구에서 탄성매질속의 다중 크랙을 포함한 비균일 나노빔의 진동해석을 하기 위하여 미분변환법이 적용된 무차원 지배방정식 식 (30)과 경계조건 식 (31), 식 (32) 그리고 연속방정식 식 (33), 식 (34)를 다음과 같은 행렬 방정식으로 구성한다.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & a_{2,n+1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & & a_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y(0) \\ Y(1) \\ \cdot \\ Y(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \tag{35}$$

상기 행렬의 해인 $Y(0), Y(1), Y(2) \dots Y(n)$ 의 근이 0이 아닌 근을 가지기 위해서 상기 행렬의 행렬식이 0이 되어야 한다.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & a_{2,n} & a_{2,n+1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} = 0 \tag{36}$$

상기 식은 고유진동수 방정식(natural frequency equation)으로 미분변환법에 의한 나노빔의 고유진동수를 구할 수 있다.

본 연구는 수치해석 타당성을 입증하기 위해 기존 연구 결과와 본 연구의 결과를 비교하여 Table 2와 Table 3에 나타낸다. Table 2는 싱글 크랙이 발생한 균일한 나노빔의 연구 결과를 비교하였고, Table 3는 다중 크랙이 발생한 보의 연구 결과

Table 2 Comparison of non-dimensional natural frequency of cracked uniform nano-beam by the present method with those by Hsu(2011)

K_1	Hsu(2011)		Present method	
	$\frac{e_0 a}{L} = 0.2$	$\frac{e_0 a}{L} = 0.4$	$\frac{e_0 a}{L} = 0.2$	$\frac{e_0 a}{L} = 0.4$
0	2.6601	1.9562	2.6601	1.9562
0.065	2.6173	1.9467	2.6173	1.9467
0.35	2.4668	1.9071	2.4668	1.9071
0.2	2.1506	1.7663	2.1506	1.7663

Table 3 Comparison of non-dimensional natural frequency of multi cracked beam by the present method with those by Singh(2009)

Singh(2009)		Present method	
First Mode	Second	First Mode	Second
1.3090	4.2141	1.3090	4.2141

를 비교하였다.

Table 2의 수치해석 자료값은 경계조건이 고정단-고정단이며, 크랙의 위치가 0.25일 때, $\frac{e_0 a}{L}$ 의 크기가 각각 0.2, 0.4 이고, 크랙의 강성이 각각 0, 0.065, 0.35, 2일 때의 무차원 고유진동수의 크기를 나타낸다.

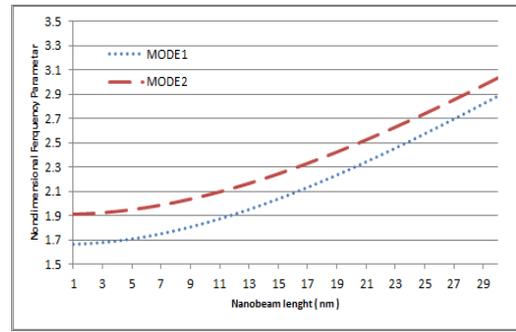
Table 3의 수치 해석 자료값은 자료값은 경계조건이 고정단-자유단이며, 크랙의 위치가 $\xi_1 = 0.175$, $\xi_2 = 0.45$ 일 때, 크랙의 강성이 $K_1 = 0.1446$, $K_2 = 0.1455$ 일 때의 무차원 고유진동수의 크기를 나타낸다.

수치해석 결과는 본 연구의 미분변환법(DTM)과 기존 연구의 결과가 소수 4자리까지 일치함을 나타낸다. 이를 근거로 본 연구의 수치해석이 타당하기에 탄성매질속 다중 크랙을 포함한 비균일 나노빔의 수치해석을 수행하였다.

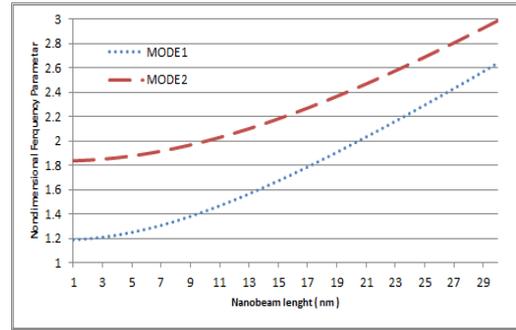
탄성매질속 다중 크랙을 포함한 비균일 나노빔의 축 방향 진동해석을 위하여 양단의 경계조건을 고정단-고정단과 고정단-자유단 두 가지의 경우에 대해 수치해석을 수행하였다. 비균일 경우 $\eta(x) = -0.4x^3 + 0.2x^2 - 0.3x + 1$ 로 두었으며 $E_0 = 1.03 \text{ Tpa}$, $\rho_0 = 5300 \text{ Kg/m}^3$, $r = 0.5 \text{ nm}$ 의 물성치를 사용하였다.

Fig. 2는 탄성매질속 다중 크랙을 포함한 비균일 나노빔의 길이가 변할 때, 무차원 고유진동수를 나타낸 그래프이다. 크랙의 위치가 $\xi_1 = 0.3$, $\xi_2 = 0.7$ 이며, 나노빔의 길이가 $1 \text{ nm} \sim 30 \text{ nm}$ 까지 증가할 때, 무차원 고유진동수의 크기를 나타낸다.

Fig. 2는 나노빔의 길이가 증가함에 따라 무차원 고유진동수가 커졌으며, 나노빔의 길이가 $1 \text{ nm} \sim 10 \text{ nm}$ 증가할 때, 무차원 고유진동수의 변화가 큰 것을 볼 수 있다. 이는 척도계수에 의한 척도효과가 나노빔의 길이가 짧을수록 큰 영향을 끼치

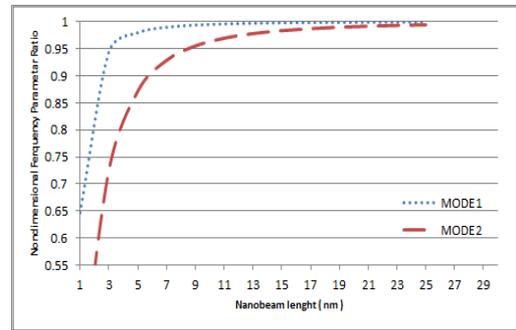


<Clamp-clamp ends.>

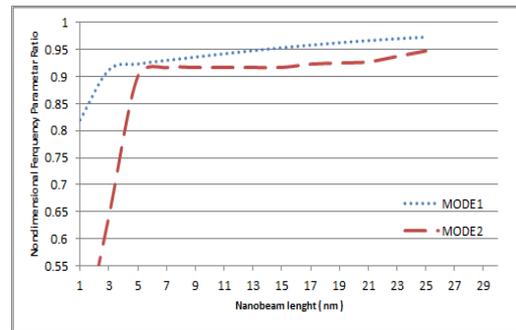


<Clamp-free ends.>

Fig. 2 Variation of non-dimensional natural frequency with length(L) for multi cracked non-uniform nanobeam embedded in an elastic medium

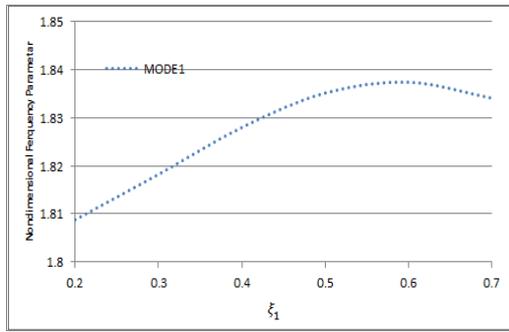


<Clamp-clamp ends.>

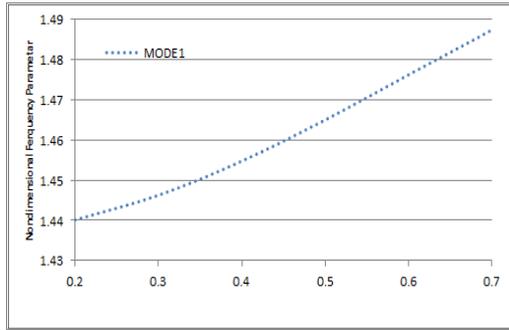


<Clamp-free ends.>

Fig. 3 Variation of non-dimensional natural frequency ratio with length(L) for multi cracked non-uniform nanobeam embedded in an elastic medium



<Clamp-clamp ends.>



<Clamp-free ends.>

Fig. 4 Variation of non-dimensional natural frequency with cracked location for multi cracked non-uniform nanobeam embedded in an elastic medium

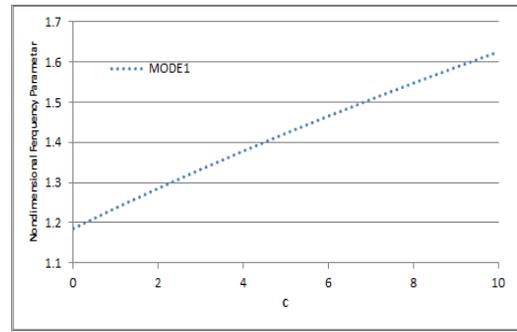
기 때문이다. 위 그래프에서 보듯 척도효과는 고정단-고정단에 비해 고정단-자유단에서 영향이 크게 나타난다.

Fig. 3은 나노빔의 길이에 대한 척도효과를 알아보기 위해 나노빔의 길이가 $1nm \sim 30nm$ 까지 증가할 때 비국부 탄성이론이 적용된 탄성매질속 다중 크랙을 포함한 비균일 나노빔과 비국부 탄성이론이 적용되지 않은(국부탄성이론이 적용된)나노빔의 무차원 고유진동수 비(non-dimensional frequency parameter ratio)를 나타낸 그래프이다.

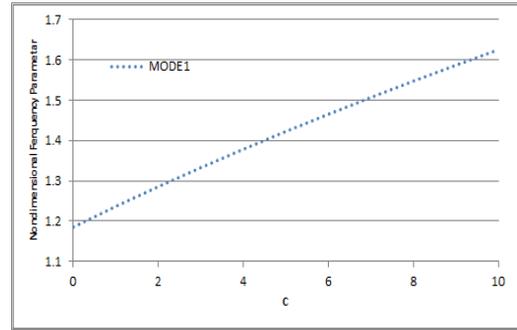
Fig. 3은 $1nm \sim 5nm$ 에서 척도효과가 크게 나타나는 것을 볼 수 있으며, 나노빔의 길이가 길어질수록 척도효과가 작아지는데, 이는 외부 특성 길이가 길어짐에 따라 τ 의 크기가 0에 가까워지기 때문이다.

Fig. 4는 탄성매질속 다중 크랙을 포함한 비균일 나노빔의 크랙의 위치가 변할 때, 무차원 고유진동수를 나타낸 그래프이다. 나노빔의 길이가 $10nm$ 이고, 첫 번째 크랙의 위치인 ξ_1 이 $0.2 \sim 0.7$ 까지 변하며, 두 번째 크랙의 위치인 ξ_2 가 0.8 일 때, 무차원 고유진동수의 크기를 나타낸다.

Fig. 4는 고정단-고정단일 때, 첫 번째 크랙의 위치가 0.2 에서 0.6 까지는 무차원 고유진동수가 커지며, 0.6 일 때 가장 큰 값을 가진다. 0.6 이후에선 무차원 고유진동수가 작아진다. 고정단-자유단에서는 첫 번째 크랙의 위치가 자유단 방향으로



<Clamp-clamp ends.>



<Clamp-free ends.>

Fig. 5 Variation of non-dimensional natural frequency with stiffness of the elastic medium for multi cracked non-uniform nanobeam embedded in an elastic medium

이동하면 무차원 고유진동수가 커진다.

Fig. 5는 탄성매질속 다중 크랙을 포함한 비균일 나노빔의 탄성매질의 강성이 변할 때, 무차원 고유진동수를 나타낸 그래프이다. 나노빔의 길이가 $10nm$ 이고, 크랙의 위치가 $\xi_1 = 0.3$, $\xi_2 = 0.7$ 이며, 탄성매질의 강성이 $0 \sim 10 \times 10^9 (N/m^2)$ 까지 증가할 때, 무차원 고유진동수의 크기를 나타낸다.

Fig. 5는 탄성매질의 강성의 크기가 커질수록 무차원 고유진동수의 크기가 커졌다. 탄성매질의 강성의 영향은 고정단-고정단, 고정단-자유단 모두 비슷한 양상이 나타난다.

6. 결론

본 연구에서는 비국부 탄성이론이 적용된 탄성매질속 다중 크랙을 포함한 비균일 나노빔의 지배방정식을 유도하였다. 유도된 지배방정식에 미분변환법을 적용하여, 양단이 고정단-고정단, 고정단-자유단인 경우에 대해 수치해석을 수행하였다. 본 연구의 수치해석 결과를 기존 연구결과와 비교하여 타당성을 입증한 후, 다양한 수치해석을 한 결과, 아래와 같은 결론을 얻었다.

- 1) 탄성매질속 다중 크랙을 포함한 비균일 나노빔에서 척도 계수의 영향은 나노빔의 길이가 짧을수록 크다,
- 2) 탄성매질속 다중 크랙을 포함한 비균일 나노빔에서 크랙의 발생한 위치에 따라 무차원 고유진동수가 변화한다. 무차원 고유진동수는 고정단-고정단의 경우 첫 번째 크랙의 위치가 0.6에서 가장 크고, 양끝단으로 갈수록 작아진다. 고정단-자유단의 경우는 첫 번째 크랙의 위치가 나노빔의 자유단으로 갈수록 무차원 고유진동수가 커진다.
- 3) 탄성매질속 다중 크랙을 포함한 비균일 나노빔에서 탄성매질의 강성이 커짐에 따라 무차원 고유진동수는 커지며, 탄성매질의 강성에 대한 영향은 고정단-고정단, 고정단-자유단모두 비슷한 양상이 나타난다.

감사의 글

이 논문은 2013학년도 안동대학교 특별연구비에 의하여 연구되었음

References

Aydogdu, M. (2012), Axial Vibration Analysis of Nanorods Embedded in an Elastic Medium using Nonlocal Elasticity, *Mechanics Research Communications* 43, 34-40.

Eringen, A. C. (1983), On Differential Equations of Nonlocal Elasticity

and Solutions of Screw Dislocation and Surface Waves, *Journal of Applied Physics*, 4703-4710.

Hsu, J. C., Lee, H. L., and Chang, W. J. (2011), Longitudinal Vibration of Cracked Nanobeams using Nonlocal Elasticity Theory, *Current Applied Physics*, 1384-1388.

Jeong, K. Y. (2012), Electrically driven nanobeam lasers, *KAIST*, TD 530-12-69.

Kim, M. J., and Kang, N. C. (2010), Vibration Analysis of a Rotating Cantilever Beam with Tip Mass using DTM, *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, 1058-1063.

Kim, S. J. (2014), Study on the Photonic Nanobeam Laser and its Applications, *KAIST*, TD 530-14-297.

Kumar Vikram Singh (2009), Transcendental Inverse Eigenvalue Problems in Damage Parameter Estimation, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23, 1870-1883.

Malik, M., and Dang, H. H. (1998), Vibration Analysis of Continuous Systems by Differential Transformation, *Applied Mathematics and Computation*, 96, 17-26.

Shin, Y. J., Hwang, K. S., Yun, J. H., and Yoo, Y. C. (2003), Vibration Analysis of Euler-Bernoulli Beam with Open Cracks on Elastic Foundations using Differential Transformation Method, *The autumn scholarship conference of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, 690-695.

Zhou, J. K. (1986), Differential Transformation and its Application for Electrical Circuits, *Huazhong University Press, Wuhan China (in Chinese)*.

Received : 05/30/2016
 Revised : 07/21/2016
 Accepted : 07/29/2016

요 지 : 본 연구에서는 비국지 탄성이론과 미분변환법을 이용하여 탄성매질속 다중 크랙을 가진 비균질 나노빔의 지배방정식을 유도하고, 유도된 지배방정식과 경계조건에 미분변환법을 적용하여 나노빔의 축방향의 진동해석을 하며, 나노빔의 첫단과 끝단의 경계조건이 각각 고정단(Clamped end)과 자유단(Free end)의 경우에 대하여 수치해석을 수행하였다. 수치해석 결과를 기존 연구결과와 비교하여 타당성을 입증한 후, 비국지 작은 척도효과(Nonlocal small scale effect), 탄성매질의 강성, 크랙의 위치, 크랙의 강성 그리고 비국지 탄성이론의 나노빔에 대한 진동해석 결과를 고찰하였다.

핵심용어 : 미분변환법, 비국지 탄성이론, 비국지 효과, 진동 해석, 나노빔
