

일반화 쌍곡분포 기반 선형 포트폴리오 위험측도에 대한 안장점근사

나종화¹

¹충북대학교 정보통계학과

접수 2016년 5월 9일, 수정 2016년 7월 7일, 게재확정 2016년 7월 13일

요약

자산의 수익에 대한 분포 가정은 파생 상품의 가치 평가에 매우 중요한 역할을 한다. Elberlein과 Keller (1995)는 오랜 기간에 걸친 주식 자료를 바탕으로 혼합 자산의 분포에 대한 다양한 검정을 수행한 결과, 정규성 가정이 만족되지 않음을 확인한 바 있으며, 일반화 쌍곡분포가 보다 현실을 잘 반영하는 모형을 확인하였다. 또한, Hu와 Kercheval (2007)은 6년간의 S&P500 지수의 분석에서 정규분포는 VaR (value at risk)을 과소 추정하는 반면, 일반화 쌍곡분포는 잘 적합함을 확인하였다. 일반화 쌍곡분포는, Barndorff-Nielsen (1977)이 처음 소개한 분포로, 첨도가 큰 특징을 가지는 금융 자료의 적합에 유용한 분포이다. 본 연구에서는 일반화 쌍곡분포를 모분포로 하는 선형 포트폴리오의 위험측도를 추정한다. 위험측도로는 VaR과 ES (expected shortfall)를 고려하였으며, 추정 방법으로는 안장점근사를 사용하였다. 안장점근사는 소표본에서도 정확한 근사를 제공하는 근사법으로 알려져 있다. 모의실험을 통해 위험측도에 대한 안장점근사의 정도가 매우 우수함을 확인하였다.

주요용어: 기대부족액, 안장점근사, 위험측도, 일반화 쌍곡분포, 최대손실예상금액.

1. 머리말

금융 수익 자료는 빈번히 정규분포를 따르지 않는 것으로 잘 알려져 있다. 다만, 금융 자료의 모델링에 비-정규 분포를 다루는 문제는 기술적으로 어려움이 따른다. 일반화 쌍곡 (generalized hyperbolic, 이하 GH) 분포는 Barndorff-Nielsen (1977)이 처음 소개한 분포로 몇 가지 유용한 성질과 함께 쌍곡분포를 비롯하여 스튜던트-t, 정규, 코쉬, 분산감마, 정규역가우시안 등의 다양한 분포를 포함한다. Elberlein과 Keller (1995)는 꼬리가 두터운 특징을 가지는 금융 자료의 적합에 쌍곡분포가 매우 유용함을 실증 자료로 보여주고 있다. Barndorff-Nielsen 등 (1985, 1989)에서는 쌍곡분포의 다양한 응용을 소개하고 있으며, Hu (2005)와 Hu와 Kercheval (2007)은 GH 분포를 이용한 위험관리 및 포트폴리오 최적화 문제를 다루었다. 최근 Scott (2009, 2015)과 Luethi와 Breyman (2011)은 GH 분포와 관련된 R 패키지 HyperbolicDist, GeneralizedHyperbolic과 ghyp를 개발하여 CRAN에서 제공하고 있다.

안장점근사 (saddlepoint approximation)는 Daniels (1954)가 처음 통계학 분야에 소개한 방법으로 정규근사나 Edgeworth 근사에 비해 정확도가 뛰어나며, 소표본에서도 매우 정확한 근사를 제공하는 방법으로 알려져 있다. 특히, 금융 분야에서의 중요 관심사인 위의 측도들은 포트폴리오의 분위수의 추정에 크게 영향을 받으므로, 꼬리확률에 대한 정확한 추정이 요구된다. 꼬리확률에 대한 안장점근사에 대한 연구에는 Daniels (1987), Lugannani와 Rice (1980)가 대표적이다. 최근 왜정규 (skew-normal)분포와 관련된 연구로는 Na와 Yu (2013), Yu와 Na (2014)가 있다.

¹ (28644) 충북 청주시 서원구 충대로 1, 충북대학교 정보통계학과, 교수. E-mail: cherin@cbu.ac.kr

본 연구에서는 GH 분포를 따르는 금융 수익의 선형 포트폴리오의 위험측도에 대한 추정 문제를 다루고자 한다. 금융에서 중요하게 다루어지는 위험측도인 VaR과 ES 및 보험에서 최소-손실 보험료 (stop-loss premium)의 추정 문제를 다룬다. 이들 측도의 추정 방법으로는 안장점근사를 사용한다. 2절에서는 주요 위험측도와 안장점근사에 대해 소개하고, 3절에서는 안장점근사에 요구되는 이론적 결과를 유도하였으며, 4절에서는 모의실험 결과를 통해 안장점근사의 정확도를 확인하였다. 5절에서는 결론과 향후연구 방향을 제시한다.

2. 위험측도와 안장점근사

2.1. 위험측도

위험측도 VaR은 금융 분야에서 가장 널리 사용되는 위험측도로, 다음과 같이 정의된다. 신뢰수준 $\alpha \in (0, 1)$ 에서 포트폴리오의 VaR_α 는 손실 X 가 x 를 초과하는 확률이 기껏해야 $(1 - \alpha)$ 가 되는 최소의 x 값으로 정의된다. 즉, 포트폴리오의 손실을 X 라고 할 때, $VaR_\alpha = VaR_\alpha(X)$ 은 다음 식과 같이 수준 α 의 분위수로 정의된다.

$$VaR_\alpha = \inf \{x \in R : P(X > x) \leq 1 - \alpha\}.$$

위 식의 우변은, 손실의 분포함수를 $F_X(\cdot)$ 라 할 때, 다음과 같이 표현된다.

$$\inf \{x \in R : F_X(x) \geq \alpha\}.$$

VaR은 유용한 위험측도이나 부가법성이 위배되며, 일관성을 가지지 못하는 단점이 지적되어 왔다. 이와 관련된 연구로는 Artzner 등 (1999)과 Frey와 McNeil (2002)이 있다.

위험측도 ES는 포트폴리오의 시장위험 또는 신용위험을 평가하는 측도로 VaR의 단점을 보완한 측도이다. ES는 다음의 조건부 기대값으로 정의된다.

$$ES_\alpha = E[X|X > VaR_\alpha].$$

ES의 구체적 계산을 위해서는 다음의 관계식이 유용하게 사용된다. 즉,

$$\begin{aligned} E(X|X \geq k) &= E(X - k|X - k \geq 0) + k \\ &= \int_{x \geq k} (x - k) \frac{f(x)}{P(X \geq k)} dx + k \\ &= \frac{E(x - k)^+}{P(X \geq k)} + k, (X - k)^+ = \begin{cases} X - k, & X - k \geq 0 \\ 0, & X - k < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1)$$

이며

$$\begin{aligned} E(X|X \geq k) &= \int xf(x|X \geq k)dx \\ &= \int_k^\infty \frac{xf(x)}{P(X \geq k)} dx \\ &= \frac{E(X \cdot 1_{\{X \geq k\}})}{P(X \geq k)} \end{aligned}$$

이므로, 식 (2.1)로부터 다음이 성립된다.

$$E[(X - K)^+] = E[X \cdot 1_{\{X \geq k\}}] - KP(X \geq K). \quad (2.2)$$

위에서 정의된 $E[(X - K)^+]$ 의 활용에 대해서는 Rogers와 Zane (1999), Yang 등 (2006), Antonov 등 (2005)을 참고하기 바란다.

2.2. ES에 대한 안장점근사

안장점근사는 Daniels (1954)가 처음으로 통계학 분야에 소개한 근사법으로, 통계량의 밀도함수와 분포함수의 근사에 주로 사용된다. 안장점근사는 정규근사 또는 Edgeworth 근사에 비해 꼬리확률에 대한 근사의 정도가 뛰어난 방법으로, 소표본의 경우에도 정확한 근사를 제공하는 것으로 알려져 있다. 본 논문에서는 꼬리확률에 대한 안장점근사를 이용하여 VaR 측도의 근사를 수행한다. 안장점근사에 대한 주요 연구로는 Daniels (1954), Barndorff-Nielsen과 Cox (1979), Lugannani와 Rice (1980) 등이 있다.

위험측도 ES에 대한 안장점근사는 다음의 과정을 통해 수행한다. 포트폴리오 X에 대한 누울생성함수를 $\kappa(t)$ 라고 하자. 식 (2.1)에서 분모 $P(X \geq k)$ 에 대한 안장점근사는, Lugannani와 Rice (1980)로부터, 다음과 같이 주어진다.

$$P(X \geq k) \approx 1 - \Phi(R) + \phi(R) \left[\frac{1}{S} - \frac{1}{R} \right], \tag{2.3}$$

여기서 $S = \lambda\sqrt{\kappa''(\lambda)}$, $R = \text{sgn}(\lambda)\sqrt{2[\lambda k - \kappa(\lambda)]}$ 이며, T는 안장점 방정식(saddlepoint equation)으로 불리는 $\kappa'(T) = k$ 의 근으로 정의한다.

식 (2.2)의 $E[(X - K)^+]$ 에 대한 안장점근사를 다음과 같이 주어진다. 이에 대한 자세한 유도는 Huang과 Oosterlee (2009)를 참고하기 바란다.

$$E[(X - k)^+] \approx (\mu - k) \left[1 - \Phi(R) - \frac{\phi(R)}{R} \right], \tag{2.4}$$

여기서 μ 와 R 은 각각 $E(X) = \mu$, $R = \text{sgn}(T)\sqrt{2[Tk - \kappa(T)]}$ 이다.

3. 일반화 쌍곡분포 기반 선형 포트폴리오 분포함수 대한 안장점근사

3.1. 일반화 쌍곡분포

일반화 쌍곡(GH) 분포는 Barndorff-Nielsen (1977)이 비사 (wind blown sands)의 입자 크기에 대한 모형화를 위해 처음 소개한 분포로, 정규분포의 로그-밀도함수가 포물선 형태를 띠는 반면, GH분포는 쌍곡선 형태를 가짐에 기인한다. 확률변수 X가 GH분포를 따를 때 $GH(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu)$ 로 나타내며, 확률 밀도함수는 다음 식 (3.1)과 같이 정의된다.

$$f(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) = a(\lambda, \alpha, \beta, \delta) \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}^{(\lambda - \frac{1}{2})} \times K_{\lambda - \frac{1}{2}}(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}) \exp\{\beta(x - \mu)\}. \tag{3.1}$$

여기서 $a(\lambda, \alpha, \beta, \delta)$ 는 $a(\lambda, \alpha, \beta, \delta) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^{\frac{\lambda}{2}}}{\sqrt{2\pi} \alpha^{\lambda - \frac{1}{2}} \delta^\lambda K_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}$ 이고, K_λ 는 수정된 3차 베셀함수(modified Bessel function of the third kind with λ)로 다음과 같이 정의된다.

$$K_\lambda(x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty y^{\lambda-1} \exp\left\{-\frac{x}{2}(y + y^{-1})\right\} dy. \tag{3.2}$$

Figure 3.1은 α 와 λ 의 변화에 따른 GH 분포의 형태를 보여준다. 그림 (a)에서는 편의상 ($\lambda = 1.5$, $\beta = 0$, $\delta = 1$, $\mu = 0$)가 사용되었으며, 그림 (b)에서는 ($\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\delta = 1$, $\mu = 0$)가 사용되었다. 두 그림으로부터 두 모수의 변화에 따라 분포의 매우 다양한 형태를 가짐을 알 수 있다. 또한 μ 와 δ 는 각각 위치모수와 척도모수이며, β 는 분포의 왜도를 조절하는 모수이다.

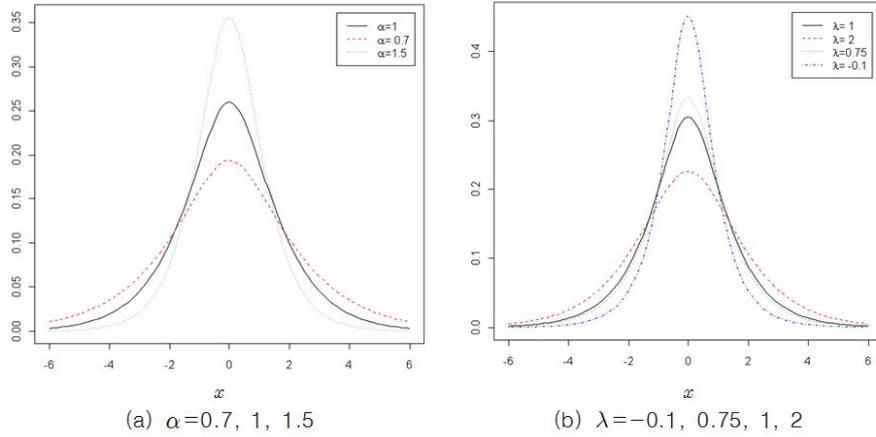


Figure 3.1 The shape of GH distributions according to various α and λ

$X \sim GH(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu)$ 일 때, X 의 적률생성함수는

$$M(t) = \exp(\mu t) \left\{ \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 - (\beta + t)^2} \right\}^{\lambda/2} \frac{K_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - (\beta + t)^2})}{K_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}, \quad |\beta + t| < \alpha, \tag{3.3}$$

이며, 평균과 분산은 다음과 같이 주어진다.

$$E(X) = \mu + \frac{\beta \delta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \frac{K_{\lambda+1}(\zeta)}{K_\lambda(\zeta)},$$

$$Var(X) = \delta^2 \left(\frac{K_{\lambda+1}(\zeta)}{\zeta K_\lambda(\zeta)} + \frac{\beta^2}{\alpha^2 - \beta^2} \left[\frac{K_{\lambda+2}(\zeta)}{K_\lambda(\zeta)} - \left(\frac{K_{\lambda+1}(\zeta)}{K_\lambda(\zeta)} \right)^2 \right] \right).$$

여기서 $\zeta = \delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ 이다.

3.2. 일반화 쌍곡분포의 선형결합 분포함수 대한 안장점근사

X_1, X_2, \dots, X_p 가 서로 독립인 GH 분포를 따를 때, 선형결합 통계량 $Y = h^t X = \sum_{i=1}^p h_i X_i$ 의 누울생성함수에 대한 1, 2차 미분식은 다음의 정리 3.1과 같다.

정리 3.1 확률변수 Y 의 누울생성함수 $\kappa_Y(t)$ 의 t 에 대한 1, 2차 미분 결과는 다음과 같다.

$$\kappa'_Y(t) = \sum_{i=1}^p \mu_i h_i - \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{2} \frac{A'_{1i}}{A_{1i}} + \sum_{i=1}^p \frac{K'_{\lambda_i}(A_{2i}) A'_{2i}}{K_{\lambda_i}(A_{2i})}, \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} \kappa''_Y(t) = & \sum_{i=1}^p -\frac{\lambda_i}{2} \frac{A''_{1i}}{A_{1i}} + \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{2} \frac{A'^2_{1i}}{A^2_{1i}} \\ & + \sum_{i=1}^p \frac{K''_{\lambda_i}(A_{2i}) A'^2_{2i} + K'_{\lambda_i}(A_{2i}) A''_{2i}}{K_{\lambda_i}(A_{2i})} - \sum_{i=1}^p \frac{K'^2_{\lambda_i}(A_{2i}) A'^2_{2i}}{K^2_{\lambda_i}(A_{2i})}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

여기서 A_{1i}, A_{2i} 는 다음과 같이

$$A_{1i} \equiv A_{1i}(t) = \alpha_i^2 - (\beta_i + h_i t)^2, A_{2i} \equiv A_{2i}(t) = \delta_i \sqrt{\alpha_i^2 - (\beta_i + h_i t)^2},$$

으로 주어지며, $A'_{1i}, A''_{1i}, A'_{2i}, A''_{2i}$ 는 각각 A_{1i} 과 A_{2i} 의 t 에 대한 1, 2차 미분으로 다음과 같이 주어진다.

$$A'_{1i} = -2(\beta_i + h_i t)h_i, \quad A''_{1i} = -2h_i^2,$$

$$A'_{2i} = \frac{-\delta_i(\beta_i + h_i t)h_i}{\sqrt{(\alpha_i^2 - (\beta_i + h_i t))}}, \quad A''_{2i} = -\delta_i h_i^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_i^2 - (\beta_i + h_i t)^2}} + \frac{(\beta_i + h_i t)^2}{(\alpha_i^2 - (\beta_i + h_i t)^2)^{3/2}} \right).$$

증명: X_1, X_2, \dots, X_n 이 서로 독립인 $GH(\lambda_i, \alpha_i, \beta_i, \delta_i, \mu_i)$ 분포를 따를 때, $Y = h^t X = \sum_{i=1}^p h_i X_i$ 의 누울생성함수 $\kappa_Y(t) = \log M_Y(t)$ 는 식 (3.3)으로부터 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \kappa_Y(t) = & \sum_{i=1}^p \mu_i h_i t + \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{2} \ln(\alpha_i^2 - \beta_i^2) - \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{2} \ln(\alpha_i^2 - (\beta_i + h_i t)^2) \\ & + \sum_{i=1}^p \ln K_{\lambda_i}(\delta_i \sqrt{\alpha_i^2 - (\beta_i + h_i t)^2}) - \sum_{i=1}^p \ln K_{\lambda_i}(\delta_i \sqrt{\alpha_i^2 - \beta_i^2}). \end{aligned}$$

위 식으로부터 $\kappa_Y(t)$ 에 대한 1, 2차 미분식을 쉽게 유도할 수 있다. 이 과정에서 수정된 베셀함수 $K_\lambda(t)$ 에 대한 1, 2차 미분은 베셀함수의 특성에 따라 다음과 같이 계산된다 (Barndorff-Neilsen과 Blaesild, 1981).

$$\begin{aligned} \kappa_\lambda(t)' &= \frac{\lambda}{t} K_\lambda(t) - K_{\lambda+1}(t), \\ \kappa_\lambda(t)'' &= \frac{d^2}{dt^2} K_\lambda(t) \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\lambda}{t} K_\lambda(t) - K_{\lambda+1}(t) \right\} \\ &= -\frac{\lambda}{t^2} K_\lambda(t) + \frac{\lambda}{t} \left\{ \frac{\lambda}{t} K_\lambda(t) - K_{\lambda+1}(t) \right\} - \left\{ \frac{\lambda+1}{t} K_\lambda(t) - K_{\lambda+2}(t) \right\} \\ &= \frac{\lambda^2 - \lambda}{t^2} K_\lambda(t) - \frac{2\lambda+1}{t} K_{\lambda+1}(t) + K_{\lambda+2}(t). \end{aligned}$$

□

4. 모의실험

이 절에서는 모의실험을 통해 일반화 쌍곡분포에 의한 선형 포트폴리오의 꼬리확률과 위험측도 VaR과 ES에 대한 안장점근사의 결과를 제시하고, 정규근사와 비교하였다.

4.1. 선형 포트폴리오의 분포함수에 대한 안장점 근사

Table 4.1은 모의실험에 사용된 GH 분포에 의한 선형 포트폴리오 구성을 나타낸다. 모의실험은 3개와 5개의 GH 분포에 대해 $Y = h^t X$ 를 고려하였다.

Table 4.1 Simulation designs of the portfolios based on GH distributions

Designs	h_i	λ_i	α_i	β_i	δ_i	μ_i
i	1	-0.5	1.0	0.10	1	0
	2	-0.5	1.2	0.02	2	0
	3	-0.5	1.5	0.03	5	0
ii	1	-0.7	1.5	0.10	1	0
	1	-0.5	2.0	0.02	2	0
	1	1.0	2.5	0.03	5	0
iii	10	1.0	1.5	0.8	1	-1.50
	5	-0.5	2.0	0.8	10	-4.36
	1	-1.0	2.5	0.8	30	-10.00
iv	1	-0.7	1.0	0.10	1	0
	1	-0.5	1.2	0.02	2	0
	1	0.5	1.5	0.03	5	0
	1	0.7	2.0	0.15	2	0
	1	1.0	2.5	0.20	1	0

분포함수와 VaR과 ES 위험측도에 대한 안장점근사의 결과는 Table 4.2와 Table 4.3에 제시되었다. 모의실험 결과에서 Sim.Exact는 반복횟수 10만 번의 모의실험을 수행한 결과를 의미하고, Saddlepoint는 식 (2.3)과 3절의 정리 3.1의 결과를 식 (2.3)에 적용한 안장점근사이며, Normal은 $Y \sim N(E(Y), Var(Y))$ 으로 근사한 정규근사의 결과이다. 이 결과들로부터 안장점근사는 정규근사보다 매우 정확하며, 모의실험을 통한 정확한 값에 매우 잘 근사함을 확인하였다.

Table 4.2 Saddlepoint approximations to the distribution functions of linear portfolios based on GH distributions

$P(Y < y)$							
Design i			Design ii				
y	Sim.Exact	Saddlepoint	Normal	y	Sim.Exact	Saddlepoint	Normal
-17	0.0035	0.0031	0.0022	-4.5	0.0089	0.0100	0.0089
-15	0.0075	0.0071	0.0059	-4.0	0.0168	0.0182	0.0172
-13	0.0159	0.0151	0.0141	-3.5	0.0306	0.0320	0.0315
-11	0.0313	0.0309	0.0309	-3.0	0.0524	0.0540	0.0543
-9	0.0592	0.0596	0.0616	-2.5	0.0865	0.0872	0.0886
-7	0.1086	0.1075	0.1120	-2.0	0.1338	0.1344	0.1368
-5	0.1814	0.1805	0.1866	-1.5	0.1979	0.1974	0.2005
-3	0.2797	0.2806	0.2861	-1.0	0.2786	0.2764	0.2793
-1	0.4025	0.4034	0.4056	-0.5	0.3707	0.3690	0.3707
1	0.5356	0.5371	0.5346	0.0	0.4718	0.4708	0.4700
3	0.6656	0.6662	0.6600	0.5	0.5747	0.5725	0.5713
5	0.7762	0.7768	0.7698	1.0	0.6729	0.6706	0.6681
7	0.8613	0.8616	0.8563	1.5	0.7593	0.7574	0.7547
9	0.9203	0.9200	0.9177	2.0	0.8311	0.8295	0.8275
11	0.9568	0.9567	0.9569	2.5	0.8871	0.8855	0.8848
13	0.9781	0.9779	0.9794	3.0	0.9277	0.9264	0.9271
15	0.9895	0.9892	0.9910	3.5	0.9556	0.9546	0.9563
17	0.9950	0.9950	0.9965	4.0	0.9738	0.9731	0.9752
19	0.9976	0.9978	0.9987	4.5	0.9850	0.9846	0.9868
21	0.9990	0.9990	0.9996	5.0	0.9919	0.9914	0.9933

Table 4.3 Saddlepoint approximations to the distribution functions of linear portfolios based on GH distributions

$P(Y < y)$							
Design iii			Design iv				
y	Sim.Exact	Saddlepoint	Normal	y	Sim.Exact	Saddlepoint	Normal
-35	0.0350	0.0338	0.0558	-9	0.0006	0.0007	0.0005
-30	0.0640	0.0635	0.0866	-8	0.0019	0.0019	0.0015
-25	0.1096	0.1095	0.1287	-7	0.0050	0.0049	0.0044
-20	0.1728	0.1740	0.1831	-6	0.0115	0.0118	0.0114
-15	0.2529	0.2560	0.2501	-5	0.0268	0.0265	0.0268
-10	0.3459	0.3509	0.3282	-4	0.0557	0.0551	0.0568
-5	0.4456	0.4519	0.4146	-3	0.1047	0.1051	0.1083
0	0.5438	0.5484	0.5054	-2	0.1820	0.1832	0.1871
5	0.6351	0.6433	0.5959	-1	0.2907	0.2912	0.2939
10	0.7160	0.7232	0.6816	0	0.4219	0.4228	0.4227
15	0.7836	0.7895	0.7584	1	0.5640	0.5638	0.5603
20	0.8388	0.8425	0.8240	2	0.6951	0.6962	0.6910
25	0.8801	0.8837	0.8769	3	0.8041	0.8058	0.8011
30	0.9125	0.9149	0.9176	4	0.8855	0.8861	0.8834
35	0.9370	0.9382	0.9472	5	0.9388	0.9385	0.9381
40	0.9546	0.9554	0.9677	6	0.9694	0.9693	0.9704
45	0.9677	0.9679	0.9811	7	0.9860	0.9858	0.9872
50	0.9768	0.9770	0.9894	8	0.9939	0.9938	0.9951
55	0.9832	0.9836	0.9944	9	0.9974	0.9975	0.9983
60	0.9880	0.9883	0.9971	10	0.9991	0.9991	0.9995

4.2. 선형 포트폴리오의 위험요인에 대한 안장점 근사

Table 4.4~Table 4.6은 Table 4.1의 모의실험 조건에서 위험측도인 VaR과 ES 및 $E(X - K)^+$ 에 대한 안장점근사 결과를 제시하였다. 안장점근사는 3절에서 유도된 결과를 2절의 식 (2.1)~식 (2.4)에 적용한 결과이다. Sim.Exact와 Normal은 앞 절에서의 정의와 같다.

Table 4.4~Table 4.6의 전반에 걸쳐 안장점근사의 결과가 10만 번의 모의실험에 기초한 정확한 값을 매우 정확히 근사함을 알 수 있다. 반면 정규근사의 결과는 모의실험 조건에 따라 정확도가 크게 떨어지는 경우가 발생함을 확인할 수 있다.

Table 4.4 Estimation of VaR of the portfolios based on GH distributions

α	Design i			Design ii		
	Sim.Exact	Saddlepoint	Normal	Sim.Exact	Saddlepoint	Normal
0.050	10.5539	10.5501	10.5671	3.3807	3.3708	3.3746
0.025	12.6372	12.6503	12.5019	4.0435	4.0220	3.9928
0.010	15.1257	15.1966	14.7516	4.8426	4.7989	4.7117
0.005	17.0141	17.0032	16.2835	5.3484	5.3408	5.2011
0.001	21.1489	20.9391	19.4420	6.6175	6.4903	6.2103

α	Design iii			Design iv		
	Sim.Exact	Saddlepoint	Normal	Sim.Exact	Saddlepoint	Normal
0.050	38.5396	38.2535	35.5800	5.3138	5.3101	5.3044
0.025	48.9710	48.7304	42.4528	6.2553	6.2776	6.2128
0.010	62.7171	62.3109	50.4439	7.4049	7.4315	7.2691
0.005	72.4008	72.4692	55.8853	8.2512	8.2374	7.9883
0.001	98.0172	95.8580	67.1048	9.9459	9.9357	9.4713

Table 4.5 Estimation of $E(X - K)^+$ of the portfolios based on GH distributions

K	Design i			K	Design ii		
	Sim.Exact	Saddlepoint	Normal		Sim.Exact	Saddlepoint	Normal
10.55	0.14233	0.15269	0.12895	3.38	0.04467	0.04576	0.04069
12.64	0.06674	0.07327	0.05470	4.04	0.02054	0.02124	0.01730
15.13	0.02601	0.02883	0.01736	4.84	0.00744	0.00785	0.00545
17.01	0.01233	0.01372	0.00662	5.35	0.00378	0.00403	0.00244
21.15	0.00189	0.00248	0.00060	6.62	0.00067	0.00069	0.00025

K	Design iii			K	Design iv		
	Sim.Exact	Saddlepoint	Normal		Sim.Exact	Saddlepoint	Normal
38.54	0.74901	0.87109	0.32694	5.31	0.06502	0.06868	0.05976
48.97	0.37479	0.44686	0.09004	6.26	0.03071	0.03308	0.02619
62.72	0.14939	0.18295	0.01227	7.40	0.01164	0.01271	0.00849
72.40	0.07951	0.09688	0.00245	8.25	0.00553	0.00604	0.00340
98.02	0.01571	0.01771	0.00001	9.95	0.00109	0.00126	0.00044

Table 4.6 Estimation of ES of the portfolios based on GH distributions

K	Design i			K	Design ii		
	Sim.Exact	Saddlepoint	Normal		Sim.Exact	Saddlepoint	Normal
10.55	13.4005	13.6114	13.1215	3.38	4.2740	4.3050	4.1997
12.64	15.3069	15.5547	14.9415	4.04	4.8653	4.9140	4.7789
15.13	17.7267	17.9329	17.1707	4.84	5.5862	5.6713	5.4950
17.01	19.4799	19.7697	18.8942	5.35	6.1046	6.1636	5.9562
21.15	23.0384	23.8615	22.7399	6.62	7.2851	7.4536	7.1343

K	Design iii			K	Design iv		
	Sim.Exact	Saddlepoint	Normal		Sim.Exact	Saddlepoint	Normal
38.54	53.5198	56.2900	47.2594	5.31	6.6142	6.6910	6.5172
48.97	63.9626	67.1352	56.5070	6.26	7.4839	7.5576	7.3397
62.72	77.6558	81.5241	69.0668	7.40	8.5686	8.6483	8.3688
72.40	88.3020	91.6870	78.0985	8.25	9.3577	9.4750	9.1405
98.02	113.7292	118.5799	102.4672	9.95	11.0409	11.2194	10.7131

5. 결론

GH분포는 큰 첨도와 왜도를 가지는 다양한 분포를 포괄하며, 금융 자료의 적합에 매우 유용한 분포이다. 본 논문에서는 GH 분포에 기초한 선형 포트폴리오에 대해 VaR과 ES 등의 위험측도에 대한 안장점근사를 수행하였다. 다양한 모의실험을 통해 제안된 안장점근사가 기존 정규근사에 비해 매우 우수함을 확인하였다. 본 연구에서는 서로 독립인 가정하에서의 선형 포트폴리오를 고려하였으나, 다변량 GH 분포에 기초한 연관된 변수들의 선형 및 이차형식 포트폴리오에 대한 연구가 필요하다.

References

- Antonov, A., Mechkov, H. and Misirpashaev, T. (2005). *Analytical techniques for synthetic CDOs and credit default risk measures*, Technical Report, Numerix, New York.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. and Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, **9**, 203-228.
- Barndorff-Nielsen, O. E. (1977). Exponentially decreasing distributions for the logarithm of the particle size. *Proceedings of the Royal Society, London A. Mathematical and Physical Sciences*, **353**, 401-419.
- Barndorff-Nielsen, O. E. and Blaesild, P. (1981). Hyperbolic distributions and ramifications: Contributions to theory and application. *Statistical Distributions in Scientific Work*, **4**, 19-44.
- Barndorff-Nielsen, O. E., Blaesild, P., Jensen, J. L. and Sorensen, M. (1985). *The fascination of sand*, In A.C. Atkinson, S. E. Fienberg (eds), *A Celebration of Statistics*, 57-87, Springer, New York.
- Barndorff-Nielsen, O. E., Jensen, J. L. and Sorensen, M. (1989). Wind shear and hyperbolic distributions. *Boundary-Layer Meteorology*, **49**, 417-431.
- Barndorff-Nielsen, O. E. and Cox, D. R. (1979). Edgeworth and Saddlepoint approximations with statistical applications. *Journal of the Royal Statistical Society B*, **41**, 279-312.
- Daniels, H. E. (1954). Saddlepoint approximations in statistics. *The Annals of Mathematical Statistics*, **25**, 631-650.
- Daniels, H. E. (1987). Tail probability approximations. *International Statistical Review*, **55**, 37-48.
- Eberlein, E. and Keller, U. (1995). Hyperbolic distributions in finance. *Bernoulli*, **1**, 281-299.
- Frey, R. and McNeil, A. (2002). VaR and expected shortfall in portfolios of dependent credit risks: conceptual and practical insights. *Journal of Banking and Finance*, **26**, 1317-1334.
- Hu, W. (2005). *Calibration of multivariate generalized hyperbolic distributions using the EM algorithm, with applications in risk management, portfolio optimization, and portfolio credit risk*, Ph.D. Thesis, Florida State University.
- Hu, W. and Kercheval, A. (2007). Risk management with generalized hyperbolic distributions, *Proceeding of the Fourth IASTED International Conference on Financial Engineering and Applications*, 19-24.
- Huang, X. and Oosterlee C. W. (2009). *Saddlepoint approximations for expectations*, Delft University of Technology, Faculty of Electrical and Engineering, Mathematics and Computer Science, Delft Institute of Applied Mathematics, Netherlands.
- Luethi, D. and Breymann, W. (2011). *R package 'ghyp'*, <http://cran.r-project.org>.
- Lugannani, R. and Rice, S. (1980). Saddlepoint approximations for the distribution of the sum of independent random variables. *Advances in Applied Probability*, **12**, 475-490.
- Na, J. H. and Yu, H. K. (2013). Saddlepoint approximation for distribution function of sample mean of skew-normal distribution. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **24**, 1211-1219.
- Rogers, L. C. G. and Zane, O. (1999). Saddlepoint approximations to option prices. *The Annals of Applied Probability*, **9**, 493-503.
- Scott, D. (2009). *R package 'HyperbolicDist'*, <http://cran.r-project.org>.
- Scott, D. (2015). *R package 'GeneralizedHyperbolic'*, <http://cran.r-project.org>.
- Yang, J., Hurd, T. and Zhang, X. (2006). Saddlepoint approximation method for pricing CDOs, *Journal of Computational Finance*, **10**, 1-20.
- Yu, H. K. and Na, J. H. (2014). Saddlepoint approximations for the risk measures of portfolios based on skew-normal risk factors. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **25**, 1171-1180.

Saddlepoint approximations for the risk measures of linear portfolios based on generalized hyperbolic distributions

Jonghwa Na¹

¹Department of Information and Statistics, Chungbuk National University

Received 9 May 2016, revised 7 July 2016, accepted 13 July 2016

Abstract

Distributional assumptions on equity returns play a key role in valuation theories for derivative securities. Elberlein and Keller (1995) investigated the distributional form of compound returns and found that some of standard assumptions can not be justified. Instead, Generalized Hyperbolic (GH) distribution fit the empirical returns with high accuracy. Hu and Kercheval (2007) also show that the normal distribution leads to VaR (Value at Risk) estimate that significantly underestimate the realized empirical values, while the GH distributions do not. We consider saddlepoint approximations to estimate the VaR and the ES (Expected Shortfall) which frequently encountered in finance and insurance as measures of risk management. We supposed GH distributions instead of normal ones, as underlying distribution of linear portfolios. Simulation results show the saddlepoint approximations are very accurate than normal ones.

Keywords: Expected shortfall, generalized hyperbolic distribuion, saddlepoint approximation, value at risk.

¹ Professor, Department of Information and Statistics, Chungbuk National University, Chungbuk 28644, Korea. E-mail: cherin@cbu.ac.kr