

## 論文

J. of The Korean Society for Aeronautical and Space Sciences 44(6), 492-501(2016)

DOI: <http://dx.doi.org/10.5139/JKSAS.2016.44.6.492>

ISSN 1225-1348(print), 2287-6871(online)

## IMU 탑재 위치 및 유도탄 무게 중심 변화율에 따른 Three-Loop 조종 알고리즘 안정성 분석

권혁훈\*, 김윤환, 박봉균

### Stability Analysis of Three-Loop Autopilot with respect to IMU Position and C.G Variation Rate in Guided Missiles

Hyuck-Hoon Kwon\*, Yoon-Hwan Kim and Bong-Gyun Park

LIG Nex1

#### ABSTRACT

Three-Loop autopilot is generally used for the acceleration control of guided missiles. Because the acceleration command to the three-loop autopilot is given as values at the center of gravity, feedback information of IMU should be obtained at the same position. However, the position of IMU might not be located at the center of gravity due to the sub-system assignment. This paper presents the stability analysis of three-loop autopilot with respect to the arbitrary position of IMU and variation rate of center of gravity. Gain and phase margins are calculated for several trim points for general anti-tank missiles.

#### 초 록

유도탄 가속도 제어에 일반적으로 널리 사용되는 Three-Loop 조종 알고리즘은 유도탄에 탑재된 IMU에서 제공되는 가속도 및 각속도 정보를 사용한다. Three-Loop 조종 알고리즘에 입력되는 가속도 명령은 유도탄의 무게 중심에서 발생하는 가속도로 주어지기 때문에 IMU에서 획득되는 정보 역시 무게 중심에서의 값으로 주어져야 한다. 하지만, 유도탄의 내부 배치 설계나 추진기관의 연소 등에 의하여 IMU가 유도탄의 무게 중심이 아닌 임의의 위치에 배치되는 경우가 대부분이다. 본 논문에서는 Three-Loop 조종 알고리즘에서 피드백되는 가속도 정보가 유도탄의 무게 중심이 아닌 임의의 위치에서 획득된 값일 경우, IMU 탑재 위치 및 유도탄 무게 중심 변화율이 유도탄 조종 알고리즘 안정성에 미치는 영향을 분석하였다. 일반적인 대전차 유도탄에 대하여 이득 및 위상 여유 분석을 수행하였다.

**Key Words :** IMU Position(IMU 탑재 위치), Three-Loop Autopilot(Three-Loop 조종 알고리즘), Stability Analysis(안정성 분석), Variation Rate of C.G.(무게 중심 변화율)

† Received : October 26, 2015      Accepted : May 24, 2016

\* Corresponding author, E-mail : [hkhkwon22@lignex1.com](mailto:hkhkwon22@lignex1.com)

## I. 서 론

일반적인 STT(Skid-To-Turn) 유도탄은 비례항법유도 등의 유도법칙에서 생성되는 가속도 명령을 추종하는 조종 알고리즘(Autopilot)을 사용한다. 가속도 제어 알고리즘 중 가장 널리 사용되는 Three-Loop 조종 알고리즘은 유도탄에 탑재된 IMU에서 제공되는 가속도 및 각속도 정보를 이용한다[1~3]. 이 때 유도 알고리즘에서 산출된 가속도 명령은 일반적으로 유도탄 무게 중심(C.G.)에서 발생하는 가속도로 주어지기 때문에 피드백되는 IMU 가속도 값은 무게 중심에서의 값이어야 한다. 하지만, 유도탄 내부의 공간 제약과 다양한 구성품들의 배치로 인하여 IMU를 정확히 유도탄 무게 중심에 배치하기는 현실적으로 힘들다. 또한, IMU를 정확히 연소 전이나 연소 후의 유도탄 무게 중심에 탑재한다 하더라도 추진제가 연소됨에 따라 무게 중심 위치가 지속적으로 변하기 때문에, 정확한 유도탄 무게 중심에 IMU를 탑재하기는 어렵다. 따라서, 임의의 위치에 배치되는 IMU 측정 값을 유도탄 무게 중심에서의 값으로 변환하여 사용해야 하는데, 이를 위해서는 유도탄의 각가속도 등의 추가적인 정보가 요구된다. 하지만, 이와 같은 정보는 탑재 센서로부터 직접적으로 획득할 수 없기 때문에 필터 설계 등의 추가적인 작업이 필요하고, 이에 따라 정확성이 저하될 가능성이 있다. 본 논문에서는 유도탄의 무게 중심이 아닌 임의의 위치에서의 가속도 값이 사용되었을 경우, IMU 위치 및 유도탄 무게 중심 변화율이 유도탄 Three-Loop 조종 알고리즘의 안정성에 미치는 영향을 분석하였다. 또한, IMU를 유도탄 무게 중심의 앞 쪽이나 뒤 쪽에 배치한 후, 조종 알고리즘에서 발생하는 안정성 변화에 대한 시뮬레이션을 수행하였다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. II장에서는 임의의 위치에서 획득된 가속도 값을 사용한 Three-Loop 조종 알고리즘의 개루프(Open-Loop) 전달함수를 기술한다. III장에서는 탑재 위치와 무게 중심 변화율에 대한 안정성 분석을 각각 수행하였다. IV장에서는 일반적인 대전차 유도탄을 대상으로 안정성 분석을 수행하였고, V장에서는 분석 내용을 정리하였다.

## II. Three-Loop 조종 알고리즘

본 장에서는 유도탄 가속도 제어에서 일반적

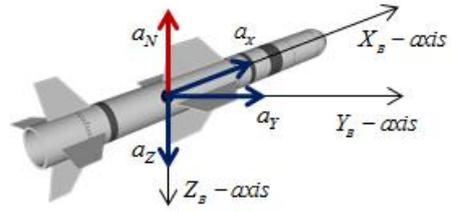


Fig. 1. Body Coordinate

으로 사용되는 Three-Loop 조종 알고리즘을 기술하고, 임의의 위치에서 획득한 가속도를 사용한 개루프 전달함수를 유도하였다.

### 2.1 조종 알고리즘 구조

본 논문에는 Fig. 1과 같이 피치/요 방향 대칭인 꼬리 날개 제어 방식의 유도탄을 고려하였다.  $X_B, Y_B, Z_B$ 는 각각 유도탄의 동체 좌표축을 의미하고,  $a_x, a_y, a_z$ 는 각 축 방향에서의 가속도를 나타낸다.  $a_N$ 은 유도탄의 수직 방향 가속도로 동체 좌표계의  $a_z$ 와 반대 방향을 나타낸다.

선형화된 유도탄 종축 모델을 기반으로 무게 중심에서의 수직방향 가속도 및 피치 각속도와 조종면 입력 간의 전달함수는 다음과 같이 기술된다[1].

$$\frac{a_N}{\delta}(s) = K_1 \left( 1 - \frac{1}{w_z^2} s^2 \right) / \left( 1 + \frac{2\xi_{AF}}{w_{AF}} s + \frac{1}{w_{AF}^2} s^2 \right) \quad (1)$$

$$\frac{\dot{\theta}}{\delta}(s) = K_3 (1 + T_\alpha s) / \left( 1 + \frac{2\xi_{AF}}{w_{AF}} s + \frac{1}{w_{AF}^2} s^2 \right)$$

where

$$K_1 = -\frac{V_M(M_\alpha Z_\delta - Z_\alpha M_\delta)}{M_\alpha}, \quad K_3 = \frac{K_1}{V_M}$$

$$w_z = \sqrt{\frac{M_\alpha Z_\delta - Z_\alpha M_\delta}{Z_\delta}}, \quad T_\alpha = \frac{M_\delta}{M_\alpha Z_\delta - Z_\alpha M_\delta}$$

$$w_{AF} = \sqrt{-M_\alpha}, \quad \xi_{AF} = \frac{Z_\alpha \omega_{AF}}{2M_\alpha}$$

여기서,  $\omega_{AF}, \xi_{AF}, V_M, \dot{\theta}$ 은 각각 유도탄의 고유주파수, 댐핑계수, 유도탄 속도, 피치 각속도를 나타낸다.  $\alpha$ 와  $\delta$ 는 받음각과 조종면 변위를 의미하며,  $Z_\alpha, M_\alpha$ 는 각각 받음각에 대한 종축 힘과 모멘트 미계수를,  $Z_\delta, M_\delta$ 는 각각 조종면 변위에 대한 종축 힘과 모멘트 미계수를 나타낸다.

일반적인 Three-Loop 조종 알고리즘 구조는 Fig. 2와 같이 3개의 루프와 4개의 제어 이득( $K_{DC}, K_A, \omega_L, K_R$ )으로 이루어져 있다. Three-Loop 조종 알고리즘은 IMU로부터 측정된 각속도 및

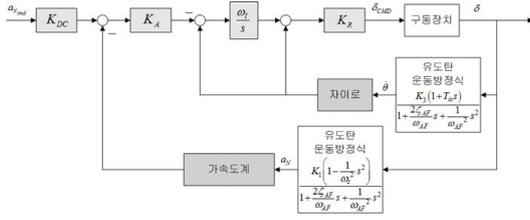


Fig. 2. Three-Loop Autopilot

가속도를 기반으로 댐핑, 시정수, 이득 교차주파수(Gain Crossover Frequency)를 설정하여 시스템 응답 특성을 설계 요구사항에 부합하도록 조정할 수 있다.

2.2 무게 중심에서의 전달함수

조종 알고리즘의 안정성을 분석하기 위해서는 개루프 전달함수의 주파수 응답 특성을 확인하는 것이 요구된다. 개루프 전달함수는 Fig. 2와 같은 폐루프 내 특정 위치에서의 입력에 대한 출력 특성을 나타내며, 목적에 따라 설계자가 조정할 수 있는 변수가 있는 곳에서 산출하는 것이 일반적이다. 특히, 음의 피드백이 적용된 제어 루프에서는 입력 대비 출력이 반대로 나타나기 때문에 이를 고려하여야 한다[1]. 본 논문에서는 구동장치 모델 앞 단에서의 입출력 특성을 확인하였으며, 무게 중심에서의 Three-Loop 조종 알고리즘의 개루프 전달함수는 다음과 같다. 단, IMU 모델(가속도계 및 자이로 모델)과 구동장치 모델은 제외되었다.

$$HG_{CG}(s) = -K_0 \frac{\left(1 + \frac{2\xi_0}{\omega_0}s + \frac{1}{\omega_0^2}s^2\right)}{\left[s\left(1 + \frac{2\xi_{AF}}{\omega_{AF}}s + \frac{1}{\omega_{AF}^2}s^2\right)\right]} \quad (2)$$

where

$$K_0 = K_R \omega_I K_A \left(\frac{K_3}{K_A} + K_1\right)$$

$$\frac{2\xi_0}{\omega_0} = \frac{(K_3 + \omega_I K_3 T_\alpha)}{(\omega_I K_3 + K_A \omega_I K_1)}$$

$$\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{\left[K_3 T_\alpha - \left(\frac{K_A \omega_I K_1}{\omega_z^2}\right)\right]}{(\omega_I K_3 + K_A \omega_I K_1)}$$

여기서,  $\omega_0$ ,  $\xi_0$ 는 각각 개루프 전달함수의 영점 주파수(zero frequency)와 영점 댐핑계수(zero damping coefficient)를 나타낸다.

2.3 임의의 위치에서의 전달함수

IMU가 유도탄의 무게 중심이 아닌 임의의 위

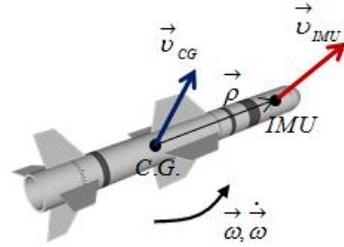


Fig. 3. IMU Position

치에 탑재되었을 경우에는 다음 식과 같이 유도탄의 각속도 및 각가속도가 유도탄 가속도에 영향을 미친다.

$$\vec{v}_{IMU} = \vec{v}_{CG} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} \quad (3)$$

$$\vec{a}_{IMU} = \vec{a}_{CG} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$$

where

$$\vec{a}_{IMU} = a_{X_{IMU}} \vec{i}_B + a_{Y_{IMU}} \vec{j}_B + a_{Z_{IMU}} \vec{k}_B$$

$$\vec{a}_{CG} = a_{X_{CG}} \vec{i}_B + a_{Y_{CG}} \vec{j}_B + a_{Z_{CG}} \vec{k}_B$$

$$\vec{\omega} = p \vec{i}_B + q \vec{j}_B + r \vec{k}_B$$

$$\vec{\rho} = \rho_X \vec{i}_B + \rho_Y \vec{j}_B + \rho_Z \vec{k}_B$$

여기서,  $\vec{v}_{CG}$ ,  $\vec{v}_{IMU}$ 는 Fig. 3에 나타낸 것처럼 무게 중심과 IMU 탑재 위치에서의 속도를 나타내고,  $\vec{a}_{CG}$ ,  $\vec{a}_{IMU}$ 는 무게 중심과 IMU 탑재 위치에서의 가속도를 나타낸다.  $\vec{\omega}$ 와  $\dot{\vec{\omega}}$ 는 유도탄의 각속도와 각가속도이며,  $\vec{\rho}$ 는 무게 중심에서 IMU 탑재 위치까지의 거리를 의미한다.

일반적으로 IMU는 유도탄의 중심축 위에 장착하기 때문에  $Y_B$ -축 및  $Z_B$ -축보다  $X_B$ -축 방향으로 떨어진 거리가 크다. 따라서,  $\rho_Y = \rho_Z = 0$ 으로 가정하고 위 식을 세 축 방향으로 나누어 기술하면, 다음과 같다.

$$a_{X_{IMU}} = a_{X_{CG}} - (q^2 + r^2)\rho_X \quad (4)$$

$$a_{Y_{IMU}} = a_{Y_{CG}} + (\dot{r} + pq)\rho_X + r\dot{\rho}_X$$

$$a_{Z_{IMU}} = a_{Z_{CG}} + (-\dot{q} + pr)\rho_X - q\dot{\rho}_X$$

또한, 롤 안정화를 위하여 발사 초기부터 롤 각속도 제어를 수행하여 롤 각속도가 0으로 유지된다고 가정하면 위 식은 다음과 같이 기술된다.

$$a_{X_{IMU}} = a_{X_{CG}} - (q^2 + r^2)\rho_X \quad (5)$$

$$a_{Y_{IMU}} = a_{Y_{CG}} + \dot{r}\rho_X + r\dot{\rho}_X$$

$$a_{Z_{IMU}} = a_{Z_{CG}} - q\dot{\rho}_X - q\rho_X$$

피치/요 방향 대칭인 일반적인 유도탄에서는

피치와 요 방향으로 동일한 조종 알고리즘을 적용하기 때문에 본 연구에서는 피치 방향의 조종 알고리즘 설계 결과를 기반으로 IMU 위치 영향성 분석을 수행하고자 한다. 임의의 위치에서의 유도탄 수직 방향 가속도 전달함수는 식 (5)를 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{a_{N_{IMU}}}{\delta}(s) = \frac{a_{N_{CG}}}{\delta}(s) + s \frac{q}{\delta}(s) \rho_X + \frac{q}{\delta}(s) \dot{\rho}_X \quad (6)$$

식 (6)에 식 (1)의 전달함수를 대입하면, 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} \frac{a_{N_{IMU}}}{\delta}(s) &= K_1 \left( 1 - \frac{1}{w_z^2} s^2 \right) / \left( 1 + \frac{2\xi_{AF}}{w_{AF}} s + \frac{1}{w_{AF}^2} s^2 \right) \\ &+ \left\{ s K_3 (1 + T_\alpha s) / \left( 1 + \frac{2\xi_{AF}}{w_{AF}} s + \frac{1}{w_{AF}^2} s^2 \right) \right\} \rho_X \\ &+ \left\{ K_3 (1 + T_\alpha s) / \left( 1 + \frac{2\xi_{AF}}{w_{AF}} s + \frac{1}{w_{AF}^2} s^2 \right) \right\} \dot{\rho}_X \\ &= \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2}{\left( 1 + \frac{2\xi_{AF}}{w_{AF}} s + \frac{1}{w_{AF}^2} s^2 \right)} \end{aligned} \quad (7)$$

where

$$\begin{aligned} b_0 &= K_1 + K_3 \dot{\rho}_X \\ b_1 &= K_3 (\rho_X + T_\alpha \dot{\rho}_X) \\ b_2 &= (K_3 T_\alpha \rho_X - K_1 / w_z^2) \end{aligned}$$

이제 위 식을 기반으로 Three-Loop 조종 알고리즘의 개루프 전달함수를 다음과 같이 기술할 수 있다.

$$HG_{IMU}(s) = -K_{IMU} \frac{\left( 1 + \frac{2\xi_{IMU}}{\omega_{IMU}} s + \frac{1}{\omega_{IMU}^2} s^2 \right)}{\left[ s \left( 1 + \frac{2\xi_{AF}}{\omega_{AF}} s + \frac{1}{\omega_{AF}^2} s^2 \right) \right]} \quad (8)$$

where

$$\begin{aligned} K_{IMU} &= K_R \omega_I K_A \left\{ \frac{K_3}{K_A} + (K_1 + K_3 \dot{\rho}_X) \right\} \\ \frac{2\xi_{IMU}}{\omega_{IMU}} &= \frac{K_3 (1 + \omega_I T_\alpha) + K_A \omega_I K_3 (\rho_X + T_\alpha \dot{\rho}_X)}{\left\{ \omega_I K_3 + K_A \omega_I (K_1 + K_3 \dot{\rho}_X) \right\}} \\ \frac{1}{\omega_{IMU}^2} &= \frac{\left[ K_3 T_\alpha - \left( \frac{K_A \omega_I K_1}{\omega_z^2} \right) + K_3 K_A T_\alpha \omega_I \rho_X \right]}{\left\{ \omega_I K_3 + K_A \omega_I (K_1 + K_3 \dot{\rho}_X) \right\}} \end{aligned}$$

식 (8)은 임의의 IMU 탑재 위치에서 획득한 가속도 정보를 사용한 개루프 전달함수로서, 추진제 연소에 의한 무게 중심 변화율의 영향도 포함되어 있다.  $\rho_X = \dot{\rho}_X = 0$ 일 경우, 위 식은 무게

중심에서의 개루프 전달함수인 식 (2)와 동일함을 확인할 수 있다.

### III. IMU 위치에 따른 안정성 분석

본 장에서는 앞에서 산출한 개루프 전달함수를 기반으로 IMU 위치에 따른 위상 및 이득 여유 영향성을 분석하였다.

#### 3.1 탑재 위치 영향성 분석

우선 무게 중심 변화율인  $\dot{\rho}_X$ 를 0으로 가정하고, 무게 중심에서 IMU 탑재 위치까지의 거리인  $\rho_X$ 의 영향성을 확인하였다. 식 (2)와 식 (8)을 비교하여 무게 중심에서의 결과와 임의의 탑재 위치에서의 결과를 비교하면 다음과 같다.

$$\frac{2\xi_{IMU_i}}{\omega_{IMU_i}} = \frac{2\xi_0}{\omega_0} + K_{CG} \rho_X \quad (9)$$

$$\frac{1}{\omega_{IMU_i}^2} = \frac{1}{\omega_0^2} + K_{CG} T_\alpha \rho_X$$

$$\text{where } K_{CG} = \left( \frac{K_3 K_A}{K_3 + K_1 K_A} \right)$$

이를 영점 주파수와 영점 댐핑계수의 관계로 다시 정리하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \omega_{IMU_i} &= \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + K_{CG} T_\alpha \omega_0^2 \rho_X}} \\ \xi_{IMU_i} &= \frac{\xi_0 + (0.5 K_{CG} \omega_0 \rho_X)}{\sqrt{1 + K_{CG} T_\alpha \omega_0^2 \rho_X}} \\ &\approx \frac{\xi_0}{\sqrt{1 + K_{CG} T_\alpha \omega_0^2 \rho_X}} \text{ if } |0.5 K_{CG} \omega_0 \rho_X| \ll 1 \end{aligned} \quad (10)$$

꼬리 날개 방식의 안정한 유도탄은 일반적으로 다음과 같은 공력 특성을 나타낸다[1].

$$\omega_{AF} > 0, \omega_z > 0, T_\alpha > 0 \quad (11)$$

식 (9)에서 정의한  $K_{CG}$ 는 식 (1)에 의하여 다음과 같이 계산되는데, Three-Loop 조종 알고리즘 이득  $K_A$ 에 의하여 그 부호가 결정된다.

$$K_{CG} = \frac{K_3 K_A}{K_3 + K_1 K_A} = \frac{K_A}{1 + V_M K_A} \quad (12)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K_{CG} \geq 0 & \text{if } K_A \geq 0 \text{ or } K_A < -\frac{1}{V_M} \\ K_{CG} < 0 & \text{if } -\frac{1}{V_M} < K_A < 0 \end{cases}$$

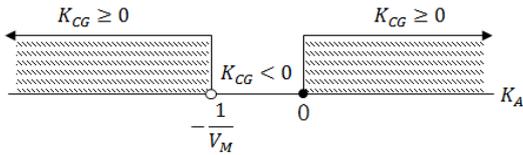


Fig. 4. Sign of KCG w.r.t KA

Figure 4는  $K_A$  값에 따른  $K_{CG}$ 의 변화를 나타낸 그림인데, 유도탄의 속도가 증가할수록  $K_{CG}$ 가 음수가 되는 구간이 매우 작아짐을 알 수 있다.  $K_A$ 는 설계자에 의해 조정이 가능한 제어 이득이므로 본 연구에서는 양수라고 가정하였다.

식 (10)을 사용하여 IMU 탑재 위치에 따른 개루프 전달함수를 나타내면 다음과 같다.

$$HG_1(s) \approx -K_0 \frac{\left(1 + \frac{2\xi_0}{\omega_0}s + \frac{1+k_1\omega_0^2}{\omega_0^2}s^2\right)}{\left[s\left(1 + \frac{2\xi_{AF}}{\omega_{AF}}s + \frac{1}{\omega_{AF}^2}s^2\right)\right]} \quad (13)$$

where  $k_1 = K_{CG}T_a\rho_X$

식 (2)와 비교하면  $\rho_X$ 가 개루프 전달함수의 분자에만 존재하기 때문에 분자 항에서의 위상 및 이득 변화를 파악하면 전체적인 안정도 변화를 확인할 수 있다. 분자항의 위상 및 이득 변화는 주파수에 따라 식 (14)와 같이 계산할 수 있고,  $\rho_X$ 가 0보다 크면 위상이 증가하고 0보다 작으면 위상이 감소함을 알 수 있다. 이득의 경우에는 주파수가  $\omega_1\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{1+k_1\omega_0^2}}\right)$ 를 기준으로 큰 주파수에서 증가하고 작은 주파수에서 감소한다.  $\rho_X$ 에 따른 이득 교차 주파수는 식 (15)와 같이 계산할 수 있는데,  $\rho_X$ 가 0보다 크면 이득 교차 주파수가 증가하고  $\rho_X$ 가 0보다 작으면 이득 교차 주파수가 감소함을 알 수 있다.

$$P_{HG_1} \approx \tan^{-1} \frac{\frac{2\xi_0}{\omega_0}\omega}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - k_1\omega^2\right)} - \tan^{-1} \frac{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{AF}^2}\right)}{-\frac{2\xi_{AF}}{\omega_{AF}}\omega}$$

$$G_{HG_1} \approx 10\log_{10} \left[ \left(\frac{2\xi_0}{\omega_0}\omega\right)^2 + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - k_1\omega^2\right)^2 \right] \quad (14)$$

$$-10\log_{10} \left[ \left(\frac{2\xi_{AF}}{\omega_{AF}}\omega\right)^2 + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{AF}^2}\right)^2 \right] + 20\log_{10}(-K_0)$$

$$\omega_{CR_0} \approx -\frac{K_0\omega_{AF}^2}{\omega_0^2} \quad (15)$$

$$\omega_{CR_{IMU1}} \approx -\frac{K_0\omega_{AF}^2}{\omega_{IMU1}^2} = (1+k_1\omega_0^2)\omega_{CR_0}$$

$k_1$ 에 따라 이득 교차 주파수가 증가한다는 것은 이득 교차 주파수 부근의 이득 선도가 증가함을 의미하고 이는 이득 교차 주파수가  $\omega_1$ 보다 크다는 것을 알 수 있다. 식 (14)와 식 (15)는 IMU가 유도탄 무게 중심의 앞 쪽에 탑재되면 시스템의 위상과 이득 교차 주파수가 증가하고, IMU가 유도탄 무게 중심 뒤 쪽에 탑재되면 시스템의 위상과 이득 교차 주파수가 감소됨을 의미한다. Fig. 5는 IMU 위치에 따른 개루프 전달함수의 보드 선도를 나타내는데, 분석 결과와 동일함을 확인할 수 있다.

하지만, 지금까지 분석한 내용은 Three-Loop 조종 알고리즘에 유도탄 모델만 적용하여 산출한 결과로 가속도계, 자이로, 구동장치 모델이 고려되지 않았다. 모든 구성품들이 고려된 시스템의 안정성 분석을 수행하기 위해서는 유도탄 모델 뿐만 아니라 각 구성품 모델에 대한 위상 및 이득 선도 변화를 확인해야 한다. 만일, IMU가 유도탄 무게 중심 앞 쪽에 탑재된다면 유도탄 모델의 위상 및 이득과 이득 교차 주파수가 증가하는 반면, 2차 시스템으로 가정된 IMU(가속도계 및 자이로) 및 구동장치의 위상은 주파수가 증가함에 따라 감소한다. 또한, IMU 및 구동장치의 이득은 댐핑 계수와 대역폭에 따라 증가 혹은 감소될 것이다. 따라서, 전체 시스템의 위상 및 이득 여유는 이득 교차 주파수의 변화와 더불어 발생하는 각 구성품들의 위상 및 이득 증감이 종합적으로 적용되어 결정된다.

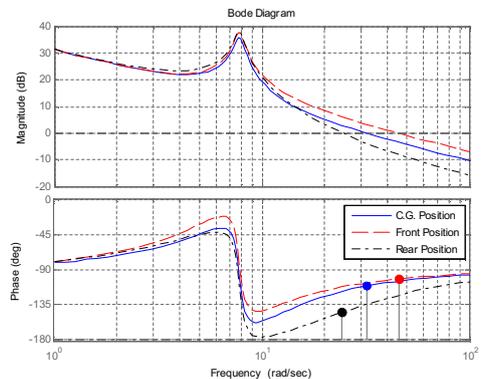


Fig. 5. Bode Plot w.r.t. IMU Position

### 3.2 무게 중심 변화율 영향성 분석

본 절에서는 무게 중심에서 IMU 탑재 위치까지의 거리인  $\rho_X$ 를 0으로 가정하고, 무게 중심의 변화율인  $\dot{\rho}_X$ 의 영향성을 확인하였다. 식 (2)와 식 (8)을 비교하여 무게 중심 변화율이 존재할 경우의 결과를 비교하면 다음과 같다.

$$\frac{2\xi_{IMU_2}}{\omega_{IMU_2}} = \frac{K_0}{K_{IMU}} \left( \frac{2\xi_0}{\omega_0} + K_{CG} T_\alpha \dot{\rho}_X \right) \quad (16)$$

$$\frac{1}{\omega_{IMU_2}^2} = \frac{K_0}{K_{IMU}} \left( \frac{1}{\omega_0^2} \right)$$

where  $K_{CG} = \left( \frac{K_3 K_A}{K_3 + K_1 K_A} \right)$

이를 영점 주파수와 영점 댐핑계수의 관계로 다시 정리하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\omega_{IMU_2} = \omega_0 \sqrt{\frac{K_{IMU}}{K_0}} = \omega_0 \sqrt{1 + K_{CG} \dot{\rho}_X}$$

$$\xi_{IMU_2} = \frac{\xi_0 + (0.5 K_{CG} T_\alpha \omega_0 \dot{\rho}_X)}{\sqrt{1 + K_{CG} \dot{\rho}_X}} \quad (17)$$

if  $|K_{CG} \dot{\rho}_X| \ll 1$ , then

$$\omega_{IMU_2} \approx \omega_0, \quad \xi_{IMU_2} \approx \xi_0 + (0.5 K_{CG} T_\alpha \omega_0 \dot{\rho}_X)$$

식 (17)을 사용하면 무게 중심 변화율에 따른 개루프 전달함수는 식 (18)과 같이 나타낼 수 있고,  $\dot{\rho}_X$ 에 따른 위상 및 이득 변화는 식 (19)와 같이 계산할 수 있다. 먼저 위상 변화를 살펴보자.  $\omega_0$ 보다 큰 주파수 영역에서는  $\dot{\rho}_X$ 가 0보다 크면 위상이 감소하고  $\dot{\rho}_X$ 가 0보다 작으면 위상이 증가하는 반면,  $\omega_0$ 보다 작은 주파수 영역에서는 정반대의 효과가 나타난다. 시스템 이득은 주파수에 상관없이  $\dot{\rho}_X$ 가 0보다 크면 증가하고  $\dot{\rho}_X$ 가 0보다 작으면 감소한다.  $\dot{\rho}_X$ 에 따른 이득 교차 주파수는 식 (20)에 나타난 것처럼  $\dot{\rho}_X$ 의 크기와 상관없이 거의 일정함을 확인할 수 있다.

$$HG_2(s) \approx -K_{IMU} \frac{\left( 1 + \frac{2\xi_0 + k_2 \omega_0}{\omega_0} s + \frac{1}{\omega_0^2} s^2 \right)}{\left[ s \left( 1 + \frac{2\xi_{AF}}{\omega_{AF}} s + \frac{1}{\omega_{AF}^2} s^2 \right) \right]} \quad (18)$$

where  $k_2 = K_{CG} T_\alpha \dot{\rho}_X$

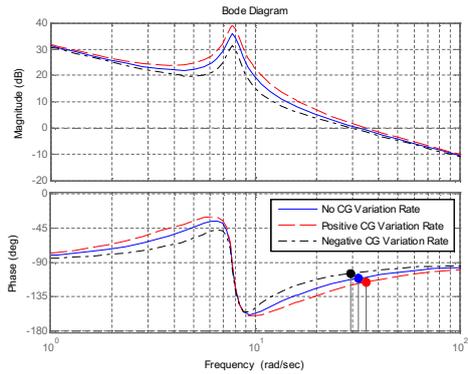


Fig. 6. Bode Plot w.r.t. C.G. Variation Rate

$$P_{HG_2} \approx \tan^{-1} \left( \frac{2\xi_0 + k_2}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right) \omega - \tan^{-1} \left( \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{AF}^2}}{-\frac{2\xi_{AF}}{\omega_{AF}} \omega} \right) \quad (19)$$

$$G_{HG_2} \approx 10 \log_{10} \left[ \left\{ \left( \frac{2\xi_0 + k_2}{\omega_0} \right)^2 + \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 \right\} \right]$$

$$- 10 \log_{10} \left[ \left( \frac{2\xi_{AF}}{\omega_{AF}} \omega \right)^2 + \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{AF}^2} \right)^2 \right]$$

$$+ 20 \log_{10} (-K_0) + 20 \log_{10} (1 + K_{CG} \dot{\rho}_X)$$

$$\omega_{CR_{IMU_2}} \approx - \frac{K_{IMU} \omega_{AF}^2}{\omega_{IMU_2}^2} = \omega_{CR_0} \quad (20)$$

Figure 6은 무게 중심 변화율의 영향을 살펴보기 위하여 매우 큰 변화율 값( $\dot{\rho}_X = \pm 10$ )을 기반으로 산출한 결과이다.

무게 중심 변화율에 따른 이득 교차 주파수의 변화가 미세하게 발생하는데, 이는  $\dot{\rho}_X$ 에 의한 영점 댐핑계수의 변화에 기인한 결과로 실질적인 무게 중심 변화율을 사용하면 이득 교차 주파수의 변화가 거의 없을 것으로 판단된다. 본 절에서 살펴본 무게 중심 변화율( $\dot{\rho}_X$ )의 부호는 추진 기관과 유도탄의 무게 중심 위치에 따라 결정되는데, 추진기관의 무게 중심이 유도탄의 무게 중심 뒤에 위치할 경우 음의  $\dot{\rho}_X$ 가 발생하고 추진기관의 무게 중심이 유도탄의 무게 중심 앞에 위치할 경우 양의  $\dot{\rho}_X$ 가 발생한다.

### IV. 유도탄 안정성 분석 결과

본 논문에서는 Table 1과 같은 특성을 나타내

Table 1. Trim Parameters for Missiles

	Phase I	Phase II
마하수	0.6	0.5
$\omega_0$	8.5616	8.4600
$\xi_0$	0.7138	0.7373
$\omega_z$	22.0107	16.7580
$\omega_{AF}$	7.7984	6.7542
$\xi_{AF}$	0.0488	0.0381
$T_\alpha$	1.4794	2.2595
$\rho_X$	0.74 (m)	0.0 (m)
$\dot{\rho}_X$	0 (m/s)	-0.02 (m/s)
$K_A$	0.0415	0.0738

는 대전차 유도탄을 대상으로 안정성 분석을 수행하였다. Phase I과 Phase II는 각각 연소 종료 후 구간과 연소 중인 구간에서의 트림 값을 나타낸다. Three-Loop 조종 알고리즘의 요구사항은 시정수 0.1초, 댐핑계수 0.7, 이득 교차 주파수 30 rad/s로 설정하였다.

구동장치 모델과 IMU 모델(자이로 및 가속도계 모델)은 다음과 같이 가정하였다.

$$TF_{ACT} = \frac{150^2}{s^2 + 2 \cdot 0.7 \cdot 150s + 150^2} \quad (21)$$

$$TF_{IMU} = \frac{400^2}{s^2 + 2 \cdot 0.7 \cdot 400s + 400^2}$$

#### 4.1 탑재 위치에 따른 안정성 분석

우선 Phase I 트림 상태에서 탑재 위치에 따른 안정성 분석을 수행하자. 3.1절에서 사용한 가정은 다음과 같이 적절하게 만족한다.

$$\left| \frac{0.5K_{CG}\omega_0\rho_X}{K_A} \right| = 0.0139 \ll 1 \quad (22)$$

$$K_A = 0.0415 > 0$$

Figure 7은  $\rho_X$  변화에 따른 이득 교차 주파수의 변화를 나타낸다. IMU가 유도탄 무게 중심 앞 쪽에 탑재되면 이득 교차 주파수가 증가함을 알 수 있다.

Figure 8은  $\rho_X$ 에 따른 Three-Loop 시스템, IMU(가속도계 및 자이로), 구동장치의 위상을 나타낸다. 구성품 모델이 제외된 Three-Loop 시스템의 위상은 이득 교차 주파수가 증가함에 따라 증가하지만, 구성품 모델의 위상은 이득 교차 주파수가 증가함에 따라 감소한다. 따라서, 구성품들이 고려된 전체 시스템의 위상 여유는 다음과 같이 Three-Loop 시스템, IMU, 구동장치의 변화

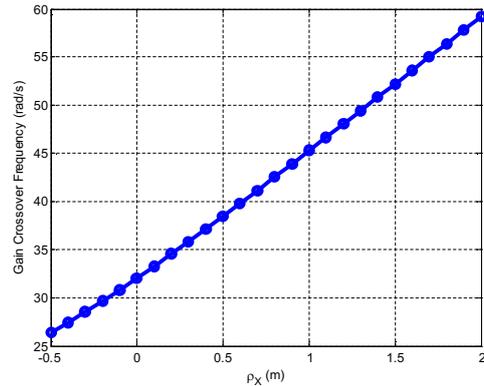


Fig. 7. Gain Crossover Frequency w.r.t. IMU Position

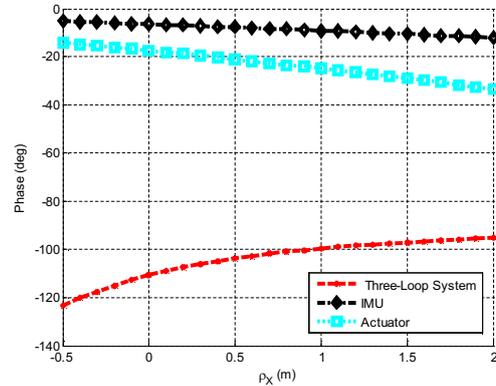


Fig. 8. Phase w.r.t. IMU Position

를 모두 고려해서 산출해야 한다.

$$PM_{TOTAL} = (P_{TL} + P_{IMU} + P_{ACT})_{@w_{CR}} + 180^\circ \quad (23)$$

여기서,  $P_{TL}$ ,  $P_{IMU}$ ,  $P_{ACT}$ 는 각각 이득 교차 주파수에서의 Three-Loop 시스템, IMU 모델, 구동장치 모델의 위상을 나타낸다.

Figure 9는 구성품들이 고려된 Three-Loop 조종 알고리즘의 위상 여유를 나타낸다. 가로선은 IMU가 유도탄의 무게 중심에 탑재되었을 경우의 위상 여유를 나타내는데, IMU가 유도탄 무게 중심 앞 쪽으로 0m에서 약 1.2m 내로 탑재되면 전체 시스템의 위상 여유가 증가함을 알 수 있다. 반면, IMU가 유도탄 무게 중심 뒤 쪽으로 탑재되면 급격하게 위상 여유가 감소한다. 네모로 굵게 표시된 점은 Phase I의 IMU 탑재 위치를 나타낸 것으로, 위상 여유가 약 2도 정도 증가함을 알 수 있다.

시스템의 이득 여유를 산출하기 위해서는 모

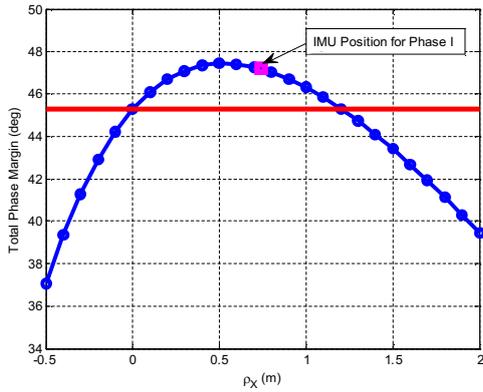


Fig. 9. Phase Margin w.r.t. IMU Position

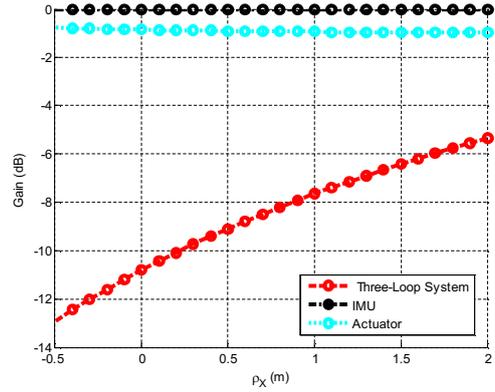


Fig. 11. Gain w.r.t. IMU Position

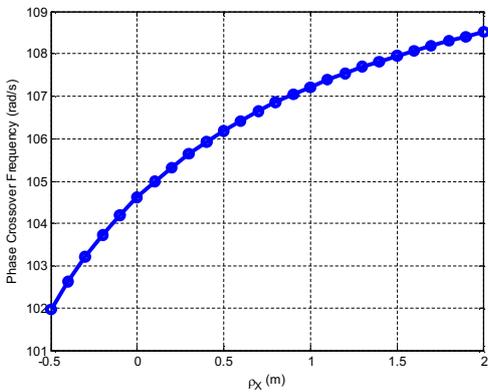


Fig. 10. Phase Crossover Frequency w.r.t. IMU Position

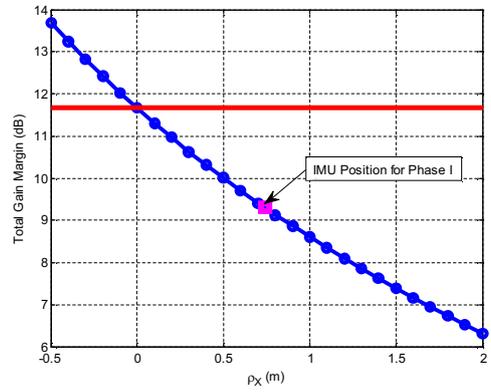


Fig. 12. Gain Margin w.r.t. IMU Position

든 구성품들을 포함한 시스템의 위상이  $-180^\circ$ 가 되는 위상 교차 주파수(Phase Crossover Frequency)를 우선 계산해야 한다.

$$-180^\circ = (P_{TL} + P_{IMU} + P_{ACT})_{@w_{PCR}} \quad (24)$$

여기서  $w_{PCR}$ 은 위상 교차 주파수를 나타낸다. Fig. 10은  $\rho_X$  변화에 따른 위상 교차 주파수를 계산한 결과로 이득 교차 주파수에 비하여 2~3 배 정도 크다. 이는 IMU 모델(가속도계 및 자이로 모델)과 구동장치 모델의 대역폭인 400 rad/s, 150 rad/s보다 작은 값으로 위상 교차 주파수에서의 가속도계 및 자이로, 구동장치 모델의 이득은 매우 작을 것으로 예상된다. 따라서, IMU 탑재 위치에 따른 이득 여유의 변화는 구성품 모델이 제외된 Three-Loop 시스템의 변화에 의해 결정될 것으로 판단되고, Fig. 11의 결과로부터 확인할 수 있다.

Figure 11은  $\rho_X$ 에 따른 Three-Loop 시스템, IMU (가속도계 및 자이로), 구동장치의 이득을 나타낸다. 구성품이 제외된 Three-Loop 시스템의 이득은 위상 교차 주파수가 증가함에 따라 증가하지만, 구성품들의 이득은 위상 교차 주파수가 증가함에 따라 아주 미미하게 감소한다. 따라서, 구성품들이 고려된 전체 시스템의 이득 여유는 구성품이 제외된 모델의 이득 변화와 유사하며 전체 시스템의 이득 여유는 Fig. 12와 같이 산출된다.

Figure 12는 구성품들이 고려된 Three-Loop 조종 알고리즘의 이득 여유를 나타낸다. 가로선은 IMU가 유도탄의 무게 중심에 탑재되었을 경우의 이득 여유를 나타내는데, IMU가 유도탄 무게 중심 앞 쪽으로 위치하면 이득 여유가 감소하고, 유도탄 무게 중심 뒤 쪽에 위치하면 이득 여유가 증가함을 알 수 있다. 네모로 굵게 표시된 점은 Phase I의 IMU 탑재 위치를 나타낸 것으로, 이득 여유가 약 2.36dB 정도 감소함을 알 수 있다.

### 4.2 무게 중심 변화율에 따른 안정성 분석

무게 중심 변화율에 대한 안정성 분석은 Phase II 트림 상태를 기준으로 수행한다. 3.2절에서 사용한 가정은 다음과 같이 적절하게 만족하는 것으로 판단된다.

$$\begin{aligned} |K_{CG}\dot{\rho}_X| &= 0.0001633 \ll 1 \\ K_A &= 0.0738 > 0 \end{aligned} \quad (25)$$

Figure 13은  $\dot{\rho}_X$  변화에 따른 이득 교차 주파수의 변화를 나타낸다.  $\dot{\rho}_X$ 에 상관없이 거의 일정한 값을 나타냄을 알 수 있다. Figure 14는  $\dot{\rho}_X$ 에 따른 Three-Loop 시스템, 가속도계 및 자이로, 구동장치의 위상을 나타낸다. 이득 교차 주파수가 증가하면서 구성품이 제외된 Three-Loop 시스템, IMU(가속도계 및 자이로), 구동장치의 위상이 감소한다.

Figure 15는 구성품들이 고려된 전체 Three-

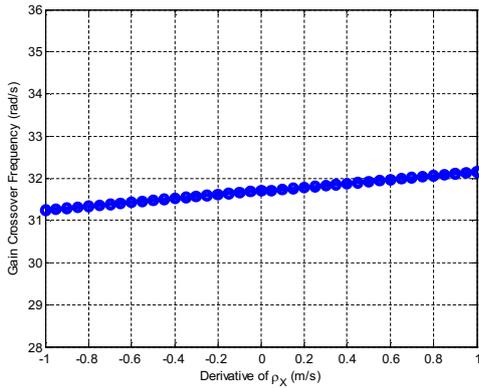


Fig. 13. Gain Crossover Frequency w.r.t. C.G. Variation Rate

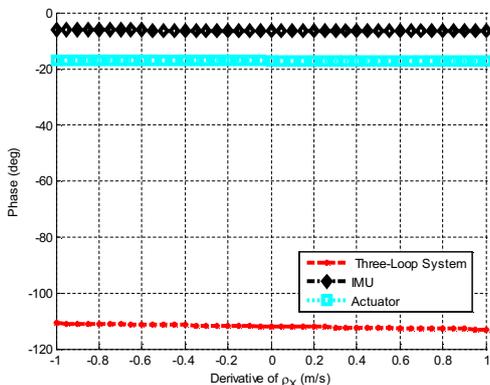


Fig. 14. Phase w.r.t. C.G. Variation Rate

Loop 조종 알고리즘의 위상 여유를 나타낸다. 가로선은 유도탄 무게 중심 변화율이 0일 경우의 위상 여유를 나타내는데, 양의 무게 중심 변화율일 경우 위상 여유가 감소하고, 음의 무게 중심 변화율일 경우 위상 여유가 증가한다. 즉, 추진기관이 유도탄 무게 중심 뒤 쪽에 배치된다면 위상 여유가 증가하고, 유도탄 무게 중심 앞 쪽에 배치된다면 위상 여유가 감소함을 알 수 있다. 네 모로 굵게 표시된 점은 Phase II의 무게 중심 변화율을 나타낸 것으로, 음의 무게 중심 변화율에 의하여 위상 여유가 약 0.03도 정도 증가함을 알 수 있다. 추진제 연소에 의한 무게 중심 변화율이 크지 않기 때문에 안정성 여유의 변화는 아주 미미함을 확인할 수 있다.

이제 무게 중심 변화율에 의한 이득 여유 변화를 살펴보자. Fig. 16은  $\dot{\rho}_X$  변화에 따른 위상 교차 주파수를 계산한 결과이다. 위상 교차 주파수는 무게 중심 변화율이 증가함에 따라 미미하

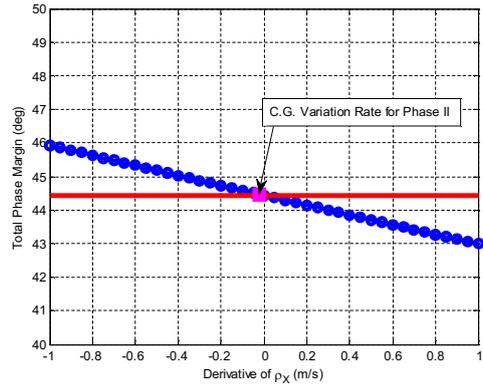


Fig. 15. Phase Margin w.r.t. C.G. Variation Rate

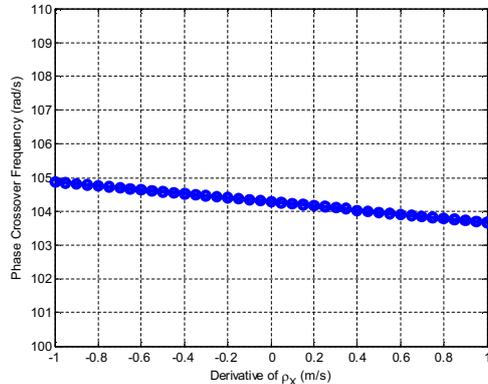


Fig. 16. Phase Crossover Frequency w.r.t. C.G. Variation Rate

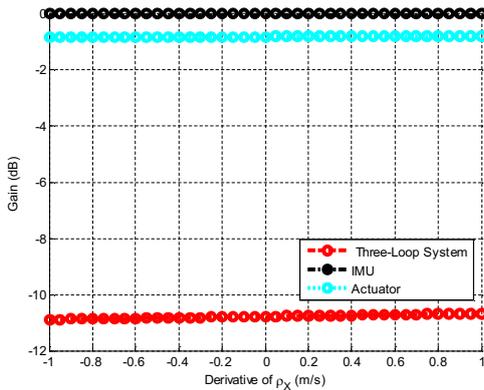


Fig. 17. Gain w.r.t. C.G. Variation Rate

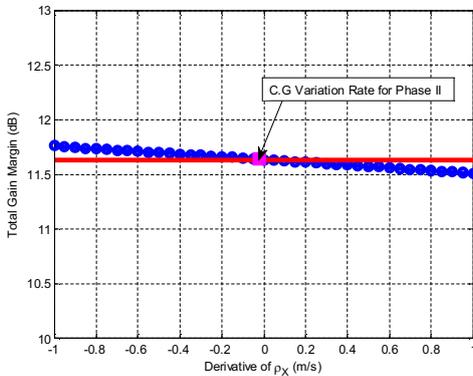


Fig. 18. Gain Margin w.r.t. C.G. Variation Rate

게 감소함을 알 수 있다.

Figure 17은  $\dot{\rho}_X$ 에 따른 Three-Loop 시스템, IMU (가속도계 및 자이로), 구동장치의 이득을 나타낸다. 구성품이 제외된 Three-Loop 시스템의 이득과 구성품들의 이득이  $\dot{\rho}_X$ 가 증가함에 따라 미세하게 증가한다. 따라서, 구성품들이 고려된 전체 시스템의 이득 여유는 Fig. 18에 나타난 것

처럼 추진기관이 유도탄 무게 중심 뒤 쪽에 배치 되면 증가하고 유도탄 무게 중심 앞 쪽에 배치 되면 감소한다. 네모로 굵게 표시된 점은 Phase II의 무게 중심 변화율을 나타낸 것으로, 이득 여유가 약 0.0025dB 정도 증가함을 알 수 있다.

## V. 결 론

본 논문에서는 IMU 탑재 위치 및 유도탄 무게 중심 변화율이 유도탄 Three-Loop 조종 알고리즘 안정성에 미치는 영향을 분석하였다. 가속도 측정 위치 및 위치 변화율에 대한 개루프 전달함수를 유도하고 대전차 유도탄에 대한 안정성 분석을 수행하였다. IMU 탑재 위치는 위상 여유 측면에서는 유도탄 무게 중심 앞 쪽에, 이득 여유 측면에서는 유도탄 무게 중심 뒤 쪽에 배치하는 편이 유리함을 확인하였다. 또한, 유도탄 무게 중심 변화율에 영향을 미치는 추진기관은 유도탄 무게 중심 뒤 편에 배치하는 편이 위상 및 이득 여유 측면에서 유리하였다.

## References

- 1) Zarchan, P., *Tactical and Strategic Missile Guidance*, 5<sup>th</sup> ed., Vol. 219, AIAA, Reston, VA, 2007, pp.461~539.
- 2) F. W. Nesline and M. L. Nesline, "Homing Missile Autopilot Response Sensitivity to Stability Derivative Variations," *Proceedings of 23<sup>rd</sup> Conference on Decision and Control*, Las Vegas, NV, Dec. 1984.
- 3) C. H. Lee, B. E. Jun and J. I. Lee, "Study of Similarity between Linear and Nonlinear Missile Autopilot via Three Loop Topology," *KSAS Spring Conference*, pp. 422-425, 2015. 04.