

論文

J. of The Korean Society for Aeronautical and Space Sciences 44(6), 477-483(2016)

DOI:http://dx.doi.org/10.5139/JKSAS.2016.44.6.477

ISSN 1225-1348(print), 2287-6871(online)

PIV 기법을 이용한 초음속 평판 경계층의 속도 분포 측정

이 혁, 김영주, 변영환*, 박수형

Velocity profile measurement of supersonic boundary layer over a flat plate using the PIV technique

Hyuk Lee, Young Ju Kim, Yung Hwan Byun* and Soo Hyung Park

Dept. of Aerospace Engineering, Konkuk University

ABSTRACT

Velocity profiles of laminar, transition and turbulent boundary layers were investigated by using Particle Image Velocimetry(PIV) measurements on the flat plate at Mach 2.96. The Schlieren visualization and PIV measurements are also used to confirm whether the oblique shock wave generated from the leading edge affects the flow field over the flat plate. The laminar velocity profile measured from the experiment was well matched with the compressible Blasius solution. The velocity profile of the transition boundary layer was well correlated with the theoretical turbulent velocity profile from near the wall and the transition began from $Re = 1.41 \times 10^6$. For the turbulent boundary layer, considering compressibility effects, the Van Driest-transformed velocity satisfies the incompressible log-law. It is found that the log region is extended farther in the wall-normal direction compared to the log region in incompressible boundary layer.

초 록

본 연구는 Particle Image Velocimetry(PIV) 기법을 이용하여 마하수 2.96의 평판에 대해 층류, 천이, 난류 경계층의 속도 분포를 측정하였다. Schlieren 가시화 기법과 PIV 기법을 이용하여 앞전에서 발생한 경사 충격파가 평판 위의 유동장에 영향을 주는지 확인하였다. 층류 경계층의 경우, 실험에서 측정한 속도 분포가 압축성 Blasius 속도 분포를 만족하였다. 천이 경계층의 속도 분포는 벽면 부근부터 이론적인 난류 속도 분포로 변했으며, $Re = 1.41 \times 10^6$ 에서 천이가 시작되었다. 난류 경계층 영역에서는 압축성 효과를 고려한 Van Driest 변환 속도가 비압축성 로그 법칙을 만족하였다. 또한 로그 구간이 끝나는 위치($y/\delta \approx 0.28$)가 비압축성 난류 경계층($y/\delta \approx 0.2$)에 비해 벽면에서 더 멀어진 것을 확인하였다.

Key Words : Particle Image Velocimetry(입자 영상 유속계), Supersonic Boundary Layer (초음속 경계층), Blasius Solution(블라지우스 해), Transition Reynolds Number(천이 레이놀즈수), Log Law(로그 법칙), Flat Plate(평판)

† Received : April 16, 2016 Revised : May 24, 2016 Accepted : May 26, 2016

* Corresponding author, E-mail : yhbyun@konkuk.ac.kr

I. 서 론

압축성 경계층은 벽면 근처에서 발생하는 점성 소산에 의해 매우 큰 온도 구배가 경계층 내에서 발달하게 된다. 추진기관 설계 시 중량을 줄이고, 추진 효율을 높이기 위해 비행체의 열하중과 마찰 하중을 정확하게 예측하는 것이 중요하다. 특히 Scramjet 내에서 발생하는 충격파와 경계층의 상호작용은 압력 손실, 유동의 불안정성 및 국지적으로 큰 열 하중을 발생시키는데, 위의 특징들은 모두 유동 박리 현상과 관련이 있다[1]. 박리 현상은 들어오는 경계층의 상태(층류/천이/난류)에 따라 달라지는데, 층류 경계층이 난류 경계층보다 박리 현상이 일어나기가 쉽다[2].

위와 같은 복잡한 유동 현상을 예측하기 위해서는 먼저 단순한 유동에 대한 더 나은 이해가 필요하다. 특히 평판에서 압축성 경계층에 대한 연구는 고전적인 주제임에도 불구하고[3-5], 최근에도 연구가 계속 진행되고 있다.

먼저 압축성 난류 경계층에 대한 이전 실험 논문을 살펴보면, Morkovin의 가설에 의해 경계층 내에서 난류 마하수의 변화가 작을 때 압축성 효과는 난류에 직접적으로 영향을 주지 않는다고 하였다[5]. 또한 압력구배가 없는 평판에서 초음속 경계층은 비압축성 경계층과 매우 유사함을 실험적으로 보여주었다[6]. 하지만 최근의 실험 결과들은 비압축성과 다른 압축성 경계층의 난류 구조를 속도 분포를 통해 보여주고 있다[7]. Lin et al.은 마하수 3일 때, 경계층 내에서 측정된 난류 마하수가 Morkovin이 제시한 값보다 작았지만, 난류 경계층 구조 중 로그 영역이 끝나는 위치가 비압축성일 때보다 더 넓어지는 등 압축성 효과를 보여주었다[8]. Robinson[9], Kistler[10], Ganapathisubramani[11]도 로그 영역이 끝나는 위치가 더 넓어진 것을 각각 확인하였다. 그러나 압축성 난류 경계층의 로그 영역이 비압축성보다 넓어진 이유에 대해서는 아직 명확하지 않다.

압축성 경계층 내에서 천이 영역을 예측하는 것은 매우 어려운 일이다[12]. 천이 영역의 위치와 크기는 마하수, 레이놀즈수, 받음각, 표면 거칠기, 표면과 자유류의 온도 비 등 영향을 끼치는 변수가 다양하기 때문이다[13]. 특히 앞전이 날카로운 평판의 경우, 실제 평판에서는 앞전에서 유한한 크기의 두께를 갖기 때문에 순압력 구배가 형성되며, 이는 상대적으로 층류가 지속되어 천이 영역에 영향을 준다. 따라서 앞전의 두께가 천이 영역과 관련된 중요한 변수로 추가된다. 초음속 난류 경계층에 비해 천이 경계층의

속도 분포를 실험한 선행 연구는 거의 없는데, 그 이유는 매우 얇은 두께의 층류 경계층, 높은 전단 속도, 고르지 못한 입자 분포 등이 있다[14]. 따라서 이미 선행 연구된 형상이라도 천이 경계층에 대한 추가적인 실험과 분석이 필요하다[15].

본 논문에서는 마하수 2.96에서 압력 구배가 없는 평판에 대해 층류, 천이, 난류 경계층의 속도 분포를 고해상도(127 pixel/mm) PIV 기법을 이용하여 측정하였다. 세부적으로는 먼저 본 연구가 진행된 풍동 조건과 실험 기법 및 모델을 설명하였다. 특히 평판 위의 유동장이 균일하고, 앞전에서 발생한 경사 충격파가 자유류에 영향을 주었는지 확인하기 위해, Schlieren 가시화 기법과 PIV 기법을 이용하였다. 다음으로 PIV 기법을 이용하여 평판 위 층류, 천이, 난류 경계층의 속도 분포를 측정하고 이론적인 층류, 난류 속도 분포와 비교하였다.

II. 실험장비 구축

2.1 풍동 조건

본 연구는 건국대학교의 MAF 불어내기식 초음속 풍동에서 진행하였다. 압축탱크 안에 135 bar의 공기를 압축하여, 약 3초 정도 풍동 실험을 진행하였다. 노즐 출구의 지름은 100 mm이며, 실험부의 크기는 길이 360 mm, 높이 200 mm, 폭 226 mm이다. 정체실에서 측정된 전온도는 287.85 K이며, 전압력은 7.62 bar이다. 실험부 내부의 마하수는 2.96이며, Pitot tube를 이용하여 측정된 실험부 내 전압력($P_{0,2}$)과 정체실 내 전압력의 비($P_{0,1}$)를 이용하여 마하수를 계산하였다. 수행한 실험의 정상유동 조건은 Table 1과 같다.

2.2 PIV 구성

본 실험에서는 Fig. 1과 같이 CCD 카메라를

Table 1. Flow conditions

Parameter	Value
M_∞	2.96
P_∞ [kPa]	22.03
T_∞ [K]	104.58
Re [m^{-1}]	6.13×10^7
U_∞ [m/s]	606.84

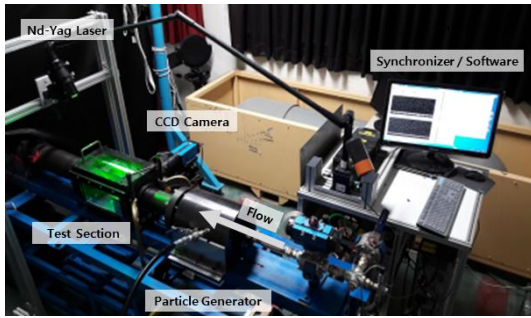


Fig. 1. Test Arrangement

Table 2. Configuration of the PIV camera

Parameter	Value
Field of view	$12.6 \times 5.5 \text{ mm}^2$
Image resolution	127.3 pixel/mm
F-number	$f_{\#} = 43$
Frame rate	8 Hz

실험부 측면에 두어 유동 방향(u)과 벽면에 수직한 방향(v)에 대한 2가지 속도 성분을 측정하였다. CCD 카메라의 해상도는 $1600 \times 1200 \text{ pixel}^2$ 이며, Frame rate을 증가시키기 위해 벽면에 수직한 방향에 대한 1200에서 700 pixels을 잘라내었다. 본 카메라는 100 mm Macro lens를 사용했으며, 최소 초점거리를 줄이기 위해 13 mm, 31 mm Extension tube를 이용하여 더욱 확대된 관측 시야($12.6 \text{ mm} \times 5.5 \text{ mm}$)를 확보하였다. 공간 해상도는 127.3 pixel/mm 이며, 전체적인 카메라 설정은 Table 2와 같다.

추적 입자는 TiO_2 를 사용했으며, 평균적으로 입자의 지름은 $0.2\sim 0.3 \mu\text{m}$, 물질량은 79.90 g/mol 이다. 광원으로는 Double-pulse Nd:YAG 레이저를 사용했으며, 레이저의 출력은 펄스 당 145 mJ 이다. 펄스 사이의 간격은 $1 \mu\text{s}$ 이며, 위 시간 동안 자유류 내 입자가 움직인 거리는 0.6 mm (77 pixel)이다. Articulated arm을 이용하여 레이저의 위치를 조정하였으며, 실린더형 렌즈를 조합하여 두께 1 mm 정도의 평면광을 만들었다.

이미지 해석을 위한 후처리 프로그램은 ILA사의 PIVview3c를 이용하였다. 경계층 내 많은 속도벡터를 측정하기 위해 얇고 긴 형태의 미소 조사 영역(Interrogation window)을 설정하였다. 가로 $308 \text{ pixel} \times$ 세로 6 pixel 크기의 미소 조사 영역을 사용했으며, 실제 크기로 환산하면 2.42

$\text{mm} \times 0.047 \text{ mm}$ 이다. 미소 조사 영역 내 overlap 비율은 50 %이며, 속도 벡터 간 간격은 유동 방향으로 1.21 mm , 벽면에 수직한 방향으로 $23.5 \mu\text{m}$ 이다.

2.3 풍동 실험 모델

본 실험에서 사용한 모델은 압력 구배가 없는 평판이다. 평판의 코드 길이는 110 mm 이며, 스펀 길이는 160 mm 이다. 평판의 재질은 철이며, 레이저로 인한 표면 반사를 줄이기 위해 평판의 윗면을 테프론 재질로 코팅하였다.

Schlieren 가시화 기법을 이용하여 평판에 대한 풍동 실험이 올바르게 진행됐는지 확인하였다. Fig. 2를 보면 평판의 앞전에서 약한 경사 충격파가 발생한 것을 볼 수 있다. 앞전에서 발생한 경사 충격파의 각도를 이용하여 마하수를 계산하였다. 마하수는 2.99이며, 위의 풍동 조건에서 Pitot tube를 이용하여 측정한 마하수와 일치하는 것을 볼 수 있다. Fig. 2의 왼쪽에 있는 경사 충격파는 노즐 출구에서 발생한 것이다. 노즐 출구에서 발생한 경사 충격파가 평판 위 경계층에 영향을 주는지 확인하기 위해 평판 위 자유류 속도를 PIV 기법을 이용하여 측정하였다.

Figure 3은 평판 위 유동장의 속도 벡터를 나

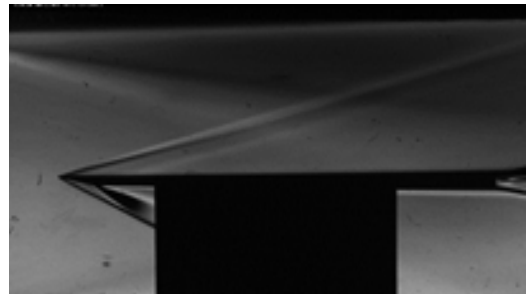


Fig. 2. Schlieren photograph of flat plate

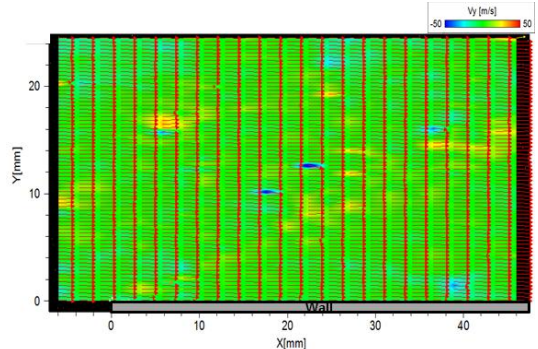


Fig. 3. Velocity vectors over flat plate

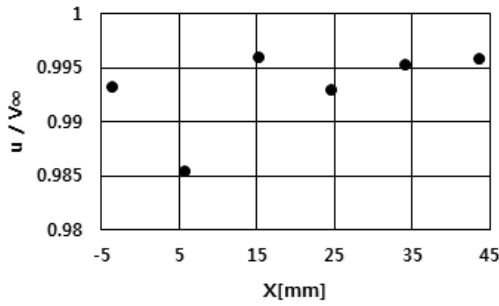


Fig. 4. Ratio of free stream velocity for the x-velocity along the flat plate

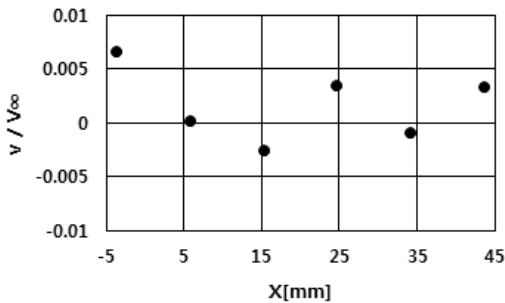


Fig. 5. Ratio of free stream velocity for the y-velocity along the flat plate

타낸 그림이며, Fig. 4와 5는 Fig. 3에서 나타난 각 지점의 속도를 이용하여 계산하였다. 평판의 앞전을 0 mm로 놓았을 때, -5 ~ 45 mm까지 10mm 간격으로 각 지점의 u , v 에 대한 자유류 속도의 비를 나타낸다. PIV 기법을 이용하여 측정한 평균 자유류 속도(V_{∞})는 605.37 m/s이며, 위의 풍동 조건에서 Pitot tube를 이용하여 측정한 자유류 속도와 일치한다. Fig. 4, 5를 보면, 유동 방향으로의 속도(u)와 벽면에 수직한 방향의 속도(v) 모두 자유류 속도를 기준으로 1% 내외로 변화하는 것을 볼 수 있다. 또한 v 속도가 자유류 속도의 1% 이하의 비중을 차지하는 것으로 보아 평판 위 속도장이 유동 방향으로 균일하며, 노즐 출구에서 발생한 경사 충격파가 평판 위 경계층에 영향을 주지 않는 것을 확인하였다.

III. 실험 결과

3.1 층류 경계층

Figure 6은 $Re = 4.04 \times 10^5$ 에서 PIV 기법을 이용하여 측정한 층류 경계층의 속도 분포를 나타낸다. 레이놀즈수는 평판의 앞전으로부터의 거

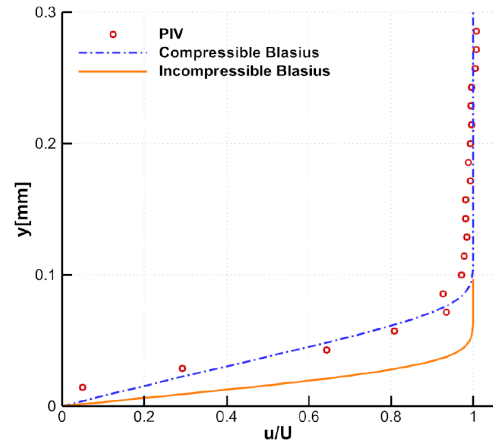


Fig. 6. Velocity profile in the laminar boundary layer

리를 기준 길이로 정의하였으며, 경계층 두께는 벽면에서 자유류 속도의 99% 지점까지의 높이를 의미한다. 실험값과 비교하기 위해 마하수 2.96일 때 압축성 Blasius 속도 분포[16]와 비압축성 Blasius 속도 분포를 같이 나타내었다. 압축성 Blasius 속도 분포는 비압축성과 달리 밀도를 변수 취급했으며, 에너지 방정식을 추가로 이용하였다.

Figure 6을 통해 압축성 효과에 의해 경계층이 두꺼워진 것을 볼 수 있으며, $u \geq 0.9u_{\infty}$ 범위에서 실험값과 압축성 Blasius 속도 분포가 상당히 유사한 경향을 나타내었다. $u \geq 0.9u_{\infty}$ 일 때, 실험값과 압축성 Blasius 속도 분포가 약간 차이는 것을 볼 수 있다. 압축성 Blasius 속도 분포가 자유류 속도에 더 빨리 도달하는 것을 볼 수 있는데, 이러한 현상은 Giepmans et al.[14]의 실험 결과에서도 동일하게 나타난다.

3.2 천이 경계층

Figure 7은 $Re = 1.23 \times 10^6 \sim 1.96 \times 10^6$ 범위에서 유동이 층류에서 천이를 거쳐 난류로 변하는 과정을 속도 분포로 나타낸 그림이다. $Re = 1.23 \times 10^6$ 에서 실험값은 전체적으로 층류 속도 분포와 유사한 경향을 볼 수 있다. $Re = 1.41 \times 10^6$ 의 경우, 벽면 부근의 속도 분포부터 이론적인 난류 속도 분포로 변하는 것을 확인할 수 있으며, $u \geq 0.7u_{\infty}$ 이후에는 다시 이론적인 층류 속도 분포와 가까워지는 것을 볼 수 있다.

$Re = 1.96 \times 10^6$ 의 실험값은 전체적으로 이론적인 난류 속도 분포와 유사하며, 특히 $u \geq 0.7u_{\infty}$ 이후의 속도 분포가 이론적인 난류 속도

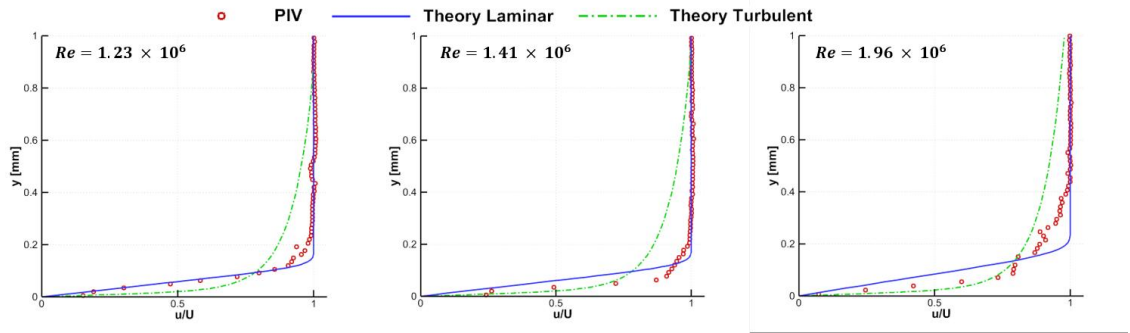


Fig. 7. Development of the transitional boundary layer along the plate

분포에 더 가까워진 것을 확인할 수 있다.

매끄러운 평판에서 자연 천이가 발생하는 레이놀즈수에 대한 선행 연구를 살펴보면, Giepman et al.[14]은 마하수 1.7일 때 천이 구간이 시작되는 $Re = 1.9 \times 10^6$ 으로 제시하였으며, Cebeci et al.[17]은 일반적인 $Re_{tr} = 3.0 \times 10^6$ 으로 나타내었다. 본 실험에서는 $Re = 1.41 \times 10^6$ 에서 천이가 시작되었으며, 이는 앞선 선행 연구와 유사한 범위의 레이놀즈수이다.

3.3 난류 경계층

Figure 8은 $Re = 4.2 \times 10^6$ 에서 무차원 변수 $y_+ = yu_\tau/v_w$, $u^+ = u_{eq}/u_\tau$ 에 관한 난류 속도 분포를 반대수(Semi-logarithmic)로 나타낸 그림이다. 먼저 마찰 속도(u_τ)를 구하기 위해 Van driest 식(1)을 사용하였다[17].

$$\frac{0.242(\sin^{-1}\alpha + \sin^{-1}\beta)}{A\sqrt{c_f(T_w/T_e)}} = 0.41 + \log R_{\tau} c_f - \omega \log \frac{T_w}{T_e} \quad (1)$$

$$\alpha = \frac{T_{aw}/T_e + T_w/T_e - 2}{[(T_{aw}/T_e + T_w/T_e)^2 - 4(T_w/T_e)]^{1/2}}$$

$$\beta = \frac{T_{aw}/T_e + T_w/T_e}{[(T_{aw}/T_e + T_w/T_e)^2 - 4(T_w/T_e)]^{1/2}}$$

$$A^2 = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{M_e^2}{T_w/T_e}$$

본 연구의 벽면 온도(T_w)는 287.85 K, 자유류의 온도(T_e)는 104.58 K이며, 이에 따른 $\alpha = 0.8$, $\beta = 0.047$, $A = 0.798$ 이다. 풍동 실험이 약 3초 정도의 매우 짧은 시간 동안 진행되기 때문에 벽면 온도는 실험하기 전 벽면 온도와 동일하다고 가정하였다. 식(1)에서 구한 항력 계수를 이용하여 마찰 속도(u_τ)를 계산하였다. 압축성 효과를 고려하기 위해, 벽면에서의 동적

점성도(v_w)와 Van Driest effective velocity(u_{eq})를 이용하여 무차원 변수 y^+ 와 u^+ 를 계산하였다 [18]. 식(2)는 PIV 실험에서 측정된 유동 방향의 속도(u)를 Van Driest effective velocity로 변환하는 과정을 보여준다.

$$u_{eq} = \frac{u_e}{a} \left(\sin^{-1} \frac{u_e}{Q} + \sin^{-1} \frac{b}{Q} \right) \quad (2)$$

$$a = \left(\frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \frac{\overline{T_e}}{\overline{T_w}} \right)^{1/2}, \quad b = \frac{\overline{T_{aw}}}{\overline{T_w}} - 1$$

$$Q = (b^2 + 4a^2)^{1/2}$$

식(2)에서 사용한 $a = 0.79$, $b = 0.07$, $Q = 1.6$ 이다. 난류 경계층과 관련된 정보는 Table 3에 요약하였다.

실험에서 측정된 속도 분포를 비교하기 위해 일반적인 벽법칙($\kappa = 0.41$, $C = 5$)과 Spalding [19]의 속도 분포를 Fig. 8에 나타내었다. 벽면에서 가장 가까운 지점의 실험값은 $y^+ = 5.6$ 이며, Viscous sublayer 구간에 해당한다. 로그 구간의 실험값은 $y^+ = 27(y/\delta \approx 0.06)$ 부터 $y^+ = 124(y/\delta \approx 0.28)$ 의 범위에 해당하며, 압축성 효과를 고려한 Van Driest 변환 속도는 비압축성 로그 법칙을 잘 만족하였다. 일반적으로 비압축성 난

Table 3. Turbulent boundary layer properties

Parameter	Value
C_f	1.88×10^{-3}
$u_\tau [m/s]$	30.49
$v_w [m^2/s]$	6.7×10^{-5}
$\delta_{99} [mm]$	2.29

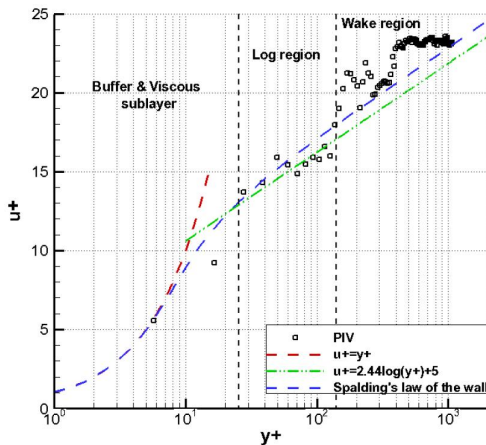


Fig. 8. Turbulent Boundary Layer profile

류 경계층에서 로그 구간이 끝나는 위치는 $y/\delta \approx 0.2$ 이지만, 본 실험에서 로그 구간이 끝나는 위치($y/\delta \approx 0.28$)가 벽면에서 더 떨어진 것을 확인하였다. 이러한 경향은 압축성 난류 경계층을 실험한 선행 연구에서도[8~11] 볼 수 있다. 그 원인으로는 초음속 경계층의 Intermittency 분포, 속도 구배가 있지만, 이 부분에 대해 아직 명확하게 규명되지 않은 상황이다[11].

IV. 결론

본 논문에서는 고해상도 PIV 기법을 이용하여 마하수 2.96에서 평판에 대한 층류, 천이, 난류 경계층의 속도 분포를 측정하였다.

먼저 층류 경계층의 실험값은 압축성 Blasius 속도 분포와 상당히 유사한 경향임을 확인하였다. 천이 경계층의 경우, 벽면 부근의 속도 분포부터 이론적인 난류 속도 분포로 변하는 것을 확인했으며, $Re = 1.41 \times 10^6$ 에서 천이가 시작되었다. 마지막으로 난류 경계층의 실험값은 압축성 효과를 고려하여 Van Driest 변환 속도로 변환했으며, 비압축성 로그 법칙을 잘 만족하였다. 또한 로그 구간이 끝나는 지점($y/\delta \approx 0.28$)이 비압축성 난류 경계층($y/\delta \approx 0.2$)에 비해 벽면에서 더 떨어진 것을 확인하였다. 본 연구를 통해 PIV 기법을 이용하여 기본적인 유동의 속도 분포를 측정하였으며, 이론적인 속도 분포와 일치하는 것을 확인하였다.

후 기

본 연구는 미래창조과학부의 “극초음속 비행

체 충격과 및 경계층 예측/제어/회피 기술개발 (2011-0020837)” 과제 수행결과의 일부이며, 지원에 감사드립니다.

References

- 1) Dolling, D. S., “Fifty Years of Shock-wave/Boundary Layer Interaction Research:What next?,” AIAA Journal, Vol. 39, No. 8, 2001, pp. 1517~1531.
- 2) Gadd, G. E., Holder, D. W., and Regan, J. D., “An Experimental Investigation of the Interaction between Shock Waves and Boundary Layers,” Proceedings of the Royal Society a Mathematical, Physical and Engineering Sciences, Vol. 226, No. 1165, 1954, pp. 227~253.
- 3) Van Driest, E. R., “Turbulent Boundary Layer in Compressible Fluids,” AIAA Journal, Vol. 18, No.6, 1951, pp. 145~160.
- 4) Schlichting, H., and Gersten, K., Boundary-Layer Theory, 7th Ed., McGraw-Hill, New York, 1979, pp. 702~723.
- 5) Morkovin, M. V., “Effects of Compressibility on Turbulent Flows,” Mecanique de la Turbulence, 1962. pp. 367~380.
- 6) Smits, A. J., and Dussauge, J. P., Turbulent Shear Layers in Supersonic Flow, 2nd Ed., Springer, New York, 2006.
- 7) Smits, A. J., Spina, E. F., Alving, A. E., Smith R. W., Fernando E. M., and Donovan J. F., “A Comparison of the Turbulence Structure of Subsonic and Supersonic Boundary Layers,” Physics of Fluids A:Fluid Dynamics, Vol. 1, No.11, 1989, pp. 1865~1875.
- 8) Lin, HE., ShiHe, YI., YuXin, Zhao., LiFeng, TIAN., and Zhi, Chen., “Experimental Study of a Supersonic Turbulent Boundary Layer using PIV,” Science China Physics, Mechanics and Astronomy, Vol. 54, No. 9, 2011, pp. 1702~1709.
- 9) Robinson, S. K., “Space-time Correlation Measurements in a Compressible Turbulent Boundary Layer,” AIAA/ASME 4th Fluid Mechanics, Plasma Dynamics and Lasers Conference, 1986.
- 10) Kistler, A. L., “Fluctuation Measurements

in Supersonic Turbulent Boundary layer," *Physics of Fluids*, Vol. 2, No. 3, 1959, pp. 290~296.

11) Ganapathisubramani, B., "Statistical Properties of Streamwise Velocity in a Supersonic Turbulent Boundary Layer," *Physics of Fluids* 19, Vol. 19, No. 9, 2007.

12) Park. D. H. and Park. S. O., "Nonlinear Stability Analysis of Boundary Layers by using Nonlinear Parabolized Stability Equations," *The Korean Society for Aeronautical and Space Sciences*, Vol. 39, No. 9, 2011, pp. 805~815.

13) Borovoy, V. Ya., "Effect of the Unit Reynolds Number on the Measurements of Aerodynamic and Thermal Characteristics of Bodies in Wind Tunnels," *Trudy TsAGI*, No. 1374, 1972, pp.152~165.

14) Giepman, R. H. M., schrijer, F.F.J., and Van Oudheusden, B. W., "High-Resolution PIV Measurements of a Transitional Shock

Wave-Boundary Layer Interaction," *Experiments in Fluids*, Vol.56, No. 6, 2015.

15) Kornilov, V. I., "Transition of the Boundary Layer on a Flat Plate at Supersonic and Hypersonic Velocities," *Thermophysics and Aeromechanics*, Vol. 16, No. 3, 2009.

16) Illingworth, C. R., "Some Solutions of the Equations of Flow of a Viscous Compressible Fluid," *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 46, No.3, 1950.

17) Cebeci, T. and Cousteix J., *Modeling and Computation of Boundary-Layer Flows*, 2nd Ed., Springer, New York, 2005.

18) Van Driest, E. R., "On Turbulent Flow near a Wall," *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol. 23, No. 11, 1956, pp. 1007~1011.

19) Spalding, D. B., "A Single Formula for the Law of the Wall," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 28, No. 3, 1961, pp. 455~458.