신뢰성응용연구
제16권, 제4호. pp.280-286, 2016

새로운 연령교체 방식의 개발*

서 순 근†

동아대학교 산업경영공학과

On the New Age Replacement Policy*

Sun-Keun Seo†

[1]Department of Industrial & Management Systems Engineering, Dong-A University

Purpose: Recently, Jiang defines the tradeoff B life to minimize a sum of life lost by preventive maintenance (PM) and corrective maintenance (CM) contribution parts and sets up an optimal replacement age of age replacement policy as this tradeoff life. In this paper, Jiang's model only considering the known lifetime distribution is extended by assigning different weights to two parts of PM and CM in order to reflect the practical maintenance situations in application.
Methods: The new age replacement model is formulated and the meaning of a weight factor is expressed with the implied cost of failure under asymptotic expected cost model and also discussed with one-cycle expected cost criterion.
Results: The proposed model is applied to Weibull and lognormal lifetime distributions and optimum PM replacement ages are derived with corresponding implied cost of failure.
Conclusion: The new age replacement policy to escape the estimation of cost of failure in classical asymptotic expected cost criterion based on the renewal process is provided.

Keywords: Implied Cost of Failure, Lognormal Distribution, Maintenance. Tradeoff B Life, Weibull Distribution

1. 서 론

명시된 기능을 수행할 수 있는 상태로 아이템을 회복시키기 위한 업무나 활동을 보전 (maintenance)이라 부른다. 보전은 고장보전(CM: corrective or breakdown maintenance)과 예방보전(PM: preventive maintenance)으로 대별되는데, 후자는 장래 발생 고장을 예방하기 위해 미리 정해진 기준에 따라 보전을 실시한다. 이런 예방보전 전략 가운데 전통적인 방식으로 시간(예를 들면 달력시간, 작동시간, 자동차 주행거리 등)을 기반으로 한 시간기준보전을 들 수 있는데, 이 중에서 가장 대표적인 것으로 연령교체 방식(age replacement policy)을 들 수 있다[1].

이 방식은 아이템이 고장 나거나 규정된 누적 작동시간(연령 또는 교체주기)에 먼저 도달하면 교체하는 방식으로 고장 시 교체비용이 미리 예방교체하는 비용보다 높고 고장률 증가형(IFR: Increasing Failure Rate)일 때 유용하다[2].

연령교체 모형의 목적함수로 Barlow and Hunter[3]에 의해 최초로 제시된 무한 계획기간 하의 단위 시간

* 이 논문은 동아대학교 교내연구비 지원에 의하여 연구되었음.
† 교신저자 skseo@dau.ac.kr
2016년 8월 10일 접수; 2016년 10월 12일 수정본 접수; 2016년 10월 15일 게재 확정.

당 기대비용으로 설정하고 이를 최소화하는 교체주기를 구하는 방식이 가장 널리 쓰인다. 이 모형에서 예방교체 비용은 비교적 쉽게 구할 수 있으나 고장교체 비용을 산정하기는 쉽지 않다. 이에 따라 비용보다는 가용도를 목적함수로[4], 또한 무한 계획기간은 실용적이지 않으므로 유한 계획기간 하의 단일 주기 기대비용으로 설정하기도 한다[5-7]. 최근에 Jiang[8]은 관련 비용요소와 무관하게 아이템의 평균수명(MTTF: Mean Time To Failure)에 기여하는 영역을 유용수명 (useful life), 고장교체(CM), 예방교체(PM) 기여 영역으로 구분 하고, 상충하는 CM과 PM의 기여도를 절충하는 (즉, 두 영역의 합을 최소화) 백분위 수명 (tradeoff B수명)을 교체주기로 설정하는 방식을 제안하였다. Jiang 방식은 분포와 모수가 정해지면 교체주기가 하나로 설정되므로 하나의 준거로 쓸 수 있지만, 대상 아이템의 보전에 관련된 여건(고장에 따른 손실 여건 등)을 반영하지 못하는 단점을 가지고 있다.

따라서 본 논문은 제3장에서 Jiang[8]의 균형 B수명 개념을 확장하여 대상 아이템의 보전 여건을 반영할 수 있도록 두 기여 영역에 다른 가중치를 부여하는 가중 균형 B수명 개념을 통해 연령교체의 최적 교체주기를 새롭게 설정하는 방식을 제안하고, 제3.1절과 제3.2절에서 수명이 각각 와이블과 대수정규분포를 따를 때 가중 균형 B수명을 적용하여 도출된 최적 주기의 특성을 조사하고자 한다. 또한 제시된 모형에 적용된 가중치의 의미를 해석하고, Scarf *et al.*[9]의 함축비용(implied cost)을 활용하여 제안 모형을 기대비용 모형과 대응시키고자 한다. 그리고 제2장에서는 본 논문과 연관된 연령교체 모형을 살펴보고, 제4장의 결론에서는 연구 성과를 요약한다.

2. 연령교체 모형

2.1 무한 계획기간 하의 기대비용 모형

연령교체 방식 하에서 아이템은 고장이 나면 바로 교체(고장교체)하고, 교체주기 t_0까지 고장이 나지 않으면(즉, 연령이 t_0가 되면) 예방교체를 하며, 둘 중 하나가 먼저 발생하여 교체한 간격을 교체주기(cycle)로 부른다. 여기서 수명 T의 확률밀도함수(pdf), 고장률함수, 누적분포함수(cdf), 신뢰도함수를 각각 $f(t), h(t), F(t), R(t)$로 나타내며, 교체시간은 무시할 수 있다고 가정한다.

대상 아이템의 관련 비용요소로 t_0에 발생되는 예방교체 시 교체비용을 c_p로, t_0이전에 발생되는 고장교체 비용을 $c_f = rc_p$로 두면, 무한 계획기간 하의 단위시간당 기대비용 $C(t_0)$는 다음과 같이 나타낼 수 있다(이후 간략하게 기대비용 모형으로 칭함).

$$C(t_0) = \frac{c_p}{\mu(t_0)}\left[F(t_0)(r-1)+1\right] \tag{1}$$

단, $\mu(t_0) = \int_0^{t_0} R(t)dt$, $\mu(\infty) = \mu$, $r = \frac{c_f}{c_p} > 1$

식 (1)을 최소화하는 t_0^*는 다음을 만족해야 하며[3],

$$h(t_0^*)\mu(t_0^*) - F(t_0^*) = \frac{1}{r-1} \tag{2}$$

식 (2)의 조건을 식 (1)에 대입하면 t_0^*하의 단위시간당 기대비용은 다음과 같이 단순화 된다. 여기서 실제 현업에서 c_p에 비해 c_f(또는 r)를 정확하게 산정하기는 특히 힘들다고 알려져 있다[2].

$$C(t_0^*) = (r-1)h(t_0^*) \tag{3}$$

식 (2)에서 t_0^* 을 구하기 위해서는 수치해법이 필요하며, Glasser[10]는 이런 점을 고려하여 와이블 분포 등을 따를 때 교체주기를 용이하게 구할 수 있는 nomogram를 제공하고 있다. 식 (2)에서 유한한 교체주기가 존재하려면 $h(\infty)\mu > r$를 충족해야 하는데, $h(t)$가 IFR이 되면 이 조건은 필요충분조건이 된다[11].

따라서 와이블 분포를 따를 때 IFR이면 식 (2)의 유한한 최적 교체주기는 항상 존재하며, 대수정규분포의 고장률은 일정 범위까지 증가하다가 감소하므로, IFR 구간의 시간 최대값이 t_m이라면 식 (2)의 유한한 최적 교체주기는 다음 조건이 성립할 경우에 존재한다.

$$h(t_m)\mu > \frac{1}{r-1}$$

교체비용보다 아이템의 가용도 기준이 더 중요한 경우도 있는데, 이 경우는 전술된 기대비용 모형과는

달리 보전 관련 시간을 포함시킨다. 즉, MDT_p가 예방교체일 때의 평균 정지시간이고, MDF_f가 고장교체 시 평균 정지시간이라면 교체주기 t_0의 연령교체 방식을 적용할 경우의 구간 가용도 $A(t_0)$는

$$A(t_0)=1-\frac{MDT_p+(MDT_f-MDT_p)F(t_0)}{\mu(t_0)+MDT_p+(MDT_f-MDT_p)F(t_0)} \quad (4)$$

이 되는데, 이를 최대화하는 t_0^*는 기대비용 기준과 동일하게 식 (2)로부터 구할 수 있다[4].

2.2 단일 주기 기대비용 모형

주기마다 교체주기 등의 보전전략을 변경할 경우에 전 소절의 무한 계획기간 하에서 도출된 기대비용보다 단일 주기의 기대비용을 최소화하는 방식이 보다 타당한 접근법이 된다[5-6].

해당 주기가 t_1일 때 단일 주기당 기대비용은

$$C_1(t_1)=c_p\left[r\int_0^{t_1}\frac{f(t)}{t}dt+\frac{R(t_1)}{t_1}\right] \quad (5)$$

가 되므로 이를 t_1에 대해 미분하면 다음과 같이 된다.

$$\frac{dC_1(t_1)}{dt_1}=c_p\left[\frac{(r-1)f(t_1)}{t_1}-\frac{R(t_1)}{t_1^2}\right]$$

따라서 위의 식으로부터 $C_1(t)$를 최소화하는 t_1^*은 다음 조건을 만족한다.

$$t_1^*h(t_1^*)=\frac{1}{r-1} \quad (6)$$

Ansell *et al.*[5]에 따르면 $h(t)$가 IFR이고, μ와 $E(1/X)$이 유한할 때 $t_1^*<t_0^*$가 된다.

2.3 균형 B수명 모형

Jiang[8]은 <Fig. 1>과 같이 신뢰도함수가 MTTF(μ)에 기여하는 영역을 고장발생 경우(즉, CM)의 영역 (a), 고장이 발생하지 않을 경우(PM)에 유용한 MTTF 기여 영역 (b), 예방교체에 따라 정상 아이템이 교체되어 허비되는 수명의 손실 영역 (c)의 세 영역으로 구분하여 균형 B수명을 설정하였다. 즉, 영역 (a)와 (c)는 각각 고장교체와 예방교체가 MTTF에 기여하는 부분으로 가능한 작아야 되며, 영역 (b)는 유용수명에 기여하는 부분으로 커야 한다. 그런데 Fig. 1에서 $100q$백분수명 B_q를 증가(감소)시키면 고장교체가 적용되는 영역 (a)가 증가(감소)되며, 역으로 예방교체에 의해 수명손실에 해당되는 영역 (c)는 감소(증가)된다. 이에 따라 상충관계에 있는 두 영역의 합을 최소화(또는 영역 (b)를 최대화)하는 수명 B_{q^*}(여기서 $q^*=F(B_{q^*})$)를 균형 B수명이라 명명하고, 이를 식 (1)의 전통적 비용모형과는 다른 접근법으로 연령교체 방식의 교체주기로 삼을 수 있음을 보여주고 있다.

따라서 영역 (a)와 영역 (c)의 합(식 (10)에서 $k=1$인 경우)을 최소화하는 B_{q^*}는 다음 조건을 충족해야 한다[8].

$$B_{q^*}h(B_{q^*})=1 \quad (7)$$

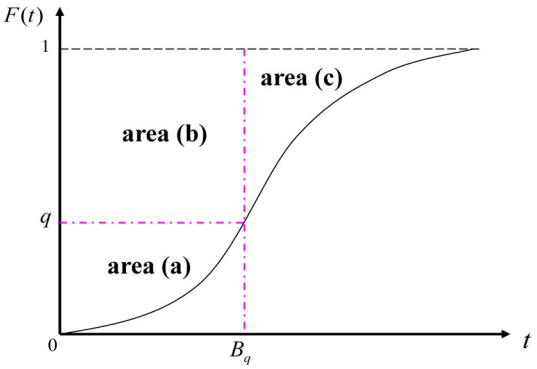


Fig. 1 Decomposition of MTTF region

아이템 수명 T가 식 (8)의 신뢰도함수와 같이 특성수명이 η이고 형상모수가 β인 와이블 분포를 따르면, 식 (7)에 의해 B_{q^*}와 q^*는 아래와 같이 구해진다.

$$R_W(t)=\exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\right] \quad (8)$$

$$B_{q^*}=\eta\beta^{-1/\beta} \quad (9)$$

$$q^*=1-R(B_{q^*})=1-e^{-1/\beta}$$

<Fig. 2>에는 전형적인 형상모수 β의 범위(0.3 ~ 10)에 따른 B_{q^*}/μ, B_{q^*}/η, q^*가 도시되어 있다. 이를 보면

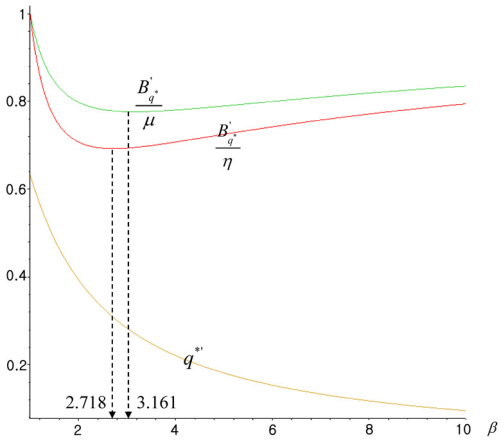


Fig. 2 Tradeoff B life for Weibull distribution

β에 따라 q^*는 감소하지만, B_{q^*}/μ와 B_{q^*}/η는 감소하다가 증가하는 패턴을 따르며, 특히 최소가 되는 β가 전자는 3.161[8], 후자는 이보다 작은 2.718이 된다.

3. 새로운 연령교체 모형

교체주기를 비용요소에 대한 고려없이 알려진 수명분포만 반영하여 균형 B수명으로 설정하는 방식은 참신한 접근법이지만, 실제 고장교체와 예방교체가 미치는 영향의 차이점이나 대상 아이템의 실질적인 보전 여건을 반영하지 못하는 약점이 있다. 따라서 본 논문에서는 이런 차이를 반영하기 위해 고장교체 기여 영역 (a)에 예방교체 기여 영역 (c)의 k배를 부여할 경우로 확장하고자 한다. 즉, <Fig. 1>의 영역 (a)와 (c)에 가중치를 부여하여 다음과 같이 정의되는 $g(B_q)$을 최소화하는 다음 문제로 정식화할 수 있다.

$$\min\left[g(B_q)=k\left(F(B_q)B_q-\int_0^{B_q}F(t)dt\right)+\int_{B_q}^{\infty}R(t)dt\right] \quad (10)$$

여기서 $g(B_q)$의 첫 항은 <Fig. 1>에서 영역 (a) 면적의 k배를, 둘째 항은 영역 (c)의 면적을 나타낸다. 식 (10)을 미분하면

$$\frac{dg(B_q)}{dB_q}=kB_qf(B_q)-R(B_q)$$

가 되므로, 상기 식이 '0'이 되는 조건을 만족하는 최적 가중 균형 B수명 B_{q^*}'은 다음과 같이 단순화된 방정식에서 구할 수 있다.

$$kB_{q^*}'h(B_{q^*}')=1 \quad (11)$$

이 모형에서 k가 어떤 의미를 가지는지를 파악해 보자. Scarf *et al.*[9]은 기대비용 모형의 식 (1)에서 c_p는 쉽게 구할 수 있으나 c_f는 설정하기가 용이하지 않으므로, c_p와 교체주기 t_0가 주어질 때 t_0에 의해 규정된 신뢰도(또는 cdf)하에서의 기대비용과 등가가 되도록 식 (2)를 만족하는 c_f를 구하여 이를 함축비용으로 부르고 있다. Jiang[8]도 이를 이용하여 균형 B수명의 의미를 보충적으로 설명하고 있다.

본 논문에서도 이 개념을 도입하여 식 (11)에서 구한 B_{q^*}'(또는 $q^{*'}=F(B_{q^*}')$)을 구하고, 식 (2)에 이 값을 대입하여 구한 식 (12)의 r_I를 함축비용의 비로 명명한다. 즉, 기대비용 모형에서 교체주기를 B_{q^*}'로 설정할 때 r_I는 두 교체비용(c_f와 c_p)의 비로 해석할 수 있다.

$$h(B_{q^*}')\mu(B_{q^*}')-F(B_{q^*}')=\frac{1}{r_I-1} \quad (12)$$

한편 식 (11)은 식 (6)과 동일한 형태가 되므로 k는 단일 주기 비용모형 하에서 $r-1$과 같아져, 이로부터 무한 계획기간의 비용모형보다 제시된 모형의 단일 주기 비용모형과의 연관성을 더욱 명확하게 파악할 수 있다. 즉, k가 1이 되는 Jiang[8]의 균형 B수명은 이 모형과 대응시킨다면 r을 2로 설정한 경우로 볼 수 있다. 따라서 이런 관계를 고려하면, 두 비용모형에서 $r=c_f/c_p$는 1보다 커야 되지만 k는 1보다 작게 부여할 수 있다.

3.1 와이블 분포일 경우

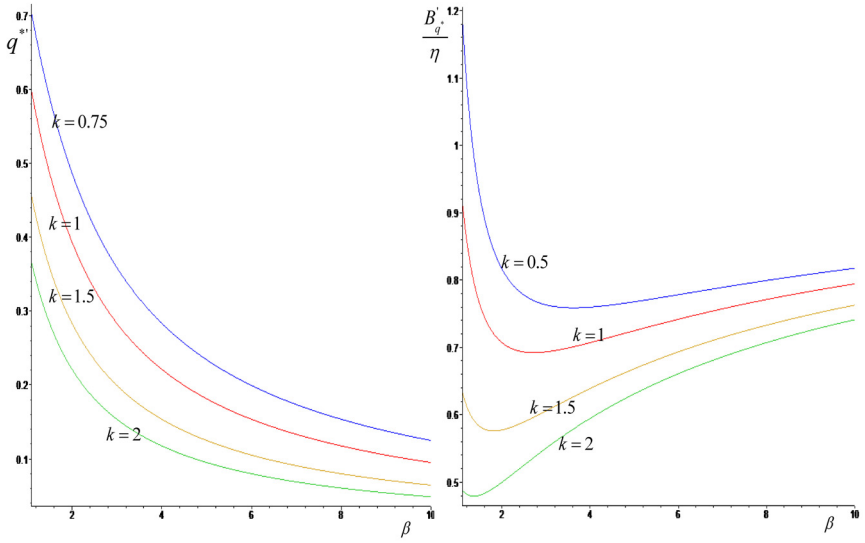
와이블 분포의 신뢰도함수를 식 (8)과 같이 나타낼 수 있을 때 식 (12)에서 B_{q^*}'와 $q^{*'}$는 다음과 같이 구해진다. 따라서 B_{q^*}'는 B_{q^*}의 $1/k^{1/\beta}$배로 감소된다.

$$B_{q^*}'=\eta(k\beta)^{-1/\beta} \quad (13)$$
$$q^{*'}=1-R(B_{q^*}')=1-e^{-1/(k\beta)}$$

β의 전형적인 IFR 범위인 1~10에서 k가 0.75, 1, 1.5, 2일 때의 $q^{*'}$와 B_{q^*}'가 <Fig. 3>에 도시되어 있다. 이를 보면 예상한 바와 같이 k 또는 β가 증가하면 $q^{*'}$는 감소하는 패턴을 가진다. 하지만 β가 주어질 때 k가 증가하면 B_{q^*}'/η는 감소하지만, k가 주어질 때 β가 증가하면 B_{q^*}'/η는 일단 감소하다가 증가하는 형태를 가지는데, 그 변곡점은 k가 증가함에 따라 감소하고 있다. 한편 Coolen-Schrijner and Coolen[6]은 와이블 분포를 따를 때 기대비용 모형에서 구한 β에 따른 t_0^*(식 (2))도 동일한 패턴을 따른다고 기술하고 있는데, 그들은 와이블 분포(η가 동일한 경우)의 기대값이 최소가 되는 2.17이 r과 무관하게 항상 β의 변곡점이라는 잘못된 주장을 하고 있다.

그리고 β, k에 따라 구한 r_I가 <Table 1>에 정리되어 있다. 여기서 모든 k(또는 β)에 대해 $\beta(k)$가 증가하면 r_I가 감소(증가)하며, 특히 k가 크고 β가 작을 때는 r_I가 존재하지 않는다(즉, 매우 큰 값을 가진다).

제안된 가중 균형 B수명을 최적 교체주기를 삼는 과정의 예시를 위해 η, β가 각각 1,000시간과 2인 와이블 분포를 따르고 k에 1.5의 가중치를 부과한다면, 식 (12)로부터 최적 교체주기는 0.7071 · 1,000 = 707.1시간($q^{*'}$ = 0.3935)가 된다. <Table 1>에서 r_I는 5.855가 되어 기대 비용모형(식 (1))에서 두 교체비용의 비(c_f/c_p)가 5.855가 되는 경우와 동등하다. 또한 단일 주기 기준을 적용하면 r에 2.5배를 부여한 경우로 볼 수 있다. 여기서 Jiang[8]의 최적 균형 B수명은



(a) $q^{*'}$ (b) B_{q^*}'

Fig. 3 Optimum replacement age: Weibull distribution

Table 1 Implied cost ratio r_I for Weibull distribution

k \ β	0.5	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.50	3.00
1.25	2.843	4.119	6.891	17.111	-	-	-	-	-
1.50	2.285	3.082	4.397	6.957	14.090	138.99	-	-	-
1.75	2.043	2.664	3.572	5.025	7.717	14.411	59.786	-	-
2.00	1.909	2.440	3.164	4.210	5.855	8.819	15.747	-	-
2.50	1.768	2.207	2.760	3.478	4.449	5.836	7.976	19.919	-
3.00	1.695	2.088	2.561	3.141	3.870	4.814	6.685	10.644	25.455
4.00	1.624	1.970	2.366	2.823	3.357	3.989	4.749	6.847	10.372
5.00	1.589	1.912	2.270	2.671	3.123	3.634	4.219	5.684	7.737

$707.1 \cdot 1.5^{1/2} = 866.0$ 시간으로 상기의 1.225배가 된다.

3.2 대수정규분포일 경우

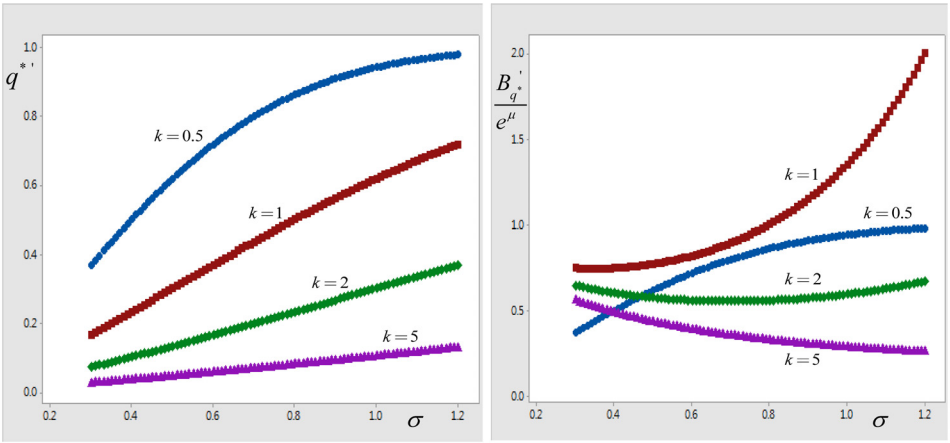
표준 정규분포의 pdf와 cdf를 $\phi(\cdot)$, $\Phi(\cdot)$로 표기하면 두 모수가 μ와 σ인 대수정규분포를 따르는 T의 신뢰도함수는 다음과 같이 정의되는데, 와이블 분포와는 달리 최적 가중 균형 B수명인 B_{q^*}'와 $q^{*'}$는 폐쇄형(closed form)으로 나타낼 수 없다.

$$R_{LN}(t) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right) \tag{14}$$

단, $\mu = E(\ln T)$, $\sigma^2 = Var(\ln T)$

수명분포로서의 σ의 전형적인 범위인 0.3~1.2에서 k가 0.5, 1, 2, 5일 때 수치적 방법으로 구한 $q^{*'}$와 B_{q^*}'/e^{μ}가 <Fig. 4>에 도시되어 있다. 여기서 이 그림들은 폐쇄형으로 구할 수 있는 와이블 분포인 경우와는 달리, σ를 0.3에서 0.01씩 단속적으로 증가시켜 도출한 $q^{*'}$와 B_{q^*}'/e^{μ}의 값을 각각 σ에 대응시켜 타점한 것이다. 이를 보면 예상한 바와 같이 $q^{*'}$는 k가 감소하거나 σ가 증가하면 증가하는 패턴을 가지나, B_{q^*}'는 k와 σ에 따라 일관성 있는 형태를 가지지 않으며, 특히 k가 0.5일 때는 이런 형태가 더욱 확연해진다.

대수정규분포를 따를 경우에 σ, k에 따라 구한 r_I가 <Table 2>에 정리되어 있다. 여기서 모든 k에 대해 σ가 증가하면 r_I가 증가하지만, 와이블 분포와는 달리 작은 σ에 대해 k가 증가하면 일관성 있는 패턴(r_I가 증가하는 경향)를 가지지만, σ가 크고(여기서 0.7



(a) $q^{*'}$ (b) B_{q^*}'

Fig. 4 Optimum replacement age: lognormal distribution

Table 2 Implied cost ratio r_I for lognormal distribution

k \ σ	0.5	0.75	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	7.0
0.3	1.667	1.951	2.235	2.802	3.368	4.493	5.614	6.732	8.960
0.4	1.804	2.092	2.388	2.981	3.574	4.753	5.927	7.095	9.421
0.5	2.036	2.309	2.607	3.223	3.843	5.080	6.310	7.535	9.969
0.6	2.482	2.660	2.938	3.558	4.201	5.495	6.787	8.072	10.625
0.7	3.574	3.301	3.472	4.044	4.692	6.035	7.387	8.737	11.419
0.8	9.438	4.765	4.452	4.796	5.398	6.756	8.162	9.574	12.392
1.0	-	-	18.262	8.832	8.359	9.250	10.617	12.101	15.160
1.2	-	-	-	-	25.734	16.197	16.083	17.114	20.029

이상) k가 작을 때(1 미만)는 전술한 패턴이 성립하지 않거나 r_I가 존재하지 않는다.

제안된 모형을 통해 최적 교체주기를 구하는 과정의 예시를 위해 μ, σ 가 각각 7과 0.5인 대수정규분포를 따르며 k가 2라고 가정하자. <Fig. 4> 또는 식 (11)으로부터 구하면 B_{q^*}'/e^{μ}가 0.5752가되므로 최적 교체주기는 $0.5752e^7 = 630.8$시간($q^{*'} = 0.1344$)이 된다. <Table 2>에서 r_I는 3.843이 되어 기대 비용모형(식 (1))에서 두 교체비용의 비(r)가 3.843가 되는 경우와 동등하다. 또한 단일 주기 기준을 적용하면 r에 3배를 부여한 경우로 볼 수 있다. 여기서 Jiang[8]의 최적 균형 B수명은 846.4시간으로 위에서 도출된 교체주기의 1.34배가 된다.

4. 결 론

본 논문은 전통적인 연령교체의 최적 교체주기를 설정할 경우에 비용요소에 대한 고려 없이 수명분포의 정보만 이용하는 Jiang[8]의 균형 B수명 모형을 확장한 새로운 연령교체 방식을 제안하였다. 즉, 대상 아이템의 보전 여건을 반영할 수 있도록 상충하는 PM과 CM의 MTTF 기여 영역에 다른 가중치를 부과하여 연령교체의 새로운 최적 교체주기 설정 방법을 제안하였다.

또한 제시된 모형에 적용된 가중치의 의미를 단일 주기 기대 비용모형과 연관시키면 보다 명확하게 해석할 수 있음을 보여 주었으며, 또한 최적 가중 균형 B수명을 연령교체의 교체주기로 삼을 경우에 Scarf *et al.*[9]의 함축비용 개념을 활용하여 무한 계획기간 하의 기대 비용모형과 대응시켰다. 이를 구체적으로 활용하기 위해 가장 널리 쓰이는 수명분포인 와이블과 대수정규분포를 각각 따를 경우에 수치실험을 통해 도출된 최적 가중 균형 B수명과 이와 관련시킨 함축비용의 특성을 고찰하고 예시하였다.

향후에 본 논문에서 제안된 연령교체 방식을 실제 현장에 적용할 경우의 유용성과 더불어 취약점을 파악하여 이를 개선하는 후속연구가 요망된다.

References

[1] Ahmad, R. and Kamaruddin, S. (2012). “An Overview of Time-Based and Condition-Based Maintenance in Industrial Application”. Computers & Industrial Engineering, Vol. 63, No. 1, pp. 135-149.

[2] Jardine, A. K. S. and Tsang, A. H. C. (2006). “Maintenance, Replacement, and Reliability: Theory and Applications”. CRC Press.

[3] Barlow R. E. and Hunter, L. C. (1960). “Optimum Preventive Maintenance Policies”. Operations Research, Vol. 8, No. 1, pp. 90-100.

[4] Gertzbakh, I. (2000). “Reliability Theory: with Applications to Preventive Maintenance”. Springer.

[5] Ansell, J., Benfell, A. and Humber, S. (1984). “Age Replacement under Alternative Cost Criteria”. Management Science, Vol. 30, No. 3, pp. 358-367.

[6] Coolen-Schrijner, P. and Coolen, F. P. A. (2006). “On Optimality Criteria for Age Replacement”. Proc. I Mech E Part O: J. Risk and Reliability, Vol. 220, No. 1, pp. 21-28.

[7] Hamidi, M., Szidarovszky, F. and Szidarovszky, M. (2016). “New One Cycle Criteria for Optimizing Preventive Replacement Policies”. Reliability Engineering and System Safety, Vol. 154, pp. 42-48.

[8] Jiang, R. (2013). “A Tradeoff BX Life and Its Applications”. Reliability Engineering and System Safety, Vol. 113, pp. 1-6.

[9] Scarf, P. A., Dwight, R. and Al-Musrati, A. (2005). “On Reliability Criteria and Implied Cost of Failure for a Maintained Component”. Reliability Engineering and System Safety, Vol. 89, pp. 199-207.

[10] Amari, S. and Fulton, W. (2003). “Bounds on Optimal Replacement Time of Age Replacement Policy”. Proceedings of 2003 Annual Reliability and Maintainability Symposium, pp. 417-422.

[11] Glasser, G. J. (1967). “The Age Replacement Problem”. Technometrics, Vol. 9, No. 1, pp. 83-91.