

상호작용 이중-모드 조정방법을 이용한 저항률 영상 복원

Resistivity Image Reconstruction Using Interacting Dual-Mode Regularization

강숙인*, 김경연**★

Suk-In Kang*, Kyung-Youn Kim**★

Abstract

Electrical resistivity tomography (ERT) is a technique to reconstruct the internal resistivity distribution using the measured voltages on the surface electrodes. ERT inverse problem suffers from ill-posedness nature, so regularization methods are used to mitigate ill-posedness. The reconstruction performance varies depending on the type of regularization method. In this paper, an interacting dual-mode regularization method is proposed with two different regularization methods, L1-norm regularization and total variation (TV) regularization, to achieve robust reconstruction performance. The interacting dual-mode regularization method selects the suitable regularization method and combines the regularization methods based on computed mode probabilities depending on the actual conditions. The proposed method is tested with numerical simulations and the results demonstrate an improved reconstruction performance.

요 약

전기 저항률 단층촬영법(ERT)은 표면 전극으로부터 측정된 전압을 사용하여 물체 내부의 임피던스 분포를 영상화하는 기술이다. ERT 역문제는 비정치성(ill-posedness)이 매우 심하여 영상복원의 수렴성을 확보하기 위해 조정방법이 사용된다. 사용된 조정방법에 따라 영상복원 성능이 달라지므로 상황에 따라 보다 강건한 영상 복원 성능을 얻기 위해, 서로 다른 영상복원 특성을 나타내는 L1-norm 조정방법과 Total Variation (TV) 조정방법의 두 개의 모드가 상호작용하는 상호작용 이중-모드 조정방법을 제안하였다. 제안한 이중-모드 조정방법은 실제 상황에 따라 달라지는 모드 확률을 계산하고 이에 근거하여 적합한 모드를 선택하거나 두 개의 모드를 결합한다. 모의실험을 수행하여 제안된 기법의 영상 복원 성능을 평가한 결과 비교적 양호한 성능을 나타내었다.

Key words : electrical resistivity tomography, inverse problem, L1-norm, total variation, regularization method, interacting dual-mode

* Faculty of Applied Energy System, Major of Electronic Engineering, Jeju National University

** Dept. of Electronic Engineering, Jeju National University

★ Corresponding author

e-mail : kyungyk@jejunu.ac.kr, tel:064-754-3664

※ Acknowledgment: This work was supported by Mid-career Researcher Program through NRF grant funded by the MSIP (No. NRF-2013R1A2A2A01068836)

Manuscript received May, 11, 2016; revised Jun, 21, 2016; accepted Jun, 22, 2016

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

I. 서론

전기 저항률 단층촬영법(electrical resistivity tomography; ERT)은 내부 저항률 분포를 알고자 하는 대상체 표면에 여러 개의 전극을 부착하고, 이를 통하여 전류를 주입하고 전압을 측정하여 절단면의 저항률 분포를 영상화하는 기술을 의미한다[1-2]. ERT 기술은 인체나 이상(two-phase) 유동장 등과 같이 내부 저항률 분포의 가시화가 필요한 분야에서 연구가 활발히 이루어지고 있다.

ERT의 영상복원은 측정전압(V_m)과 추정된 저항률 분포에서의 계산전압($V_c(\rho)$)의 차, 즉 전압 데이터에 대한 잔류오차의 L2-norm($\|\cdot\|^2$)을 최소화하는 최소자승문제로 목적함수를 설정하여 미지의 저항률 분포를 찾는다[1-4]. 그리고 일반적으로 Gauss-Newton 알고리즘을 사용하며 수렴이 될 때까지 반복하여 저항률 분포 영상을 얻는다. 그러나, ERT의 영상복원은 Hessian 행렬($J^T J$, J : Jacobian)의 역행렬 계산 시 최대고유치와 최소고유치의 비로 정의되는 조건수(condition number)가 매우 큰 비정칙성이 강한 역문제로 내부의 저항률 분포 영상을 얻기가 어렵다. 따라서 의미있는 저항률 분포 영상을 얻기 위하여 목적함수에 저항률 분포 변화에 대한 제약 조건으로 Tikhonov 조정방법과 같은 L2-norm 조정방법[2,4-5]을 부가적으로 추가한다. 그러나, L2-norm 조정방법은 저항률 분포의 갑작스런 변화를 제약함으로써, 즉, 저항률 분포에 대한 smoothing 효과를 줌으로써 내부 저항률 분포 영상을 안정적으로 얻을 수 있는 장점을 갖고 있으나, 저항률 분포를 연속적 형태로 추정하여 이상 유동장과 같이 저항률 분포가 계단 형태로 변하는 배경과 표적(anomaly) 간의 경계를 표현하는데 한계가 있다[6-11].

이를 극복하고자 최근 ERT 연구에서는 L1-norm 조정방법[6-9]과, total variation (TV) 조정방법[10-11] 등이 제안되었다. L1-norm 조정방법은 L2-norm 조정방법과 마찬가지로 내부 저항률 분포를 연속적 형태로 추정하기는 하나, smoothing 효과가 감소하여 L2-norm 조정방법에 비하여 표적의 경계를 더 잘 추정한다. 그리고 TV 조정방법은 결과적으로 L1-norm 조정방법의

일종이지만, 일반적인 L1-norm 조정방법이 연속적인 형태로 저항률 분포를 추정하는 데 반해 표적과 배경의 저항률을 비교적 균일하게 추정하고 표적의 경계에서 저항률 분포를 이산적으로 추정함으로써 보다 나은 복원 영상을 얻는다. 그러나, TV 조정방법은 일반적인 L1-norm 조정방법에 비하여 노이즈가 증가함에 따라 영상 복원 성능이 떨어지는 한계가 있다. 한편, L1-norm 조정방법과 아울러 목적함수에서 전압 데이터에 대한 잔류오차의 L2-norm 대신 L1-norm을 사용함으로써 노이즈에 대해 보다 강건한 영상을 얻을 수 있음을 보여 주었다[9].

따라서 본 논문에서는 ERT 영상 복원 성능이 조정방법에 따라 달라지므로 L1-norm 조정방법과 TV 조정방법의 한계를 상호 보완함으로써 보다 강건한 영상 복원 성능을 나타낼 수 있도록 두 조정방법이 상호작용하는 이중-모드(Interacting Dual-Mode; IDM) 조정방법을 제안하였다. 이때 전압 데이터의 잔류오차 항에 대해서도 L1-norm을 사용하였다. 제안한 IDM 조정방법에서는 L1-norm 조정방법과 TV 조정방법의 두 모드 간 상호작용과, 두 모드의 가능성 함수(likelihood function)에 의한 모드 확률을 계산하여 상황에 따라 최적의 저항률 분포를 추정함으로써 복원 성능을 개선하고자 하였다. 이상 유동장 단면의 저항률 분포를 추정하기 위한 몇 가지 시나리오를 설정하여 모의실험을 수행하였고 제안한 기법의 영상 복원 성능을 평가하였다.

II. 영상 복원

1. L2-norm 영상 복원

ERT의 영상 복원은 역문제의 일종으로 흔히 미지의 내부 저항률 분포를 추정하기 위해 일반적으로 측정전압(V_m)과 추정된 저항률 분포에서의 계산전압($V_c(\rho)$)의 잔류오차의 L2-norm($\|\cdot\|^2$)을 최소화하는 최소자승문제로 설정되며 목적함수는 식 (1)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\Phi(\rho) = \|V_m - V_c(\rho)\|_{\Sigma_V^{-1}}^2 \quad (1-1)$$

or

$$\Phi(\rho) = (V_m - V_c(\rho))^T \Sigma_V^{-1} (V_m - V_c(\rho)) \quad (1-2)$$

여기서, Σ_V 는 측정전압과 계산전압의 측정 노이즈에 대한 공분산 행렬이다. 이때 전극에서의 측정전압과 계산전압과의 관계는 식 (2)와 같다.

$$V_m = V_c(\rho) + n_V \quad (2)$$

여기서, $V_m \in \Omega^{LK \times 1}$ 는 측정전압으로 K개의 모든 전류 패턴에 대하여 대상체 표면의 전극(전극 수: L)에서 측정이 된다. $V_c(\rho) \in \Omega^{LK \times 1}$ 는 저항률 분포 ρ 일때 전극에서 계산된 전압으로, 가정된 저항률 분포와 주입된 전류 하에서 비선형 Laplace 방정식과 완전전극 모델[12]로 표현되는 물리적 모델과 경계 조건에 의해 계산이 되며, 일반적으로 계산전압을 구하기 위해 수치적 기법인 유한요소법(finite element method; FEM)을 사용한다[2]. $n_V \in \Omega^{LK \times 1}$ 는 측정 노이즈로 비상관된 백색 가우시안 잡음으로 가정할 때, 식 (1)의 Σ_V 는 대각행렬이 된다.

식 (1)의 목적함수를 최소화하는 저항률 분포를 추정하기 위해, 수렴성과 추정 정확도 측면에서 다른 알고리즘에 비하여 좋은 성능을 나타내는 것으로 알려진 반복적 Gauss-Newton 알고리즘 [13]은 식 (3)과 같다.

$$\hat{\rho}_{i+1} = \hat{\rho}_i + (J^T W J)^{-1} J^T W (V_m - V_c(\hat{\rho}_i)) \quad (3)$$

여기서, $\hat{\rho}_i$ 와 $\hat{\rho}_{i+1} \in \Omega^{N \times 1}$ 는 각각 i 번째와 $i+1$ 번째 저항률 분포에 대한 추정치를 의미한다. 그리고 Jacobian 행렬 $J \in \Omega^{LK \times N}$ 는 식 (4)와 같다. 또한 가중치 행렬 $W = \Sigma_V^{-1}$ 로 측정 노이즈 공분산 행렬의 역행렬이 된다.

$$J \equiv [\dot{V}_c(\hat{\rho}_i)]_{gh} = \left[\frac{\partial V_c(\hat{\rho}_i)_g}{\partial \rho_i(h)} \right] \quad (4)$$

$$g = 1, 2, \dots, L \times K, \quad h = 1, 2, \dots, N$$

그러나, 식 (3)의 Gauss-Newton 알고리즘은 선형화에 따른 모델링 오차, 측정 전압의 낮은 신호 대 잡음 비율, 특히 Hessian 행렬($J^T J$)의 비정칙성 등으로 인해 엉뚱한 값으로 수렴하거나, 영상 복원이 제대로 수행되지 않는 문제를 갖고 있

다. 일반적으로 ERT에서는 비정칙성 문제를 완화하여 영상 복원 성능을 향상시키기 위하여 L2-norm 조정방법이 사용되며, 이때 조정된 목적함수는 다음의 식 (5)와 같다.

$$\Phi_{r-L2}(\rho) = \|V_m - V_c(\rho)\|_{\Sigma_V^{-1}}^2 + \alpha \|\rho - \rho_o\|_{\Sigma_\rho^{-1}}^2$$

or

$$(5-1)$$

$$\Phi_{r-L2}(\rho) = (V_m - V_c(\rho))^T \Sigma_V^{-1} (V_m - V_c(\rho)) + \alpha (\rho - \rho_o)^T \Sigma_\rho^{-1} (\rho - \rho_o) \quad (5-2)$$

여기서, ρ_o 는 저항률 분포에 대한 사전 정보이며, α 는 조정인자(regularization parameter)이다. 그리고 Σ_ρ^{-1} 는 제약조건으로서 예상되는 저항률 분포 변화에 대한 공분산 행렬의 역행렬이며, $\Sigma_\rho^{-1} = R^T R$ 로 나타낼 수 있다. 이때 R 은 조정행렬(regularization matrix) 또는 조정 연산자를 의미한다.

식 (5)를 최소화하는 저항률 분포를 추정하기 위한 조정된 Gauss-Newton 알고리즘은 식 (6)과 같다.

$$\hat{\rho}_{i+1} = \hat{\rho}_i + H^{-1} G \quad (6)$$

$$H \equiv J^T W J + \alpha R^T R$$

$$G \equiv J^T W (V_m - V_c(\hat{\rho}_i))$$

식 (6)의 영상 복원 성능은 조정인자 α 와 R 의 선택에 따라 달라진다. 그러나 다양한 방법에 의한 α 와 R 의 선택에도 불구하고 식 (6)의 L2-norm 조정방법에 의한 복원 영상은 내부의 저항률 분포를 연속적 형태로 추정하여 표적의 경계가 모호한 한계를 갖고 있다.

2. L1-norm 영상 복원

표적의 경계의 모호함을 개선하고 노이즈에 대하여 보다 강건한 복원 성능을 나타내기 위해 식 (7)과 같이 전압 데이터의 잔류오차에 대한 L1-norm($\|\cdot\|$)과 저항률 분포 변화에 대한 L1-norm 조정방법을 최소화하는 문제로 설정할 수 있다.

$$\Phi_{r-L1}(\rho) = \|V_m - V_c(\rho)\|_{\Sigma_V^{-1}} + \alpha \|\rho - \rho_o\|_{\Sigma_\rho^{-1}} \quad (7)$$

식 (7)의 목적함수를 만족하는 저항률 분포를 추정하기 위한 Gauss-Newton 알고리즘은 L1-norm과 L2-norm의 목적함수에 대한 일반적인 표현식인 식 (8)로부터 간접적으로 유도된다.

$$\Phi_r(\rho) = \|V_m - V_c(\rho)\|_{\Sigma_V^{-1}}^a + \|\rho - \rho_o\|_{\Sigma_\rho^{-1}}^b \quad (8)$$

여기서, a 와 b 는 각각 전압 데이터의 잔류오차와 저항률 분포 변화에 대한 norm을 의미한다. 이때 $a=2$ 와 $b=2$ 인 경우 L2-norm의 식 (5)와 동일하며, $a=1$ 와 $b=1$ 이면 식 (7)와 동일하다. 식 (8)을 식 (5-2)와 같은 형태로 표현하면 식 (9)와 같다고 할 때, 이를 최소화하기 위한 일반화되고 조정된 Gauss-Newton 알고리즘은 식 (6)으로부터 유추 가능하고 식 (10)과 같다.

$$\Phi_r(\rho) = (V_m - V_c(\rho))^T D_V^T \Sigma_V^{-1} D_V (V_m - V_c(\rho)) + \alpha (\rho - \rho_o)^T D_\rho^T \Sigma_\rho^{-1} D_\rho (\rho - \rho_o) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{i+1} &= \hat{\rho}_i + H_g^{-1} G_g \\ H_g &\equiv J^T D_V^T \Sigma_V^{-1} D_V J + \alpha D_\rho^T R^T R D_\rho \\ G_g &\equiv J^T D_V^T \Sigma_V^{-1} D_V (V_m - V_c(\hat{\rho}_i)) \end{aligned} \quad (10)$$

여기서, D_V 와 D_ρ 는 대각행렬로, (n, n) 의 대각요소는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} [D_V]_{n,n} &= ([|V_m - V_c(\hat{\rho})|]_n + \beta)^{\frac{1}{2}a-1} \\ [D_\rho]_{n,n} &= ([|\hat{\rho} - \rho_o|]_n + \beta)^{\frac{1}{2}b-1} \end{aligned} \quad (11)$$

이때, β 는 아주 작은 양수로 $[|V_m - V_c(\rho)|]_n$ 나 $[|\rho - \rho_o|]_n$ 가 0이 될 때를 고려하여 추가되었다. 만일 $a=2, b=2$ 이면 지수가 0이 됨으로써 결과적으로 식 (5-2)와 같은 결과를 얻는다. 그리고 $a=1, b=1$ 인 경우는 지수가 $-\frac{1}{2}$ 이 된다. 즉, 일반화되고 조정된 Gauss-Newton 방법에 의해 식 (7)의 L1-norm이 사용된 목적함수를 최소화하는 저항률 분포를 구할 수 있다.

3. Total Variation 조정방법

식 (7)의 L1-norm 조정방법 대신 TV 조정방법을 갖는 목적함수는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Phi_{r-TV}(\rho) = \|V_m - V_c(\rho)\|_{\Sigma_V^{-1}} + \alpha TV(\rho) \quad (12)$$

TV 조정방법에서는 저항률 분포의 총 변화의 합이 최소가 되도록 FEM 메쉬 요소(element)의 각 모서리에 마주하는 두 요소의 저항률 값의 차이의 절대값에 각 모서리의 길이를 가중한다. 즉, TV 조정방법은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \alpha TV(\rho) &= \alpha \sum_k l_k |\rho(m) - \rho(n)| \\ &= \alpha \sum_k |R_k \rho| \end{aligned} \quad (13)$$

이때, k 는 FEM 메쉬의 k 번째 모서리를 의미하며, l_k 는 k 번째 모서리의 길이를 의미한다. 그리고 $\rho(m)$ 와 $\rho(n)$ 은 k 번째 모서리와 마주하는 각각 m 과 n 번째 요소의 저항률이다. 따라서, 이를 바탕으로 TV 조정행렬의 k 번째 행벡터 R_k 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$R_k = \{0, \dots, 0, l_k, 0, \dots, 0, -l_k, 0, \dots, 0\} \quad (14)$$

식 (12)의 목적함수를 최소화하는 저항률 분포를 구하기 위해서 TV 조정방법을 갖는 Gauss-Newton 알고리즘은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\hat{\rho}_{i+1} = \hat{\rho}_i + H_{TV}^{-1} G_{TV} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} H_{TV} &\equiv J^T D_V^T \Sigma_V^{-1} D_V J + \alpha R^T E^{-1} R \\ G_{TV} &\equiv J^T D_V^T \Sigma_V^{-1} D_V (V_m - V_c(\hat{\rho}_i)) - \alpha R^T E^{-1} R \hat{\rho}_i \end{aligned}$$

여기서, E 는 대각행렬로, (n, n) 의 대각요소는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[E]_{n,n} = \left[\sqrt{(R_n \hat{\rho}_i)^2 + \beta} \right] \quad (16)$$

식 (15)와 (16)에서 보여지는 바와 같이 TV 조정방법은 결과적으로 식 (10)과 같은 L1-norm 조정방법의 일종임을 알 수 있다. TV 조정방법은 L1-norm 조정방법에 비하여 배경과 표적의 저항률을 이산적으로 추정함으로써 표적의 경계를 더 잘 추정하는 장점이 있다. 그러나, TV 조정방법은 노이즈가 증가할수록 추정 성능이 떨어지는 한계를 갖고 있다.

4. 상호작용 이중-모드 조정방법

ERT에서는 조정방법에 따라 영상 복원 성능이 달라지므로 본 논문에서는 최적의 영상을 찾기 위해 두 개의 조정방법(L1-norm 조정방법과 TV 조정방법)을 보완하여 상호작용하는 이중-모드(Interacting dual-mode regularization method; IDM) 조정방법을 제안하였다. IDM 조정방법은 ERT에서 모델 불확실성에 따른 동적 복원 알고리즘인 확장 칼만 필터의 성능을 개선하기 위해 적용된 Interacting Multiple model(IMM) 알고리즘[14]의 접근방법과 유사하며, 본 논문에서는 정적 복원 알고리즘에 있어서 두 개의 조정방법 간 상호작용을 위해 제안되었다. 제안한 IDM 조정방법은 이중-모드상호작용, 모드의 저항률 분포갱신, 모드의 확률갱신, 최종 저항률 분포 추정치의 다음 4 단계 반복 연산에 의해 수행된다.

① 이중-모드 상호작용

1 단계에서는 현재의 모드 확률을 바탕으로 모드간 상호작용이 일어나도록 각 모드의 예측된 모드 확률을 계산하고 이를 토대로 각 모드의 혼합된 초기 추정치를 계산한다.

- 예측된 모드 확률

$$\mu_T^j(i) = (\pi^j)^T \mu_i, \quad j = 1, 2 \quad (17)$$

여기서 $\mu_T^j(i)$ 는 j 모드의 i 번째 반복 연산에서의 예측된 모드 확률을 의미하며, $\pi^j \equiv \pi(:,j)$ 로 j 모드의 모드 간 전이확률(transition probability)이고, μ_i 는 i 번째 반복 연산의 모드 확률이다.

- 모드의 혼합된 초기 추정치

$$\rho_i^{oj} = \frac{1}{\mu_T^j(i)} \sum_k \hat{\rho}_i^k \pi^j(k) \mu_i(k), \quad k = 1, 2 \quad (18)$$

여기서 ρ_i^{oj} 는 j 모드의 혼합된 초기 추정치이다.

② 모드의 저항률 분포 갱신

2 단계에서는 1단계의 각 모드의 혼합된 초기 추정치를 이용하여 아래와 같이 각 모드에서 저항률 분포를 갱신한다.

- 모드1의 저항률 분포 갱신 (L1-norm 조정방법)

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{i+1}^1 &= \rho_i^{o1} + H_{L1}^{-1} G_{L1} \\ H_{L1} &\equiv J_1^T D_{V1}^T \Sigma_V^{-1} D_{V1} J_1 + \alpha D_\rho^T R^T R D_\rho \\ G_{L1} &\equiv J_1^T D_{V1}^T \Sigma_V^{-1} D_{V1} (V_m - V_c(\hat{\rho}_i^1)) \\ [D_{V1}]_{n,n} &= (|[V_m - V_c(\hat{\rho}_i^1)]|_n + \beta)^{-\frac{1}{2}} \\ [D_\rho]_{n,n} &= (|(\hat{\rho}_i^1) - \rho_o|_n + \beta)^{-\frac{1}{2}} \\ J_1 &\equiv \dot{V}_c(\hat{\rho}_i^1) \end{aligned} \quad (19)$$

- 모드2의 저항률 분포 갱신 (TV 조정방법)

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{i+1}^2 &= \rho_i^{o2} + H_{TV}^{-1} G_{TV} \\ H_{TV} &\equiv J_2^T D_{V2}^T \Sigma_V^{-1} D_{V2} J_2 + \alpha R^T E^{-1} R \\ G_{TV} &\equiv J_2^T D_{V2}^T \Sigma_V^{-1} D_{V2} (V_m - V_c(\hat{\rho}_i^2)) - \alpha R^T E^{-1} R \rho_i^{o2} \\ [D_{V2}]_{n,n} &= (|[V_m - V_c(\hat{\rho}_i^2)]|_n + \beta)^{-\frac{1}{2}} \\ [E]_{n,n} &= [\sqrt{(R_n \rho_i^{o2})^2 + \beta}] \\ J_2 &\equiv \dot{V}_c(\hat{\rho}_i^2) \end{aligned} \quad (20)$$

③ 모드의 확률 갱신

3단계에서는 2단계에서 갱신된 각 모드의 저항률 분포에 대한 전압을 계산하여 측정전압 간의 잔류오차를 계산하고 이에 따른 가능성 함수를 계산하여 모드 확률을 갱신한다. 이때 일반적인 IMM 방법과는 달리 제안한 IDM 방법에서는 정적 복원알고리즘을 기반으로 하고 있어 식 (17)의 예측된 모드확률의 신뢰도 여부를 조사하여 모드 확률을 갱신한다.

- 가능성 함수(likelihood function)

$$\begin{aligned} L_i^j &= \frac{1}{\sqrt{2\pi|S^j|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(e_i^j)^T (S^j)^{-1} (e_i^j)\right\} \\ e_i^j &= V_m - V_c(\hat{\rho}_{i+1}^j) \end{aligned} \quad (21)$$

여기서 L_i^j , e_i^j , S^j 는 각각 j 모드의 가능성 함수, 잔류오차, 잔류오차의 공분산 행렬을 의미하며, 각 모드의 가능성 함수는 측정전압과 식 (19) 또는 식 (20)에 의해 추정된 저항률 분포에서의 계산 전압 간의 차인 잔류오차에 의해 결정된다.

- 모드 확률 갱신

$$\mu_{i+1}^j = \begin{cases} L_i^j \mu_i^j \mu_T^j(i) / \sum_j L_i^j \mu_i^j \mu_T^j(i), & \phi = 0 \text{ 일 때} \\ L_i^j \mu_i^j \mu_T^j(1) / \sum_j L_i^j \mu_i^j \mu_T^j(1), & \phi = 1 \text{ 일 때} \end{cases} \quad (22)$$

여기서 μ_{i+1}^j 는 j 모드의 갱신된 모드 확률이고, ϕ 는 식 (17)의 예측된 모드 확률에 대한 신뢰도를 판단하는 것으로, 신뢰도가 있는 경우는 $\phi = 0$ 이고, 신뢰도가 없는 경우는 $\phi = 1$ 이 된다. 만일 예측된 모드 확률이 신뢰도가 없다면 갱신된 모드 확률 μ_{i+1}^j 는 첫 번째 예측된 모드 확률 $\mu_T^j(1)$ 을 사용하여 계산한다. 이때 예측된 모드 확률의 신뢰도는 다음 식 (23)과 (24)에 의해 판단한다.

$$D(i) = \begin{cases} 0, & \frac{L_i^1}{L_i^2} \leq 1 \\ 1, & \frac{L_i^1}{L_i^2} > 1 \end{cases} \quad (23)$$

$$\phi = \begin{cases} 0, & |D(i) - D(i-1)| = 0 \text{ 일 때} \\ 1, & |D(i) - D(i-1)| = 1 \text{ 일 때} \end{cases} \quad (24)$$

식 (23)과 (24)에서, i 번째 반복에서의 두 모드의 가능성 함수의 비와 $i-1$ 번째 반복에서의 가능성 함수의 비를 비교하여 $|D(i) - D(i-1)| = 0$ 인 경우 즉 반전이 일어나지 않는 경우는 예측된 모드의 확률의 신뢰도 $\phi = 0$ 이 되며, $|D(i) - D(i-1)| = 1$ 인 반전이 된 경우 예측된 모드의 확률은 신뢰도가 없는 것으로 평가하여, $\phi = 1$ 이 된다.

④ 최종 저항률 분포 추정

4단계에서는 2단계에서 갱신된 각 모드의 저항률 분포와 3단계에서 갱신된 각 모드 확률을 바탕으로 최종 저항률 분포를 추정한다. 즉, IDM

조정방법에 의한 $i+1$ 번째 반복 연산의 최종 저항률 분포는 식 (25)와 같이 각 모드에서 갱신된 저항률 분포와 모드 확률의 곱의 합으로 계산된다.

$$\hat{\rho}_{i+1} = \sum_j \hat{\rho}_{i+1}^j \mu_{i+1}^j \quad (25)$$

III 모의실험

본 논문에서는 IDM 조정방법에 의한 영상 복원 성능을 평가하기 위하여 몇 가지 시나리오를 설정하고 모의실험을 수행하였다. 그리고 해당 결과는 L1-norm 조정방법(식 (10))과 TV 조정방법(식 (15))을 개별적으로 사용했을 때의 복원 결과와 비교 분석하였다. 이때 공통적으로 조정행렬 R 은 식 (14)의 행벡터를 갖는 TV 조정연산자를 사용하였다. 아울러, 전압 데이터의 노이즈에 대한 공분산 행렬 Σ_V 은 단위행렬을 사용하였다.

모의실험에서, 이상 유동장의 단면은 반지름이 14cm이고 16개 전극이 부착된 원형 도메인으로 가정하였고, 내부의 이상 유동의 저항률 분포를 추정하기 위해 1049개의 노드와 1968개의 요소를 갖는 정문제 메쉬와 279개의 노드와 492개의 요소를 갖는 역문제 메쉬를 사용하였다. 그리고 도메인 내부의 배경 저항률 값은 $400(\Omega cm)$, 표적 저항률 값은 $800(\Omega cm)$ 라고 가정하였다. 또한 전류주입은 삼각함수형 전류패턴을 사용하였다.

모의실험은 두 가지 시나리오를 가정하였다. 첫 번째 시나리오는 중앙 부근에 표적이 위치했을 때 측정 전압의 민감도(sensitivity)가 떨어지므로, 이에 따른 영상 복원 성능을 살펴보기 위해 중앙 부근에 크기가 상대적으로 작은 반지름 2cm인 표적이 두 개 있는 시나리오를 고려하였다. 그리고 두 번째 시나리오는 도메인의 가장자리 부근이 상대적으로 민감도가 높음으로 변별력(distinguishability)을 살펴보기 위해, 표적이 비교적 대상체 경계 부근에 위치해 있고 크기가 큰 반지름 3cm인 표적이 4개 있는 시나리오를 고려하였다. 또한 해당 시나리오에 대한 노이즈 영향을 살펴보기 위해 측정 전압 데이터에 노이즈를 추가하지 않은 경우와 추가한 경우의 총 4가지 경우에 대하여 모의실험을 수행하였다.

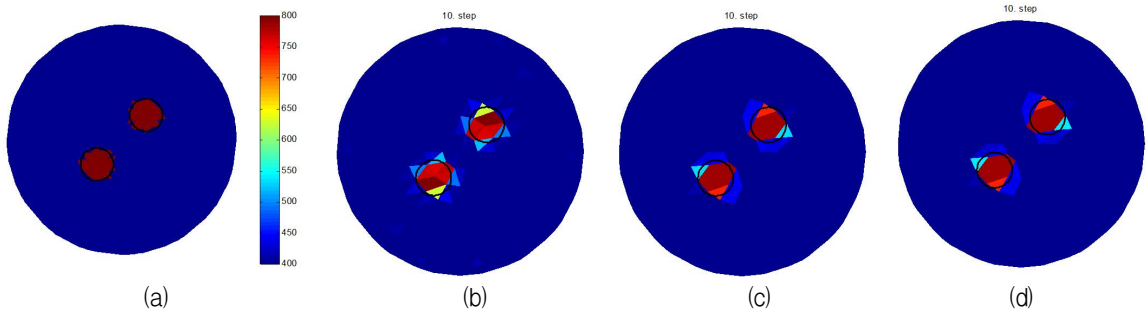


Fig. 1. Reconstructed images for scenario 1 without noise: (a) true image, (b) image by L1-norm regularization method, (c) image by TV regularization method, and (d) image by IDM regularization method

그림 1. 노이즈가 없는 경우 첫 번째 시나리오에 대한 복원 영상 (a) 원래 영상, (b) L1-norm 조정방법에 의한 복원 영상, (c) TV 조정방법에 의한 복원 영상, (d) IDM 조정방법에 의한 복원 영상

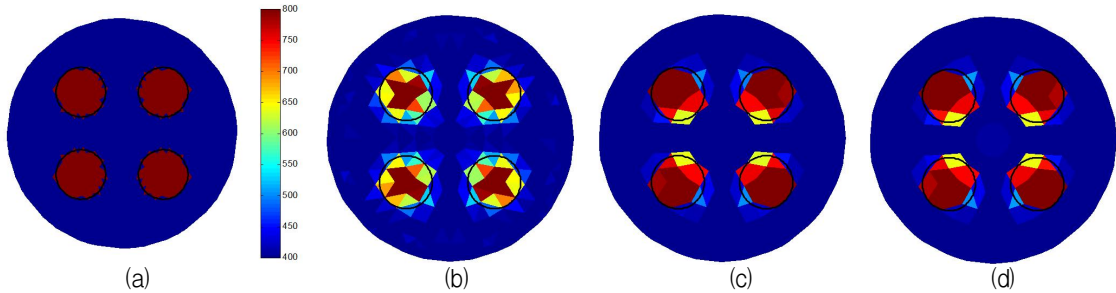


Fig. 2. Reconstructed images for scenario 2 without noise: (a) true image, (b) image by L1-norm regularization method, (c) image by TV regularization method, and (d) image by IDM regularization method

그림 2. 노이즈가 없을 경우 두 번째 시나리오에 대한 복원 영상 (a) 원래 영상, (b) L1-norm 조정방법에 의한 복원 영상, (c) TV 조정방법에 의한 복원 영상, (d) IDM 조정방법에 의한 복원 영상

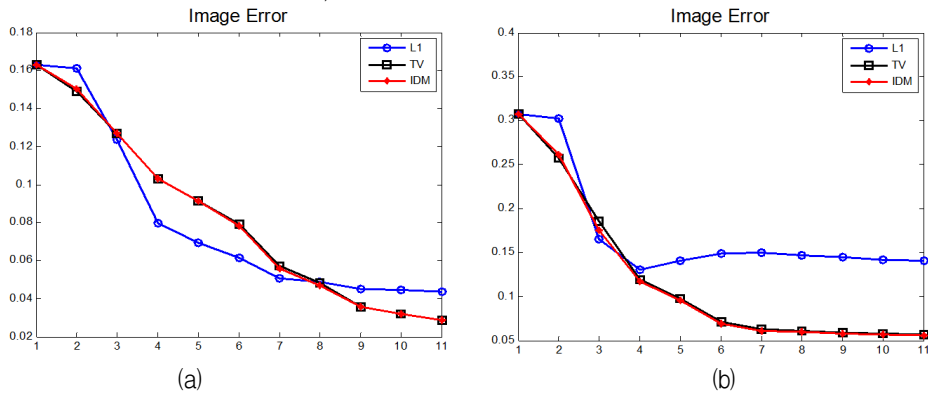


Fig. 3. Results for Image error: (a) scenario 1, (b) scenario 2

그림 3. 상대적 영상 오차 결과 (a) 첫 번째 시나리오, (b) 두 번째 시나리오

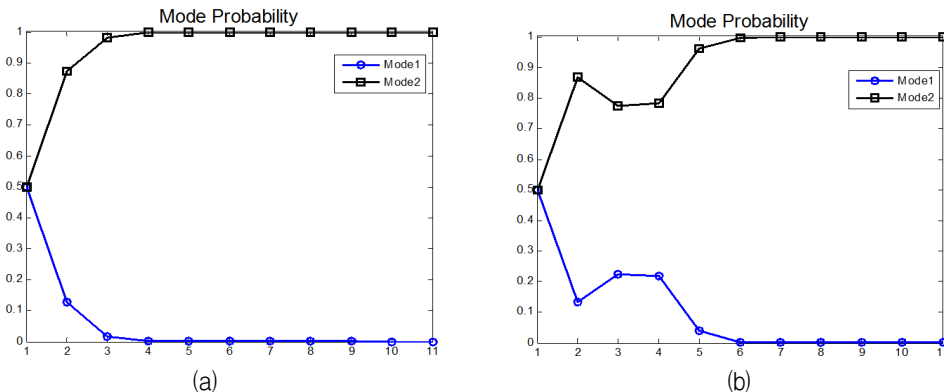


Fig. 4. Mode probability: (a) scenario 1, (b) scenario 2

그림 4. 모드 확률 (a) 첫 번째 시나리오, (b) 두 번째 시나리오

1. 노이즈 생성

모의실험에서 사용된 노이즈는 표적의 교란에 의한 신호 성분만을 고려하기 위하여 표적이 있는 경우에서의 생성된 전압 데이터(V)에서 배경만으로 이루어진 균일한 상태에서 생성된 전압 데이터(V_h)를 뺀 성분의 5%에 랜덤 값을 곱하여 생성하였다. 이때 랜덤 값은 고정된 시드번호(1번)를 사용하였다. 즉, 노이즈(N)의 m 번째 값은 식 (26)과 같이 나타낼 수 있고 식 (27)는 노이즈가 추가된 측정 전압 데이터를 의미한다.

$$noise(m) = 0.05 \times (V(m) - V_h(m)) \times randn(1,1) \quad (26)$$

$$V_m = V + noise \quad (27)$$

2. 복원 성능지표

제안한 기법의 성능을 정량적으로 평가하기 위하여 아래 식 (28)의 영상오차 IE (image error)를 성능평가 지표로 사용하였다.

$$IE(i) = \sqrt{\frac{(\rho_{true} - \hat{\rho}_i)^T (\rho_{true} - \hat{\rho}_i)}{\rho_{true}^T \rho_{true}}} \quad (28)$$

식 (28)의 IE 는 값이 작을수록 우수한 성능을 나타내며, ρ_{true} 와 $\hat{\rho}_i$ 는 각각 실제의 저항률 분포와 i 번째 추정된 저항률 분포를 의미한다.

3. 모의실험 결과

그림 1과 2는 첫 번째 시나리오와 두 번째 시나리오에 대한 원래 영상과, 측정 전압 데이터 생성 시 노이즈를 추가하지 않은 경우에서의 10번 반복 후의 복원 영상을 나타내었다. 그림 1과 2의 (a)는 시나리오에 따른 원래 영상이고, (b)는 L1-norm 조정방법에 의한 복원영상, (c)는 TV 조정방법에 의한 복원 영상, (d)는 제안한 IDM 조정방법에 의한 복원 영상이다. 이때 $\alpha = 10^{-6}$, $\beta = 10^{-6}$, $\pi = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$, 초기 모드 확률 $\mu_1 = [0.5 \ 0.5]^T$ 를 사용하였다.

그림 1과 2의 (b)와 (c) 복원 영상에서 알 수 있듯이 노이즈가 없는 경우 L1-norm 조정방법과 TV 조정방법은 표적의 경계와 저항률 분포를 비

교적 잘 추정하고 있음을 알 수 있다. 더욱이 TV 조정방법은 L1-norm 조정방법에 비하여 비교적 균일하게 표적과 배경의 저항률을 추정하고 경계에서 이산적 분포로 추정함으로써 더 나은 영상을 나타낼 수 있다. 그리고 (d) IDM 방법에 의한 복원 영상은 TV 조정방법에 의한 복원 영상과 비슷함을 알 수 있다.

그림 3은 반복 연산에 따른 영상 오차 결과를 나타낸 것으로, 노이즈가 없는 때에는 TV 조정방법이 L1-norm 조정방법에 비하여 영상 오차가 점차적으로 낮아져 우수한 성능을 나타낼 수 있다. 그리고 IDM 조정방법은 TV 조정방법의 영상 오차 곡선을 따르고 있음을 알 수 있다.

그림 4는 제안한 IDM 조정방법의 모드 확률 결과를 나타낸 것으로 초기 반복 연산부터 모드 2(TV 조정방법)의 확률이 모드 1(L1-norm 조정방법)의 확률에 비하여 우세함을 알 수 있다. 이는 그림 3의 IDM 조정방법의 영상 오차 곡선이 TV 조정방법을 따르는 이유를 잘 나타내 주고 있다.

그림 5와 6은 첫 번째 시나리오와 두 번째 시나리오에 대한 원래 영상과 측정 전압 데이터 생성 시 식 (26)의 노이즈를 추가 했을 때의 10번 반복 후의 복원 영상을 나타내었다. 그림 5와 6의 (a)는 시나리오에 따른 원래 영상이고, (b)는 L1-norm 조정방법에 의해 복원 영상, (c)는 TV 조정방법에 의해 복원 영상, (d)는 제안한 IDM 조정방법에 의해 복원 영상이다. 영상 복원 시 $\alpha = 10^{-4}$ 을 사용하였고, 노이즈가 없는 경우와 마찬가지로 $\beta = 10^{-6}$, $\pi = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$, 초기 모드 확률 $\mu_1 = [0.5 \ 0.5]^T$ 를 사용하였다.

그림 5에서, 첫 번째 시나리오에 노이즈가 추가된 경우, L1-norm 조정방법이 비교적 우수한 복원 영상을 나타내었다. TV 조정방법은 L1-norm 조정방법에 비하여 저항률 분포를 과소추정(underestimate)하고 표적의 경계와 표적 사이 간 경계가 모호해진 복원 영상을 나타내었다. 한편 제안한 방법은 L1-norm 조정방법의 영상과 유사한 결과를 나타낼 수 있다.

그림 6에서, 두 번째 시나리오에 노이즈가 추가된 경우, L1-norm 조정방법은 표적의 저항률 분포가 불균일하고 배경영역에 원하지 않는 성분이 나타났으며, TV 조정방법은 두 개의 표적 사이에

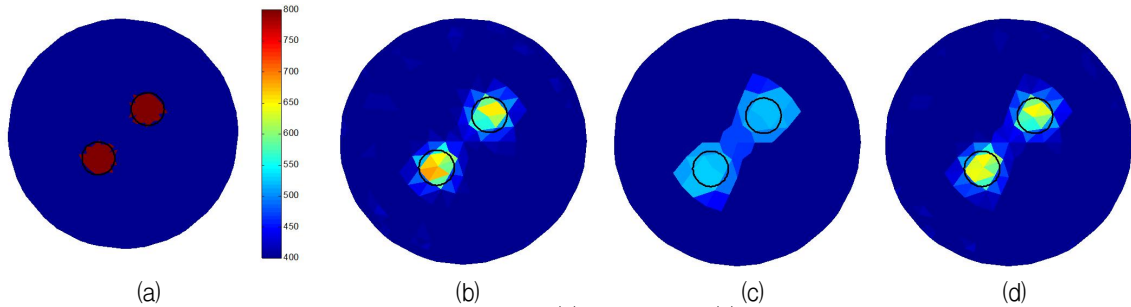


Fig. 5. Reconstructed images for Scenario 1 with 5% noise: (a) true image, (b) image by L1-norm regularization method, (c) image by TV regularization method, and (d) image by IDM regularization method

그림 5. 5% 노이즈가 있을 때의 첫 번째 시나리오에 대한 복원 영상 (a) 원래 영상, (b) L1-norm 조정방법에 의한 복원 영상, (c) TV 조정방법에 의한 복원 영상, (d) IDM 조정방법에 의한 복원 영상

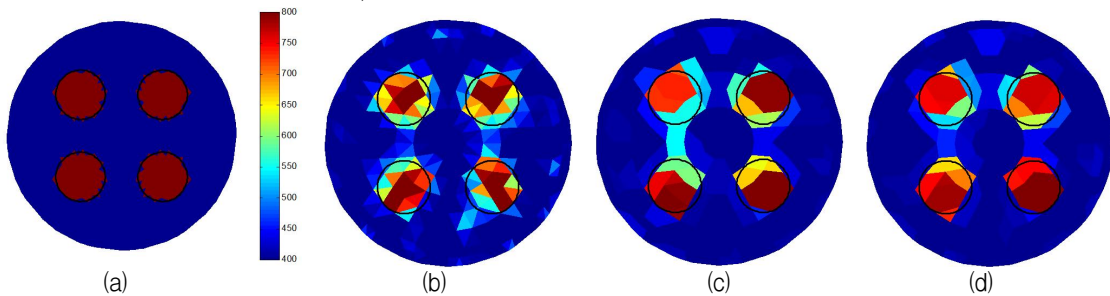


Fig. 6. Reconstructed images for Scenario 2 with 5% noise: (a) true image, (b) image by L1-norm regularization method, (c) image by TV regularization method, and (d) image by IDM regularization method

그림 6. 5% 노이즈가 있을 때의 두 번째 시나리오에 대한 복원 영상 (a) 원래 영상, (b) L1-norm 조정방법에 의한 복원 영상, (c) TV 조정방법에 의한 복원 영상, (d) IDM 조정방법에 의한 복원 영상

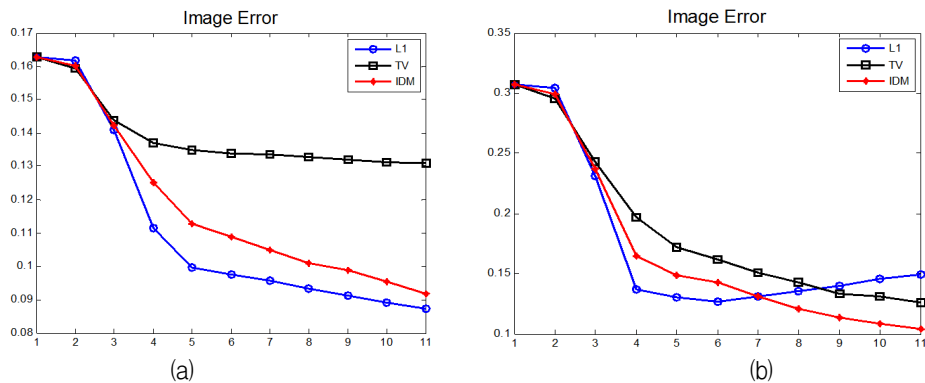


Fig. 7. Results for Image error: (a) scenario 1, (b) scenario 2

그림 7. 상대적 영상 오차 결과 (a) 첫 번째 시나리오, (b) 두 번째 시나리오

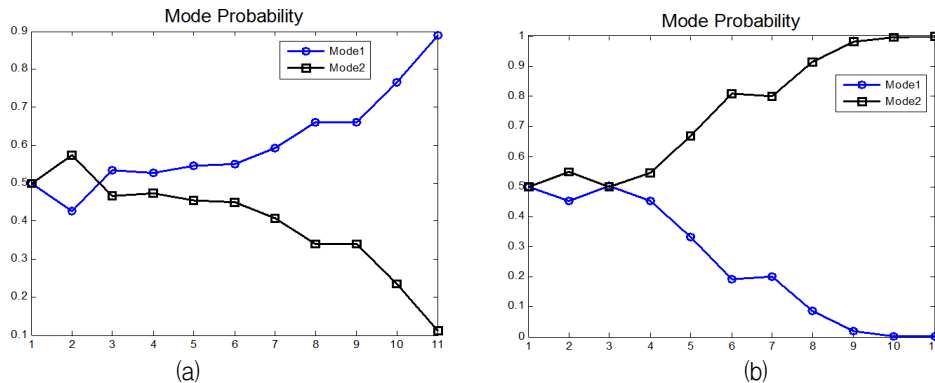


Fig. 8. Mode probability: (a) scenario 1, (b) scenario 2

그림 8. 모드 확률 (a) 첫 번째 시나리오, (b) 두 번째 시나리오

서 경계가 모호해진 영상을 얻었다. 이에 반해 IDM 조정방법은 TV 조정방법과 비슷한 영상이나 좀 더 개선된 비교적 우수한 복원 영상을 얻었다.

그림 7 (a)의 첫 번째 시나리오에 대한 반복 연산에 따른 영상 오차는 L1-norm 조정방법이 상대적으로 가장 우수한 성능을 나타냈으며, 제안한 방법은 모드 간 상호작용에 의해 점차적으로 L1-norm 조정방법의 영상 오차 곡선으로 수렴함을 알 수 있다. 그림 7 (b)의 두 번째 시나리오에 대한 반복 연산에 따른 영상 오차는 L1-norm 조정방법과 TV 조정방법의 모드 간 상호작용에 의한 IDM 조정방법이 7번째 반복부터 가장 우수한 성능을 나타내었다.

그림 8의 IDM 조정방법에서의 모드 확률 결과, (a)의 표적의 크기가 작고 비교적 중앙 쪽에 위치한 첫 번째 시나리오인 경우 초기에는 모드2의 확률이 약간 크고, 점차적으로 모드1의 확률이 높아짐을 알 수 있다. 이와는 달리 (b)의 표적이 비교적 대상체 경계 부근에 위치하고 크기가 큰 두 번째 시나리오인 경우에는 초기 반복 구간에서는 비슷한 모드 확률을 나타내다가 점차적으로 모드2의 확률이 우세하게 나타났다.

한편, 그림 4의 노이즈가 없는 경우와 그림 8의 노이즈가 있는 경우의 모드 확률 결과로부터, 노이즈가 없는 경우 IDM 조정방법은 초기 반복 구간부터 빠르게 모드 확률의 간격이 벌어져 모드 간 상호작용이 거의 일어나지 않으므로 우세한 모드 확률을 갖는 조정방법의 결과와 거의 똑같은 영상을 얻었다. 그러나, 노이즈가 있는 경우에는 모드 확률이 초기에 비슷한 수준으로 두 개의 모드 간 상호작용이 크고, 이후 천천히 모드 확률의 간격이 벌어져 우수한 성능을 나타내는 조정방법의 결과와 비슷하거나 개선된 영상을 얻었다.

두 가지 시나리오에 대하여 각각 노이즈가 없는 경우와 노이즈가 있는 경우의 모의실험 결과, 제안한 방법은 반복 연산에 따라 모드의 가능성 함수를 계산하여 갱신된 모드 확률로 저항률 분포를 추정함으로써 자동적으로 우수한 성능을 나타내는 조정방법과 비슷한 영상 복원 성능을 나타냄을 알 수 있었다.

IV 결론

본 논문은 전기 저항률 단층촬영법의 영상 복원 성능을 개선하고자 L1-norm 조정방법과 TV 조정방법의 두 모드에서 상호작용하는 이중-모드 (IDM) 조정방법을 제안하였다. L1-norm 조정방법은 내부 저항률 분포를 연속적 형태로 추정하나 노이즈가 있는 경우 대체적으로 우수한 성능을 나타내고, 이와는 달리 TV 조정방법은 내부 저항률 분포를 이산적으로 추정하며 노이즈가 없을 때 우수한 성능을 나타낸다. 따라서 제안한 방법은 두 조정방법에 따라 서로 다른 특성을 갖는 영상 복원 성능을 상호 보완함으로써 상황에 맞는 적합한 추정 성능을 나타낼 수 있도록 두 개의 모드 간 상호작용과 이에 따른 잔류오차의 가능성 함수 계산을 수행한다. 그리고 이를 바탕으로 모드 확률을 갱신하여 저항률 분포를 추정한다. 모의실험을 통하여 제안한 기법의 성능을 평가한 결과, 자동적으로 우수한 영상의 결과로 수렴하고 때에 따라 상호 간 영향으로 보다 나은 영상을 얻었다.

References

- [1] D. S. Holder, *Electrical Impedance Tomography: Methods, History and Applications*, IOP Publishing Ltd, 2005.
- [2] M. Vauhkonen, *Electrical Impedance Tomography and prior information*, Ph.D. Thesis, University of Kuopio, Finland, 1997.
- [3] K. Y. Kim and B. S. Kim, "Regularized Modified Newton-Raphson Algorithm for Electrical Impedance Tomography Based on the Exponentially Weighted Least Square Criterion," *Journal of IEEE Korea Council*, vol. 4, no. 2, pp. 77-84, 2000.
- [4] S. I. Kang and K. Y. Kim, "Image Reconstruction Using Iterative Regularization Scheme Based on Residual Error in Electrical Impedance Tomography," *Journal of IKEEE*, vol. 18, no. 2, pp. 272-281, 2014.
- [5] M. Cheney, D. Isaacson, J.C. Newell, S. Simske and J. Goble, "NOSER: An algorithm for solving the inverse conductivity problem,"

- Int. J. Imaging Syst. Technol.*, vol. 2, no. 2, pp. 66-75, 1990.
- [6] W. Fan, H. Wang, Q. Xue, Z. Cui, B. Sun and Q. Wang, "Modified sparse regularization for electrical impedance tomography," *Review of Scientific Instruments*, vol. 87, no. 034702, pp. 1-13, 2016.
- [7] B. Jin, T. Khan and P. Maass, "A reconstruction algorithm for electrical impedance tomography based on sparsity regularization," *Int J Numer Methods Eng*, vol. 89, pp. 337-353, 2011.
- [8] M. Gehre, T. Kluth, A. Lipponen, B. Jin, A. Seppanen, J. P. Kaipio and P. Maass, "Sparsity reconstruction in electrical impedance tomography: An experimental evaluation," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 236, pp. 2126-2136, 2012.
- [9] T. Dai and A. Adler, "Electrical Impedance Tomography Reconstruction Using l_1 Norms for Data and Image Terms," *30th Annual International IEEE EMBS Conference*, Vancouver, British Columbia, Canada, August. 2008, pp. 2721-2724.
- [10] A. Borsic, B. M. Graham, A. Adler and W. R. B. Lionheart, "Total Variation Regularization in Electrical Impedance Tomography," *Technical Report 92*, School of Mathematics, University of Manchester, pp. 1-26, 2007.
- [11] A. Borsic, B. M. Graham, A. Adler and W. R. B. Lionheart, "In vivo Impedance Imaging With Total Variation Regularization," *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 29, no. 1, pp. 44-54, 2010.
- [12] T. J. Yorkey, J. G. Webster and W. J. Tompkins, "Comparing Reconstruction Algorithms for Electrical Impedance Tomography," *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 34, no. 11, pp. 843-852, 1987.
- [13] E. Somersalo, M. Cheney and D. Isaacson, "Existence and uniqueness for electrode models for electric current computed tomography," *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 52, no. 4, pp. 1023-1040, 1992.
- [14] B. S. Kim, M. C. Kim, S. Kim and K. Y.

Kim, "Nonstationary electrical impedance tomography with the interacting multiple model scheme," *Measurement Science and Technology*, vol. 15, no. 10, pp. 2113-2123, 2004.

BIOGRAPHY

Suk-In Kang (Member)



2000 : BS degree in Electronic Engineering, Jeju National University.

2003 : MS degree in Electrical and Electronic Engineering, Jeju National University.

2012~present : PhD degree course in Faculty of Applied Energy System, Major of Electronic Engineering, Jeju National University.

Kyung-Youn Kim (Member)



1983 : BS degree in Electronic Engineering, Kyungpook National University.

1986 : MS degree in Electronic Engineering, Kyungpook National University.

1990 : PhD degree in Electronic Engineering, Kyungpook National University.

1990~present : Professor, Dept. of Electronic Engineering, Jeju National University.