

연결큐브 수업을 위한 거북표현체계의 활용

정혜림* · 이승주** · 조한혁***

2009 개정 교육과정에서는 공간 감각의 향상을 위해 초등학교 6학년 수학 교과서에 ‘연결큐브’를 사용한 활동을 새롭게 도입하고 의사소통과 구체적 조작을 통한 교수 학습 방법을 강조하였다. 교사들을 대상으로 한 설문과 면담 분석 결과 공간 대상에 대한 표현 체계의 부재로 연결큐브 수업의 문제해결과 의사소통 측면에서 교사가 지도하는데 많은 어려움이 있음을 확인하였다. 본 연구에서는 이런 어려움을 해소하기 위한 대안으로 ‘거북표현체계’를 제시하고, 교사를 대상으로 설문과 검사를 실시하였다. 그 결과 문제해결과 의사소통 측면에서 거북표현체계의 효과와 유용성을 확인할 수 있었다.

1. 서론

공간 감각은 제7차 교육과정부터 도형 영역의 주요 목표로 등장하였으며 이에 따라 초등학교 2학년과 6학년 교과서에 쌓기나무 단원이 새롭게 도입되었다(교육부, 1998). 이와 같이 공간 감각을 강조하는 흐름은 현재까지 이어지고 있으며, 2009 개정 교육과정에서는 공간 감각의 향상을 위해 초등학교 6학년 교과서에 ‘연결큐브’¹⁾를 사용한 활동을 새롭게 도입하였다. 연결큐브 활동을 도입한 이유로 교사용 지도서(교육부, 2015)에는 ‘쌓기나무는 바닥에서부터 쌓아 올려야만 하는 한계점이 있어 쌓기나무 활동의 확장 개념으로 공간 감각을 향상시키기 위함’이라 하였다. 즉, 연결큐브 활동은 쌓기나무 활동의 확장, 후속 학습으로, 공간 감각이 더욱 요구되는 활동이라 볼 수 있다.

연결큐브 활동은 구체적으로 ‘연결큐브 4개 또는 5개로 다양한 모양 만들기, 만든 모양을 돌리거나 뒤집어서 같은 것 찾기, 연결큐브 4개짜리 모양 두 개를 연결하여 새로운 모양 만들기, 연결큐브 4개짜리 모양 두 개를 연결하여 만들 수 있는 모양 찾기, 연결된 전체 모양을 두 가지로 분할해보기’ 등이 있다. 이 활동들은 두 차시에 걸쳐 다루어지며, 두 차시 모두 수학적 의사소통과 구체적 조작을 교수 학습 방법으로 권장하고 있는 공통점을 갖고 있다.

그러나 쌓기나무 수업에서 교사와 학생이 의사소통에 어려움을 겪음을 보고한 여러 선행 연구(Ben-Chaim et al, 1989; 김수운, 2004; 장유라, 2010; 장혜원, 2015)로부터 연결큐브 차시 역시 수학적 의사소통이 원활하지 않을 것임을 예측할 수 있다. Ben-Chaim et al.(1989)은 6~8학년 학생들이 공간 정보를 의사소통하는데 어려움을 겪으며 이를 해소하기 위해 효과적인 의사소통

* 서울대학교 대학원, rim6458@snu.ac.kr (제1 저자)

** 서울대학교 대학원, 2ndclassroom@snu.ac.kr

*** 서울대학교, hancho@snu.ac.kr (교신저자)

1) 연결큐브는 정육면체 모양의 블록 교구로 연결큐브의 6면 중 5면은 오목하고 1면은 볼록하여 연결큐브끼리 연결이 쉽다.

방법이 필요하다 하였다. 김수운(2004)은 6학년 학생들이 쌓기나무 모양을 표현할 때 의미가 불명확한 비수학적 용어를 사용하여 의사소통에 혼란을 겪음을 지적하였으며 이와 같은 모습은 장유라(2010), 장혜원(2015)에서도 관찰되었다. 장유라(2010)는 쌓기나무 모양을 설명하는 학생이 설명을 듣고 쌓기나무를 쌓는 학생의 관점을 고려하지 못해 의사소통에 어려움을 느낀다 하였다. 이와 같이 관점 바꾸기를 하지 못해 의사소통에 혼란을 겪는 것은 학생 뿐 아니라 교사도 겪는 일이다. 장혜원(2015)은 초등학교 2학년 쌓기나무 수업에서 의사소통을 분석하였는데, 이에 따르면 교사와 학생의 의사소통 과정에서 용어가 지칭하는 바에 대해 명확한 합의를 이끈 후 사용하도록 할 필요가 있다고 언급하였다.

이처럼 원활한 의사소통을 위해서는 구체물 외에 합의된 표현 체계가 필요하지만 공간 정보를 나타낼 표현 체계가 제시된 바 없다. 따라서 교수 학습 과정에서 의사소통에 많은 어려움이 있을 것으로 예상되는데, 이러한 어려움은 학생들뿐만 아니라 연결큐브 문제 해결을 설명해야 하는 교사에게 더욱 클 것이다.

한편, 문제해결 측면에서 연결큐브 활동은 모양을 돌리거나 뒤집어서 같은 모양인지 알아보는 심적 회전을 다루는 점에서 전통적 공간 시각화 과제인 Shephard & Metzler(1971)의 심적 회전 과제(Mental rotation task)와 유사하다. 지도서(교육부, 2015)에는 이를 지도하는 방법으로 연결큐브 모양을 직접 돌리고 뒤집어 확인하는 구체적 조작 방법을 제안하고 있다. 그러나 이는 연결큐브라는 구체물이 필요하므로 교수 학습에서만 사용할 수 있을 뿐 평가 시에는 연결큐브 없이 문제를 해결해야 한다. 따라서 교사마다 학생이 사용할 만한 적절한 해결 전략을 제시해야 하는 부담을 겪게 된다. 심적 회전 문항을 해결할 때 초보자들은 주로 심상을 떠올려 회전시키

는 직관적인 접근을 한다는 Stieff(2007)의 연구처럼 교사들 대부분이 이와 같은 접근으로 문항을 해결하고 가르칠 것을 추정할 수 있다. 그러나 이러한 직관적 접근은 공간 감각이 부족한 학생에게는 지도하기가 매우 어려운 방식이다(장혜원, 강종표, 2009). 또한 공간 정보를 표현하는 합의된 표현 체계가 없는 상황에서 지도의 어려움은 더 커지기 마련이다.

이처럼 연결큐브 수업에서 교사가 어려움을 겪을 것이 예상되는데도, 교사가 실제로 문제 해결 지도 시 어떤 전략을 사용하고 어떤 어려움을 겪는지에 관한 연구가 없다. 따라서 본 연구는 교사가 연결큐브 문제를 설명할 때 어떤 전략을 사용하고, 연결큐브 수업에서 어떤 어려움을 겪는지 알아보고자 한다.

또한 이런 어려움을 해소하기 위한 대안으로 ‘거북표현체계’를 제시한다(Cho et al., 2011). 거북표현체계는 구어체 문장이 아닌 기호체계라는 점에서 다중적으로 해석될 수 없어 공간 정보를 표현하기 위한 수단으로 활용될 수 있다(조한혁, 송민호, 2014). 심적 회전 과제에서 거북표현체계의 효과성은 이미 확인된 바 있다(이지운, 조한혁, 송민호, 2013; 이지운, 2015b). 따라서 교사가 거북표현체계로 연결큐브 문제를 해결하고 지도한다면 어떤 차이가 있는지를 살펴보고, 그 효과와 유용성을 확인하고자 다음과 같이 연구 문제를 설정하였다.

연구문제 1. 연결큐브 문제의 해결을 설명할 때 교사가 사용하는 전략은 무엇인가?

연구문제 2. 연결큐브 수업에서 교사는 어떠한 어려움을 겪는가?

연구문제 3. 거북표현체계는 연결큐브 수업에 도움이 되는가?

II. 연결큐브 차시 분석과 공간 인지 전략

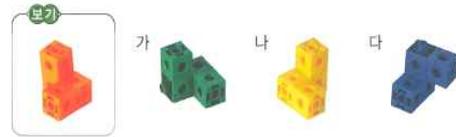
1. 연결큐브 차시 분석

<표 II-1>은 6학년 2학기 지도서의 쌓기나무 단원 지도 계획 중 연결큐브 차시의 수업 내용 및 활동이다. 6차시에는 연결큐브 4개 또는 5개로 만들 수 있는 모양을 만들고 모두 몇 가지인지 알아본다. 빠뜨리는 모양 없이 다 찾을 수 있도록 연결큐브 3개 또는 4개로 만든 모양에서 연결큐브 1개를 옮겨 가며 붙여서 만들 수 있는 모양을 찾도록 하고 있다. 이렇게 모양을 찾는 과정에서 ‘돌리거나 뒤집었을 때 모양이 같으면 같다.’는 것을 이해하는 것이 매우 중요하다. 이를 이해하지 못하면 같은 모양임에도 보는 관점에 따라 다른 모양으로 생각하게 되기 때문이다. 이를 이해했는지 알아보는 문항으로 교과서와 익힘책에는 연결큐브 모양을 돌리거나 뒤집었을 때 같은 모양인 것을 고르는 ‘회전 문항’을 제시하고 있다. 회전 문항은 연결큐브 4개짜리 모양을 회전하는 문항([그림 II-1])과 연결큐브 5개짜리 모양을 회전하는 문항([그림 II-2])로 나뉜다.

7차시에는 6차시에서 연결큐브 4개로 만든 모양 두 가지를 연결하여 새로운 모양을 만들고 색칠하여 구분하는 활동을 한다. 또한 연결큐브 8개로 만든 모양을 4개짜리 연결큐브 모양 두

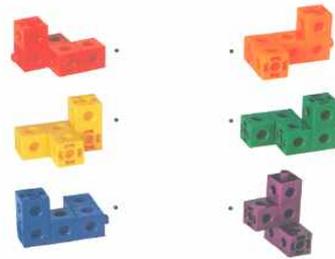
가지로 분리해보는 가역적 사고 활동도 제시되어 있다. 이처럼 7차시에는 4개짜리 연결큐브 모양을 돌리거나 뒤집어서 결합하여 나올 수 있는 모양을 찾는 ‘결합 문항’([그림 II-3])과 교과서에 문항으로 나오진 않았으나 전체 모양을 분리하는 활동에서 ‘분해 문항’을 생각할 수 있다.

돌리거나 뒤집었을 때 **보기**와 같은 모양이 되는 것을 모두 찾아 ○표 하시오.



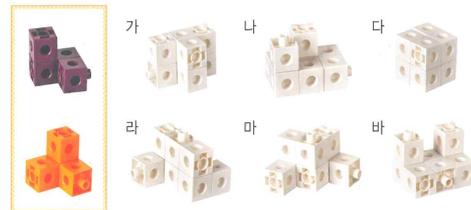
[그림 II-1] 회전 문항(교육부, 2015)

뒤집거나 돌렸을 때 같은 모양인 것끼리 선으로 이어 보시오.



[그림 II-2] 회전 문항(교육부, 2015)

다음 연결큐브 모양을 이용하여 만들 수 있는 새로운 모양을 모두 찾아보시오.



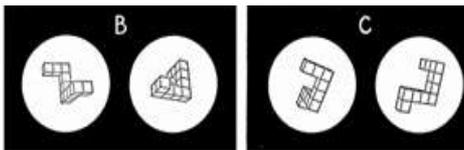
[그림 II-3] 결합 문항(교육부, 2015)

<표 II-1> 연결큐브 차시 수업 내용 및 활동(교육부, 2015)

차시	수업 내용 및 활동
6	조건에 따라 모양을 만들 수 있어요.
	<ul style="list-style-type: none"> 주어진 조건에 맞게 연결큐브 4,5개로 만들 수 있는 모양을 찾게 한다. 만들 수 있는 모양을 빠뜨리지 않고 찾기 위한 방법을 경험하게 한다.
7	여러 가지 모양을 만들 수 있어요.
	<ul style="list-style-type: none"> 연결큐브 4개로 만든 모양으로 여러 가지 모양을 만들어 보게 한다.

교사용 지도서(교육부, 2015) 6차시에서는 ‘접치지 않게 최대한 많이 찾아보고 찾을 수 있는 방법을 발표해 보는 활동을 통해 수학적 의사소통 능력과 유창성, 융통성을 기를 수 있다.’, 7차시에서는 ‘친구들과 만든 것을 서로 비교하고 설명할 수 있다.’는 데서 두 차시 모두 교수 학습 방법으로 수학적 의사소통을 강조하고 있음을 알 수 있다.

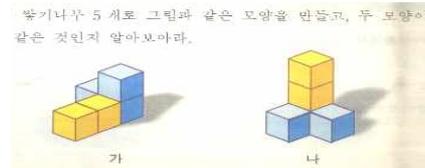
정리해보면 연결큐브를 사용한 두 차시에서 나올 수 있는 문항은 회전 문항, 결합 문항, 분해 문항 총 3가지이고, 이 문항은 모두 심적 회전을 다룬다는 점에서 [그림 II-4]와 같이 블록 모양의 입체를 회전하여 같은지 다른지 변별하는 Shepard & Metzler(1971)의 심적 회전 과제(Mental rotation Task)와 유사하다. 또 두 차시 모두 의사소통을 통한 문제 해결을 권장하고 있으므로 수학적 의사소통 능력을 강조한 차시로 볼 수 있다.



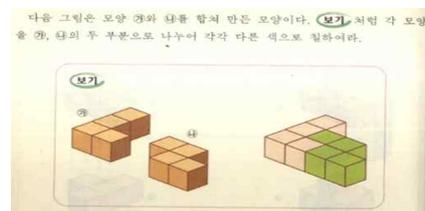
[그림 II-4] MRT (Shepard & Metzler, 1971)

사실 이 내용은 새롭게 도입된 것은 아니며 이미 7차 수학과 교육과정에서 유사한 내용이 다루어진 바 있다. [그림 II-5]와 [그림 II-6]은 7차 교육과정에 따른 교과서와 익힘책 쌓기나무 단원 1차시에 나온 문항으로, 각각 ‘회전 문항’과 ‘결합 문항’으로 볼 수 있다. 그러나 쌓기나무는 물리적 환경에서 돌리거나 뒤집는 것이 불가능하다는 한계가 있다. 반면 연결큐브는 큐브 간 연결을 통해 입체 모양을 만들고 만든 입체를 돌리거나 뒤집는데 용이하다. 따라서 2009 개정 교육과정에서 쌓기나무 대신 연결큐브로 이

내용을 다룬 것은 적합한 교구 선정이라 할 수 있으며, 교사용 지도서(교육부, 2015)에서 연결큐브를 조작하는 활동을 교수학습 방법으로 제시한 것은 자연스러워 보인다.



[그림 II-5] 회전 문항(교육부, 2003)



[그림 II-6] 결합 문항(교육부, 2003)

그러나 구체물 조작 활동을 통해 가르친 수학적 개념은 기호적 표현으로 논의되어야 한다 (Bruner, 1967; Bruner, 1973; Clements, 1999; Kamii et al., 2001; Moyer, 2001). Vygotsky(1978)에 따르면 외향적 도구는 사회적 상호작용을 통한 내면화를 거쳐 내향적 도구로 변환될 수 있는데, 사회적 상호작용은 기호 체계의 사용으로 이루어진다 하였다. 그런데 교사용 지도서에는 구체적 조작만을 제시할 뿐 의사소통 과정에서 논의할 기호적 표현을 제시하지 않고 있다. 따라서 연결큐브 차시에 적절한 기호체계가 있어야 한다는 것을 함의할 수 있다.

2. 공간 인지 전략

공간 인지 전략이란 공간 과제를 해결하는 전략으로, 교육을 통해 학습하는 것이 가능하다 (Gorgorió, 1998). 이지운(2015a)은 선행연구에 나

타난 인지전략을 공간 과제에서 제시되는 자극을 어떠한 맥락으로 받아들이는지에 따른 ‘접근 방법’과 지각된 자극을 마음속에서 표상하는 단계에 나타나는 ‘처리 방법’, 관찰자의 관점을 변환하는 여부에 따른 ‘준거 기준’의 세 가지 측면으로 나눠 살펴보고 있다. 본 연구에서는 교사의 설명 전략 분석에 적합하도록, 이지윤(2015a)의 분석 틀에서 ‘처리 방법’과 ‘준거 기준’의 두 가지 측면에서만 살펴볼 것이다.

처리 방법 측면의 인지 전략은 인식된 자극을 마음속에서 표상하는 단계에 나타나는 전략으로 해결 과정의 핵심적인 부분이다(이지윤, 2015a). Stieff(2007)는 심적 회전 과제를 해결하는 전략을 ‘심적 회전 전략’과 ‘분석적 휴리스틱 전략’으로 분류하였다. 심적 회전 전략은 제시된 자극을 심적으로 회전시키는 것이고, 분석적 휴리스틱 전략은 자극이 대칭성을 띠는 경우 심적으로 회전을 하지 않아도 서로 같은 자극이라는 규칙에 근거에 해결하는 것이다. 초보자는 자극의 형태와 상관없이 본능적으로 심적 회전 전략을 사용하였지만, 전문가들은 자극에 따라 대칭 자극인 경우 분석적 휴리스틱 전략을 사용하였다. 이외에도 처리 방법 측면의 인지전략은 연구자에 따라 다양하게 구분되지만(Lajoie, 2003; Gorgorió, 1998), 의미상 내적 표상을 사용하는 ‘심상 전략’과 사용하지 않는 ‘분석 전략’으로 압축 될 수 있다(이지윤, 2015b).

준거 기준(frame of reference)은 공간 정보의 부호화에서 매우 중요하며 이는 ‘대상 변환 전략’과 ‘자기중심적 변환 전략’으로 구분된다(Zacks, Vettel & Michelon, 2003). ‘대상 변환 전략’은 관찰자의 관점은 고정된 채 과제에 제시된 이미지 자극을 변환시키는 전략을 말하고,

‘자기중심적 변환’은 관찰자의 관점을 변환시키는 전략을 말한다. Wraga, Shephard, Church, Inati & Kosslyn(2005), 이지윤(2015a)은 심적 회전 과제에서 자기중심적 변환을 사용한 집단이 대상 기반 변환을 사용한 집단보다 과제를 더 정확하게 해결하였다고 하였다.

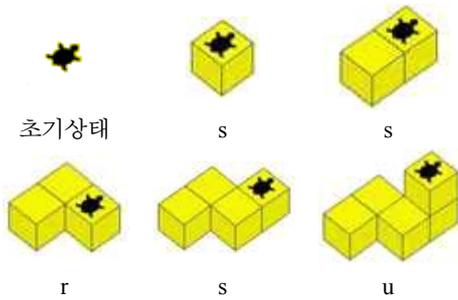
III. 거북표현체계와 연결큐브 교수학습

공간 정보를 의사소통하는 수단으로 여러 가지가 있지만 (Hershkowitz et al., 1990; Sack, 2009) 본 연구에서는 체화된 인지 이론이 반영된 조한혁, 송민호(2014)의 거북표현체계를 연결큐브 교수학습 전략으로 도입한다.

1. 거북표현체계와 거북표현식²⁾

Cho et al.(2012)은 Papert(1980)의 LOGO의 2차원 거북기하 환경을 3차원으로 확장하여 공간 정보를 정육면체 단위로 구성하고 탐구하는 ‘마이크로월드’를 개발하였다. 마이크로월드 상에서 학습자는 ‘거북표현체계(turtle representation system)’를 사용하여 입체를 구성할 수 있도록 한 것으로, ‘거북표현체계’는 거북의 관점에서 방향성과 행동을 나타내는 문자 s(앞), r(오른쪽), l(왼쪽), u(위), d(아래)로 구성되어 있다. 예를 들어, [그림 III-1]의 오른쪽 아래 입체는 거북표현체계를 이용하여 ‘ssrsu’라는 거북표현식으로 표현한 것이다.

2) 조한혁, 송민호(2014)에서는 마이크로월드 상에서 학습자의 생각을 결과물로 구성하여 즉각적인 피드백을 받을 수 있도록 ‘실행’시킬 수 있다는 것을 강조하여 ‘거북실행식’이라는 표현을 사용하였다. 그러나 본 연구에서는 마이크로월드 환경을 도입하지 않고 내적 도구(mental tool)로서의 기능만을 강조하였으므로 ‘거북표현식’ 또는 간단히 ‘표현식’이라 하였다.



[그림 III-1] 연결큐브와 거북표현식

학습자는 거북의 관점과 방향을 자신과 동일시하여 순차적인 절차로 3차원 대상을 구성하고 인식하게 된다. 따라서 수학적 기호가 갖는 추상성의 어려움을 벗어나 초기 단계의 학습자도 사용하기 쉽다(조한혁, 송민호, 2014). Ernest(2010)는 ‘모든 인간 활동은, 수학적 활동과 학습을 포함하여 신체적인 활동이다’라고 언급하며 수학적 활동의 기저에 신체동조적(Embodied)인 관점이 숨어있음을 지적하였다. 이러한 관점에서 ‘거북표현체계’는 학습자가 자신을 거북 위에 투영시켜야만 사용할 수 있는 형태로 체화된 인지의 효과를 극대화시킨 표현체계라고 할 수 있다. 또한 학습자의 내면에서도 결과물을 생성할 수 있어 학습자의 내적 도구(mental tool)로 사용될 수 있다(Cho et al., 2012).

문제해결 측면에서 거북표현체계의 효과에 관한 연구는 이미 이지운 외(2013)에서 이루어진바 있다. Verdenberg & Kuse(1978)의 심적 회전 과제(MRT)를 거북표현체계를 사용하기 전과 후에 정답률을 비교하였는데, 사전 정답률이 낮았던 집단이 사후에 정답률이 유의미하게 높았다. 이 결과를 통해 공간 시각화 능력이 낮은 학생에게 거북표현체계가 효과적인 전략일 수 있음을 알 수 있다.

한편 정교하게 잘 정의된 기호 체계는 학습 구성원 사이에 정확한 의사소통을 가능케 한다. 또한 텍스트 형태의 표현을 통해 생각을 읽고

분석하고 반성할 수 있는 단계로 나아가게 할 수 있다(Noss, 2001; Hoyles & Noss, 2003). Cho et al.(2011)는 초등학교 6학년 학생이 쌓기나무 작품을 만들고 교사와 의사소통 하는 과정에서 거북표현체계를 사용해 3차원 입체를 정확하게 표현하고 이해하는 의사소통 과정을 보여주었다(이지운, 2015b). 이와 같이 거북표현체계는 공간 문제를 해결하는 대안적 전략으로, 또 의사소통의 언어로 사용될 수 있다.

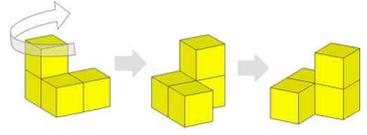
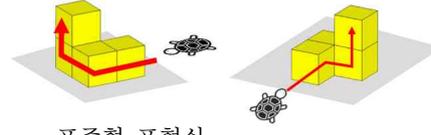
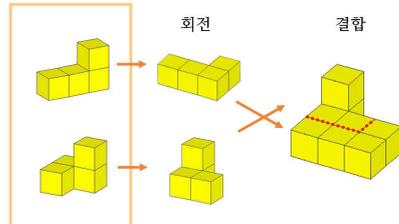
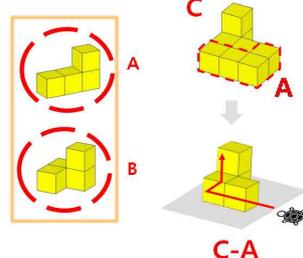
2. 거북표현체계와 코딩 전략

초등학교 교과서의 연결큐브 문항은 기본적으로 심적 회전을 하는 공간 시각화 과제의 형태를 띠고 있으므로 Stieff(2007)의 연구처럼 대다수가 직관적인 ‘심상 전략’으로 접근하리라 예상된다. 이에 대한 대안적 전략으로 본 연구에서는 ‘바닥면’ 개념과 거북표현체계로 ‘코딩’하는 해결전략을 제시한다.

연결큐브와 쌓기나무의 결정적인 차이는 바닥에서부터 위로 쌓아나갈 수 있는지 여부이다. 즉 <표 III-1>의 A와 같은 모양을 연결큐브로는 만들 수 있지만 쌓기나무로는 만들 수 없다. 그러나 바닥면을 <표 III-1>의 B와 같이 설정하면, 쌓기나무로도 모양을 구성할 수 있다. 이와 같이 거북의 관점에서 연결큐브를 쌓기나무처럼 바닥에서부터 쌓을 수 있도록 하기 위해 ‘바닥면’을 설정하고, 이 바닥면에서부터 쌓기나무를 코딩한 것을 ‘표준형 (거북) 표현식’으로 정의한다.

예를 들어 <표 III-1> 에 제시된 A, B는 동일한 입체이다. 이 때 바닥면을 어디로 보고 입체를 구성하느냐에 따라 코딩이 달라진다. A의 경우 그림처럼 지면과 평행한 상태에서부터 입체를 구성한다면 ‘ssul’로 나타나게 된다. 그러나 이것은 쌓기나무로는 구성할 수 없는 형태이므로 ‘표준형 표현식’이 아니다.

<표 III-4> 거북표현체계를 활용한 문제해결

	심상 전략	거북표현체계를 활용한 코딩 전략
회전 유형	 <p>회상표 방향으로 입체를 회전</p>	 <p>표준형 표현식 ssru ssru</p>
결합 유형	 <p>회전 결합</p> <p>보기를 회전시킨 후 결합</p>	 <p>C에서 A를 제거한 후 표준형 표현식</p>

ssru로 표현이 다르므로 서로 다른 입체라고 할 수 있다. 이 두 모양은 학생들이 어려워하는 것 중 하나로 본 연구에서는 이를 각각 ‘왼쪽 타입’과 ‘오른쪽 타입’이라 하였다.

<표 III-4>의 결합 문항을 심상 전략으로 해결한다면, 보기 중 하나를 기준으로 삼은 후 다른 하나를 회전해보며 기준모형에 앞, 뒤, 좌, 우 등 가능한 위치마다 결합해보는 방식으로 해결하게 된다. 또는 보기 중 하나를 오른쪽 입체에서 제거한 후 남은 모양을 회전하며 비교를 할 수도 있다. 어떤 방법을 사용하든 회전 유형에 비해 인지적인 부담이 확연히 늘어났음을 알 수 있다.

거북표현체계를 사용할 경우 먼저 보기 중 어떤 것이 제거하기 좋은 입체인지를 판단한다. 이 경우 A는 B에 비해 비교적 단순한 형태로, 결합된 모양(C)에서 A를 제거한다. 그러면 이제 남은 과정은 회전문항을 해결하는 것과 동일하다. C에서 A를 제거하고 남은 모양을 거북표현으로 나타내어 B와 비교하는 방식으로 해결할 수 있다. C-A와 B는 ‘ssru’라는 동일한 거북표현이므로

로 두 입체로 결합할 수 있다.

IV. 연구방법

1. 연구대상

본 연구는 ○○지역 내 초등학교 교사 21명(남 6명, 여 15명)을 대상으로 하였으며, 경력은 1년 이상, 15년 이하로 다양하다. 과반수 이상(15명)의 교사가 초등학교 6학년 쌓기나무 단원 수업을 지도한 경험이 있고, 그 중 일부(7명)는 2009 개정 교육과정에 따른 교과서의 연결큐브 차시를 지도한 경험을 갖고 있었다.

2. 검사도구 개발

본 연구는 교사가 연결큐브 수업을 할 때 실제로 겪는 어려움을 파악하기 위해, 교과서 문항을 바탕으로 검사 도구를 개발하였다. 교과서에

나온 문항의 종류는 회전(R), 결합(C) 총 2가지 유형이고, 회전 유형은 연결큐브 4개짜리 모양을 회전하는 유형(R1)과 연결큐브 5개짜리 모양을 회전하는 유형(R2)으로 나뉜다. 검사 도구는 설문지와 검사 2가지로, 설문지는 교사가 각 문항을 해결하고 설명할 때 사용하는 전략을 알아보기 위함이다. 설문을 통해 전략을 판단하는 방식은 공간 인지에 관한 선행 연구(Vandenberg & Kuse, 1978; Shultz, 1991; 이지윤, 2015a)에서도 사용되고 있어 이 방식을 사용하였다. 검사를 통해서 교사의 문항별 해결 능력을 알아보고 사전과 사후의 차이를 통해 거북표현체계의 효과를 검증하였다.

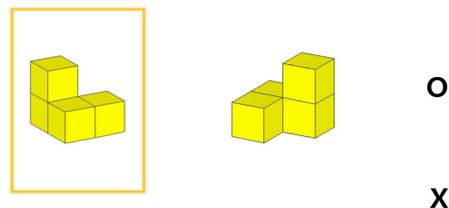
<부록 1>과 같이 설문에는 유형별로 교과서의 문제가 하나 주어지고, 이를 해결하기 위해 어떤 전략을 사용했는지 선다형 또는 서술형으로 작성하게 하였다. 이어서 문제를 해결하는데 어려움을 겪는 학생에게 어떻게 설명할 것인지 묻는 문항이 하나씩 제시된다. 두 모양이 같을 때와 다를 때 설명하는 전략이 차이가 있는지도 알아보기 위해, 연결큐브 4개짜리 모양을 회전하는 R1 유형([그림 II-1])에는 설명하는 문항을 두 가지를 제시하였다. 교사들이 설명하는데 사용하는 전략만을 판단하기 위해 ‘연결큐브 또는 쌓기나무로 직접 보여줄 수 없다.’는 조건을 추가하였다. 설문에서 나타나는 전략의 분석들은 <표 IV-1>와 같이 정하였다.

사전설문지에는 추가적으로 연결큐브 수업의 목적에 대한 교사의 생각과 실제 수업할 때 어떤 어려움이 있는지 서술하게 하였다. 실제 수업

경험이 없는 교사에게는 수업을 하게 된다면 어떤 어려움이 있을지 서술하게 하였다. 사후설문지는 사전설문지와 문항을 동일하게 하되, 거북표현체계를 사용하도록 하였다. 추가적으로 거북표현체계의 유용성을 알아보기 위해, 문항별 문제해결과 의사소통에 도움이 되는지, 또 난이도, 정확도, 속도 면에서 어떠한지 리커트 5점 척도로 고르고 그 이유를 적게 하였다. 또한 전반적으로 거북표현이 유용한지 묻고, 실제 수업할 때 사용한다면 어떻게 서술하도록 하였다.

검사 문항은 회전 문항 8개, 결합 문항 7개로 총 15개로 구성하였다. 입체는 교과서 회전 문항에 나온 모양을 사용하여 회전 방향과 각도를 조절하여 제시하였다. 회전 문항은 같거나 거울대칭인 두 입체를 제시하고 같은 모양인지 다른 모양인지 판단하는 형식으로 그 예시는 [그림 IV-1]과 같다. 결합 문항은 두 입체를 돌리거나 뒤집어 결합하여 오른쪽 모양이 나올 수 있는지 판단하는 것으로 [그림 IV-2]는 그 예시이다.

연결큐브 모양과 같은 모양이면 O, 다른 모양이면 X를 고르시오.

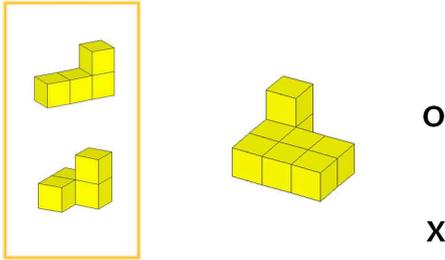


[그림 IV-1] 회전 유형 예시

<표 IV-1> 전략 분류 기준

처리방법	심상 전략	입체의 이미지를 머릿속에 떠올려 회전하는 전략
	분석 전략	입체의 구조나 특징을 도식, 규칙 등으로 파악하여 해결하는 전략
준거기준	대상 변환	입체 대상을 변환
	관점 변환	입체를 보는 관점을 변환

두 연결큐브 모양을 연결하여 아래의 모양이 나오면 O, 나오지 않으면 X를 고르시오.



[그림 IV-2] 결합 유형 예시

3. 연구절차

연구절차는 ‘사전 설문지·검사 → 거북표현 체계 학습 → 사후 설문지·검사’ 순으로 하였다. 설문지에 서술한 답변이 모호하거나 불충분할 경우 면담을 실시하였다. 설문지는 지필로 작성하게 하였고, 검사는 컴퓨터 기반의 LRS (Learner Response system)로 실시하여 답과 반응 시간을 자동으로 측정하게 하였다. 연구참여자는 검사를 시작하기 전에 문항 형식, 문항 수, 문항 제한 시간에 대해 안내받고, 미리 문항 유형별 예제를 풀고 시작하도록 하였다. 문항별 제한 시간은 20초를 주었으며, 시간이 지나면 자동으로 다음 문항으로 넘어가고 무응답으로 처리되게 하였다. 이지운(2015a)의 변별 검사에서 문항 당

20초씩 제한 시간을 둔 것을 따랐으나, 문항을 해결하는 시간이 부족해 무응답 처리된 문항이 많아 능력 측정을 제대로 할 수 없는 경우가 발생하였다. 이 점을 고려하여 문항 당 제한시간을 40초로 늘려 본 검사를 실시하였다. 거북표현 체계의 학습은 s, r, l, u, d 등 기본 명령과 이를 활용해 유형별 문항을 푸는 전략에 대해 소개하고 전략을 적용해 연습 문제를 풀어보게끔 하였다.

V. 결과 분석 및 논의

먼저 연결큐브 문제의 해결을 설명할 때 교사가 사용하는 전략이 무엇인지 파악하기 위해, 문항 유형별로 교사의 전략을 분석하였다. 그 다음 연결큐브 수업에서 교사는 어떠한 어려움을 겪는지 세 가지 측면에서 살펴보았다. 마지막으로 거북표현체계가 연결큐브 수업에 어떻게 도움이 될 수 있는지, 그 효과와 유용성을 알아보았다.

1. 교사의 전략 분석

연결큐브 문제의 해결을 설명할 때 교사가 사용하는 전략이 무엇인지 알아보기 위해, 교사가

<표 V-1> 유형별 교사의 전략 분류

분류기준	전략	회전유형			결합유형
		R1-다름 설명	R1-같음 설명	R2-같음 설명	설명
처리방법	심상	42%(8)	89%(17)	57%(12)	95%(19)
	분석	58%(11)	5%(1)	38%(8)	5%(1)
	혼합	.	5%(1)	5%(1)	.
준거기준	대상	63%(12)	95%(18)	95%(20)	100%(20)
	관점	37%(7)	.	5%(1)	.
	혼합	.	5%(1)	.	.

(%(명), R1-총 19명, R2-21명, 결합-20명³⁾)

3) 문항에 따라 교사가 설명하는 답변이 적절하지 않은 경우를 제외하여, 명수에 차이가 있다.

설문에 서술한 내용을 바탕으로 문항 유형별 전략을 분석하였다. 전략은 선행연구를 바탕으로 정한 분류 틀(<표 IV-1>)을 토대로 판단하였다. 판단의 객관성을 갖추기 위해 본 연구진들이 교차 검토를 하였으며, 모호한 경우 정확한 판단을 위해 면담을 진행하였다. <표 V-1>은 유형별 전략 분류 결과를 나타낸 것이다.

가. 회전 유형

회전 유형은 R1 유형과 R2 유형으로 나뉘며, R1 유형은 두 모양(보기와 ‘나’)이 다름을 설명하는 문항과 두 모양(보기와 ‘다’)이 같음을 설명하는 문항이 있다(<부록1>). R2 유형(그림 II-2)은 두 모양이 같음을 설명하는 문항이 있다. <표 V-1>을 보면, 회전 유형에서는 주로 심상 전략으로 설명하는 비율이 높았지만, 문항에 따라 분석 전략의 비율이 높은 경우도 있었다.

1) 심상 전략

심상 전략은 입체의 이미지를 떠올려 회전하는 방식이다. 두 모양이 서로 같음을 설명할 때 주로 ‘심상 전략’이 나타났으며(89%), 심상 전략을 사용한 경우는 모두 교사의 관점은 고정된 채 대상을 움직이는 ‘대상 변환’을 하였다.

심상 전략으로 두 모양이 같음을 설명한 답변에는 ‘종이를 직접 돌린다(T13)’, ‘보기의 모양을 옆으로 쓰러뜨렸다고 생각해보렴(T17)’과 같은 답변이 있었다. 이 때, T13의 답변은 돌리는 방향에 대해 언급을 하고 있지 않으며, T17은 ‘옆’이라는 단어로 방향을 언급하고 있지만 ‘옆’은 다양하게 해석될 수 있어 오해의 여지가 있다. 반면 T16(그림 V-1)은 ‘가로로 두개 붙은 부분’, ‘아래’, ‘90도’ 등 기준과 방향, 각도 등을 제시하여 두 답변에 비해 더 구체적으로 설명한

것을 볼 수 있다. 그러나 T16 역시 ‘아래’의 기준을 정하지 않아 정확한 이해가 어렵다.

가로로 두개 붙은 부분을 아래로 하여 90° 돌리면 '다' 모양이 나온다.
가로로 두개 붙은 부분을 아래로 하여 90° 돌리면 '다' 모양이 나온다.

[그림 V-1] T16 의 답변

2) 분석 전략

분석 전략은 입체의 구조나 특징을 도식, 규칙 등으로 파악하는 전략이다. 두 모양이 같음을 설명하는 문항에서는 ‘심상 전략’을 사용하는 비율이 높지만, 두 모양이 다름을 설명해야 하는 경우에는 ‘분석 전략’을 사용하는 비율이 더 높았다(<표 V-1>).

분석 전략으로 두 모양이 다름을 설명한 답변에는 ‘두 입체가 거울대칭이므로 다르다(T5)’, ‘입체를 부분으로 분해하여 부분 간의 관계를 비교한다(T2)’, ‘입체를 평면도나 선 등의 도식으로 나타내어 부분 간의 관계를 비교한다.<부록 1> T3의 답변’ 등이 있었다.

<표 V-1>을 보면 알 수 있듯이 주로 관점을 고정된 채 ‘대상 변환’을 하는 전략으로 설명하는 비율이 높다. 하지만 분석 전략을 사용한 교사 중에는 ‘관점 변환’을 하여, T15(그림 V-2)와 같이 부분의 왼쪽, 오른쪽으로 두 모양이 다름을 설명하는 교사도 있었다.

<p>심상 전략 '보기를 옆으로 쓰러뜨렸다고 생각해보렴(T17)'과 같은 답변이 있었다. 이 때, T13의 답변은 돌리는 방향에 대해 언급을 하고 있지 않으며, T17은 '옆'이라는 단어로 방향을 언급하고 있지만 '옆'은 다양하게 해석될 수 있어 오해의 여지가 있다.</p>
<p>‘보기’는 누워있는 쌍기나무의 방향이 세로로 있는 쌍기나무의 오른쪽에 있지만 ‘나’는 누워 있는 쌍기나무의 왼쪽에 있어요.</p>

[그림 V-2] T15 (강조는 연구자가 한 것임)

두 모양이 다름을 ‘분석 전략’으로 설명한 교사들은 대부분 해결할 때는 ‘심상 전략’을 사용하는 해결-설명 전략의 ‘불일치 현상’이 나타났다(<표 V-2>). 그 예시로 <부록 1>의 T3은 해결할 때는 심상 전략을 사용하였지만, 설명할 때는 도식을 사용하는 분석 전략을 사용하는 것을 볼 수 있다.

<표 V-2> 문항별 전략의 일치 여부

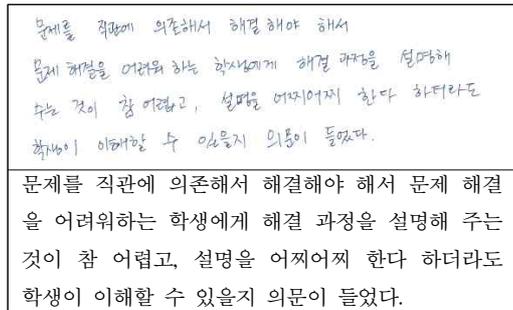
	R1		R2
	다름 설명	같음 설명	같음 설명
일치	47%(9)	95%(18)	76%(16)
불일치	53%(10)	5%(1)	24%(5)

(%(명), R1-총 19명, R2-21명)

이런 현상이 나타나는 이유는 두 가지로 생각 해볼 수 있다. 첫째로, ‘심상 전략’은 ‘분석 전략’에 비해 상대적으로 언어로 표현하기가 어렵다. Michaelides(2002)에 따르면 심상 전략은 말로 표현하기 어려운 동작(gesture)을 동반하며, 전체적인 표상과 직관에 의존하는 반면, 분석 전략은 대상의 특정 부분을 순서대로 관찰하고 논리적으로 비교하며, 특정 형태의 상대적 위치에 주목한다고 하였다. 즉, ‘심상 전략’은 직관에 의존하여 말로 표현하기 어렵지만, ‘분석 전략’은 순서가 있고 논리적이어서 설명하기에 더 유용한 것이다.

둘째로 교사가 학생에게 문제 해결을 지도할 때 ‘심상 전략’은 모든 학생이 사용할 수 있는 전략이 아니라는 암묵적 인식을 하고 있어 ‘분석 전략’으로 설명한다고 할 수 있다. 심상 전략은 입체를 머릿속으로 떠올리고 회전하는 전략이므로 공간시각화 능력이 요구된다. 따라서 교사는 심상 전략은 어느 수준 이상의 공간 감각을 가진 학생만 사용할 수 있다고 생각하여 분석 전략을 지도하려고 하는 것이다. 실제로 수업

을 해본 교사들은 [그림 V-3]과 같이 공간 감각이 부족한 학생에게 설명하기 어려웠음을 말하였다.



[그림 V-3] T16 의 답변

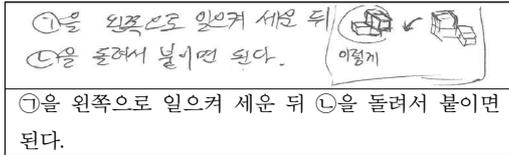
나. 결합 유형

결합 유형은 두 모양을 결합하여 전체 모양이 됨을 설명하도록 되어있다(<부록2>). 결합 유형에서 나타난 전략을 분류한 결과는 <표 V-1>과 같다. 회전 유형에서는 문항 특성에 따라 분석 전략을 사용하는 비율이 더 높은 경우도 있었다. 그러나 결합 유형에서는 ‘심상 전략’을 사용하는 비율(95%)이 매우 높았다. 또한 교사들은 모두 대상을 변환하는 전략을 사용하였고, 관점을 변환하는 전략은 나타나지 않았다.

1) 심상 전략

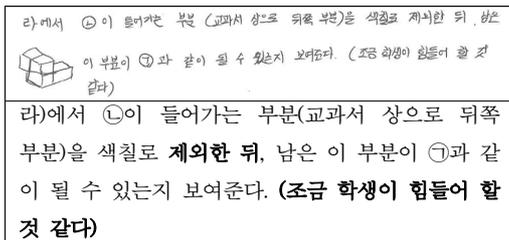
심상 전략으로 결합 유형을 설명한 답변은 ‘한 모양에 다른 하나를 회전해서 결합한 뒤 전체 모양과 비교’하거나 ‘전체에서 한 모양을 제거하고 남은 모양을 회전해서 다른 모양과 비교’하는 것으로 나뉘었다. 두 방식 모두 입체의 이미지를 머릿속으로 떠올려 회전하는 심상 전략이지만, 전자는 ‘결합’을 사용하고, 후자는 거꾸로 ‘분해’를 사용하는 점이 다르다. [그림 V-4]는

‘결합’으로 설명한 교사의 답변이고 [그림 V-5]는 ‘분해’로 설명한 교사의 답변이다.



[그림 V-4] T21의 답변

T21은 한 모양을 ‘왼쪽으로 일으켜 세우는 것’을 표현하기 어려워, 그림을 그려 설명하고 있음을 알 수 있다. 다른 모양은 ‘돌려서 붙이면 된다’라고 말하고 있으나, 어떤 방향으로 돌리고 어디에 붙여야 하는지 언급이 없어 정확한 이해가 어려움을 알 수 있다.



[그림 V-5] T4 (강조는 연구자가 한 것임)

T4는 전체에서 한 모양을 제거한 뒤 남은 모양을 그림으로 그려 다른 모양이 회전되었음을 설명하고 있다. 그러나 ‘조금 학생이 힘들어 할 것 같다’라고 표현하며, 공간 감각이 부족한 학생은 이와 같은 심상 전략을 사용하기 어려울 것이라 예상한 것을 볼 수 있다.

2) 분석 전략

분석 전략으로 결합 유형을 설명한 교사는 T3 단 한 명으로, <부록 2>에서 T3은 전체에서 한 모양을 제거하고 남은 모양을 다른 모양과 비교

할 때, 평면도라는 도식을 사용하였다.

회전 유형에서는 문항에 따라 설명할 때와 해결할 때 전략이 일치하지 않는 현상이 나타났었다. 그러나 결합 유형에서는 해결할 때와 설명할 때 사용하는 전략이 대부분 일치하였다(<표 V-3>)

<표 V-3> 문항별 전략의 일치 여부

	일치	불일치
전략사용	95%(19)	5%(1)

(%(명), 총 20명)

이러한 현상은 해결과 설명을 일치할 수 있는 효율적인 전략을 찾은 것이 아니라, 결합 유형의 특성 상 높아진 난이도로 인해 해결이 쉽지 않았기 때문으로 추정된다. <표 V-4>의 사전 검사에서 회전 유형(약 88%)에 비해 결합 유형은 정답률이 낮다(약 72%). 교사들은 대부분 결합 유형이 어렵다고 대답하였으며, 그 이유로 ‘연결큐브 모양 하나를 회전하는 것도 헛갈리는데, 두 모양을 회전하고 심지어 결합하는 것까지 생각해야 해서, 다양한 경우의 수를 생각해야 해서’와 같이 답변하였다.

또한 회전 유형에서는 교사가 학생의 이해를 돕기 위해 비교적 다양한 방법을 시도했던 반면 결합 유형에서는 ‘심상 전략’과 ‘대상 변환’ 등으로 편향되어 나타났다(<표 V-1>). 이는 결합 유형이 교사에게도 난이도가 높아, 학생이 더 쉽게 이해할 수 있는 전략을 생각하기보다 단순하게 자신의 해결 전략을 설명한 것으로 보인다.

2. 연결큐브 수업에서 교사가 겪는 어려움

공간 감각의 향상이라는 연결큐브 차시 도입의 목적에 대해 교사들의 대부분은 연결큐브가 쌓기나무의 한계를 극복한 교구이고 새로운 공

간 문항을 다루고 있다는 점에서 긍정적으로 바라보았다. 그러나 동시에 우려의 말을 덧붙였는데, 그 이유로 ‘문항이 어려워 공간 감각이 부족한 학생을 지도하기 어렵다’를 주로 들었다. 또 실제 이 차시 지도 경험이 있는 한 교사는 ‘두 차시로 지도하기에 내용이 어려워, 실제 교실에서는 공간 감각 향상 보다는 이미 형성되어 있는 공간 감각을 확인하는 것 같다.’라고 말하였다. 이처럼 교사들은 연결큐브 차시가 공간 감각의 향상이라는 목적에는 적합하다고 생각하지만, 지도의 어려움으로 실제 그 목적이 이루어지기 어렵다고 생각함을 확인할 수 있었다. 이에 교사가 연결큐브 수업에서 구체적으로 어떤 어려움을 겪는지 알아보기 위해 설문과 면담을 통해 답변을 얻고 그 답변을 세 측면에서 분류하였다.

가. 일반적 해결 전략의 부재로 인한 어려움

교사들은 일반적 해결 전략이 제시되어 있지 않아, 문제에 따라 주먹구구식으로 설명하게 되어 교사의 설명 시간이 오래 걸리며 설명의 일관성이 없어진다고 하였다. 이로 인해 T21([그림 V-6])은 학생들이 주어진 문제만 이해하고 넘어갈 뿐 새로운 문제를 풀기 어려워하게 된다고 하였다.

연결큐브를 사용해도 주어진 문제만 이해하고 넘어갈 뿐 새로운 모형 예시를 주면 헤맨다.
연결큐브를 사용해도 주어진 문제만 이해하고 넘어갈 뿐 새로운 모형 예시를 주면 헤맨다.

[그림 V-6] T21의 답변

나. 해결 과정 설명의 어려움

교사들은 구체물 없이 공간대상을 표현하기 어렵고, 문제를 해결할 때 직관에 의존하기 때문

에 학생에게 설명하기가 어렵다고 하였다([그림 V-3]). 또한 학생도 자신의 해결 과정을 설명하기 어렵기 때문에 정확한 해결 전략 지도가 어렵다고 하였다([그림 V-7]). 이와 같이 교사들은 공간 감각이 부족한 학생에게 직관에 의존한 심상 전략을 지도할 때의 어려움을 파악하고 있었다. 이런 어려움을 해소하기 위해 교사들은 연결큐브, 설명에 필요한 기호나 용어, 체계적 전략, 모양을 조작할 수 있는 프로그램 등이 필요하다고 하였다. 그러나 연결큐브와 같은 구체물이 필요하다고 한 교사들은 연결큐브 외에 설명 방법이나 일반적 전략 등이 같이 필요함을 강조하며 연결큐브만으로는 설명이 불가능하다고 하였다.

구체적 조작물 없이 머릿속에서 큐브 모양을 회전하고 결합하는 것은 언어로 표현하는 것이 쉽지 않을 것으로 예상됨. 학생들이 자신의 문제 해결 과정을 설명하는 것도 어려우므로 문제 해결 과정을 설명할 수 있는 방법도 지도가 필요하다고 생각됨.
--

[그림 V-7] T5의 답변

다. 연결큐브 교구에서 기인하는 어려움

대다수의 교사들이 연결큐브 교구에서 기인하는 어려움을 말하였는데, 이는 대부분의 교사가 연결큐브를 직접 보여주는 방법으로 수업을 하려 하기 때문이다. 연결큐브 교구에서 기인하는 어려움은 크게 물리적 어려움과 이론적 어려움 두 가지로 볼 수 있다. 물리적 어려움은 연결큐브 교구의 부족한 환경, 연결큐브로 수업 시 수업 통제의 어려움 등이 있다. 또 연결큐브로 수업할 때 교사와 학생이 바라보는 방향이 달라 각각 설

명과 이해가 어렵다고 대답한 교사들도 있었다. 이는 장혜원(2015)에서 교사와 학생이 쌓기나무를 바라보는 관점 차이로 쌓기나무의 위치와 방향을 설명하고 이해하는데 생겼던 혼란과 같다.

또한 이론적으로 연결큐브는 물리적 구성 자체에 목적을 두고 있어 정신적 구성까지 확장이 어렵다(이지윤, 2010). 즉 외적 도구에만 머물러 외적 도구 없이는 탐구하거나 설명할 수 없게 되는 것이다. 따라서 T6의 답변(그림 V-8)처럼 학생이 연결큐브를 사용하지 못하면 이해를 못하는 현상이 발생한다. 수업할 때 연결큐브를 사용해 문항을 풀었어도 평가할 때 연결큐브를 사용하지 못하므로 같은 문항을 풀지 못할 수 있는 것이다. T1(그림 V-9)은 ‘결합 문항을 풀 때 연결큐브를 조작하다 우연히 결합시켜서 문제를 해결하였다.’라고 하며 교사 자신도 이전에 풀었던 문항을 이후에 풀 수 있을지 확신이 없다고 말하였다. 또한 연결큐브를 사용해 연습하면 공간 감각이 과연 향상이 될지 의문이 생긴다며 연결큐브 외에 전략을 설명할 무언가가 필요하다고 대답한 교사도 있었다. 이런 점 때문에 교사들은 평가 문항을 제작할 때 수업 내용 중 난이도가 쉬운 내용으로 축소하여 다루게 된다고 하였다. 이와 같이 도구에 의존하는 현상은 문제 해결을 설명할 때도 발생하는데, 연결큐브를 사용하지 않으면 교사 또한 문제를 해결한 과정을 설명하기 어렵고 과정을 설명하기보다 답을 알려주게 된다고 하였다.

공간 감각 향상을 위해서 머릿속으로 생각하는 것을 기억할 때 활용이 쉽다. ^{공간 감각} 큐브를 사용할 때는 학생들이 어려워하는 사용되지 또한 때 어려움도 느낄 가능성이 커 보인다.

학생이 머릿속으로 공간 감각을 생각하는 것을 어려워할 때 힘들 것 같다. 또한 구체물을 사용할 때는 학생들이 이해하지만, 사용하지 못할 때 어려움을 느낄 가능성이 커 보인다.

[그림 V-8] T6의 답변

*실제 수업 시 어려움이 있었음

1. 실제 연결큐브를 사용하여 결합문제를 풀 때, 연결큐브를 조작하다 우연히 결합시켜서 문제를 해결함(운이 없으면 문제를 해결하지 못하는 등 수학 문제에 공간 감각 보다는 운이 지나치게 작용하는 경우가 발생함).

2. 실제 연결큐브가 없으면 문제 해결 방법 설명이 어려움

[그림 V-9] T1의 답변

3. 거북표현체계의 효과와 유용성

거북표현체계의 효과를 알아보기 위해 유형별 사전-사후 검사 점수, 반응시간을 분석하였다. 단, 검사는 총 21명 중 문항당 제한 시간을 20초로 하였던 초기 6명을 제외하고, 나머지 15명의 자료만을 분석하였다. 또한 교사가 거북표현체계를 얼마나 유용하게 느끼는지를 파악하기 위해 사후 설문에 유형별 난이도, 정확도, 속도, 문제 해결, 의사소통 측면에서 5점 척도로 평가하고, 수업에 사용했을 때 어떨지에 대해 서술하도록 하였다.

가. 유형별 거북표현체계의 효과와 유용성

1) 회전 유형

<표 V-4>는 유형별 사전-사후 검사의 점수, 정답률, 반응시간이다. 회전 유형의 경우 점수, 정답률, 반응시간 모두 증가했지만, 유의미하지는 않다. 회전 유형의 문항 특성상 연결큐브의 수가 많지 않아 심적 회전을 하는데 큰 어려움이 없으며 단시간에 해결할 수 있으므로 오히려 거북

표현체계를 사용한 사후검사에서 시간이 늘어난 경향이 보인다.

<표 V-4> 유형별 사전 사후 차이

회전	회전 유형		결합 유형	
	사전	사후	사전	사후
평균	7.00	7.07	5.07*	6.00*
표준편차	0.76	1.33	1.58	1.25
정답률(%)	87.50	88.33	72.38*	85.71*
반응시간	12.66	13.60	15.77	17.61

* 유의수준 0.05에서 통계적으로 유의미한 차이가 있음

회전 유형에서 사후 점수가 유의미하게 증가하진 않았지만, <표 V-5>에서 항목별 평균 점수가 전반적으로 높은 것을 통해 교사들 대다수가 거북표현체계가 유용하다고 느끼는 것을 알 수 있었다.

<표 V-5> 회전 유형에서의 유용성 평가

항목	①	②	③	④	⑤	평균
난이도	0	0	1	4	16	4.71
정확도	0	0	0	2	19	4.90
속도	0	1	1	5	14	4.52
문제해결	0	0	0	3	18	4.86
의사소통	0	0	0	2	19	4.90

① 전혀 도움이 되지 않음 ② 거의 도움이 되지 않음 ③ 비슷함 ④ 도움이 됨 ⑤ 매우 도움이 됨

교사들은 ‘거북표현체계를 사용하니 머릿속에서 큐브를 추상적으로 회전하던 것을 정확하게 표현하여 큐브모양이 같은지 아닌지 표현할 수 있다.’와 같은 이유로 유용하게 생각하였다. 하지만 일부 교사들은 ‘직관적인 방법에 비해서는 시간이 좀 더 걸린다.’는 이유로 속도 면에서 낮은 점수를 주기도 하였다.

특히 항목 중에서도 ‘정확도’와 ‘의사소통’ 항목의 점수가 가장 높았다. <표 V-4>에서 회전

유형은 점수와 정답률의 측면에서 유의미한 효과가 보이지 않고, 반응시간은 오히려 사후에 시간이 증가하여 간단한 유형인 경우에는 심상 전략이 더 효율적이라고 볼 수도 있다. 그럼에도 불구하고 거북표현체계가 ‘정확도’ 측면에서 대부분 ‘⑤ 매우 도움이 됨’을 선택했다는 것은 의미하는 바가 크다. 이는 심상 전략을 사용하여 도출한 답에 확신을 갖지 못했다는 것을 의미한다. 만약 제시된 연결큐브가 복잡해지거나 문항의 복잡도가 늘어난다면 심상 전략으로는 더욱 확신을 갖기 어려울 것이라는 예측이 가능하다. 반면 거북표현체계는 해결에 대한 확신을 주어 T1([그림 V-10])의 답변에서처럼 ‘정확도’를 높이는 것이라 할 수 있다.

속도 면에서는 직감적으로 푸는 것이 거북표현체계를 사용할 때보다 빠를 때도 있었음. 그러나 체계적으로 푸는 것, 학생들에게 푸는 방법을 설명하는 것, 나중에 똑같은 문제를 풀어도 풀 수 있다는 확신도는 전에 비해 월등히 좋아짐.

[그림 V-10] T1의 답변

2) 결합 유형

<표 V-4>에서 결합 유형은 정답률이 약 72%에서 약 86%로 증가하였으며, 통계적으로 유의미한 차이를 나타내었다. 사전 검사에서 두 유형 간 정답률과 반응시간을 비교했을 때, 결합 유형이 정답률이 더 낮고 반응시간이 많이 걸리는 것을 통해 결합 유형의 난이도가 높음을 알 수 있다. 따라서 난이도가 높은 유형일수록 ‘거북표현체계’와 같은 체계적 전략이 효과적임을 알 수 있다. 거북표현체계가 수준에 따라 특히 도움이 되는 경우가 있을 것으로 추정되어, 사전 검

사에서 결합 유형 점수에 따라 낮음, 중간, 높음으로 나누어 수준별 사전, 사후 검사를 비교하였다.

<표 V-6> 결합 유형의 수준별 사전 사후 비교

수준		낮음	중간	높음
사전	정답률	45.71*	54.29	60.00
	점수	3.2*	3.8	4.2
사후	정답률	77.14*	82.86	82.86
	점수	5.4*	5.8	5.8

* 유의수준 0.05에서 통계적으로 유의미한 차이가 있음

그 결과, 낮음 집단은 사전 검사 정답률이 45.71%였는데 사후에는 77.14%로 통계적으로 유의미한 증가를 나타내었다(<표 V-6>). 이와 같이 ‘거북표현체계’는 심상 전략에 능숙하지 않은 경우에 더욱 효과적일 수 있음을 보여준다.

<표 V-7> 결합 유형에서의 유용성 평가

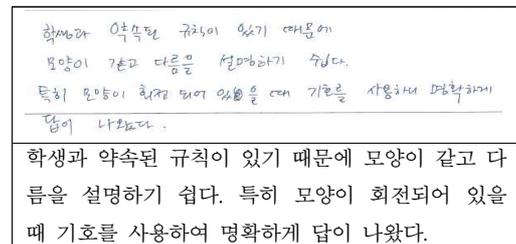
항목	①	②	③	④	⑤	평균
난이도	0	0	1	5	15	4.67
정확도	0	0	0	4	17	4.81
속도	0	1	2	4	14	4.48
문제해결	0	0	0	6	15	4.71
의사소통	0	0	0	3	18	4.86

① 전혀 도움이 되지 않음 ② 거의 도움이 되지 않음 ③ 비슷함 ④ 도움이 됨 ⑤ 매우 도움이 됨

<표 V-7>에서 항목별 평균 점수가 전반적으로 높은 것을 통해 결합 유형에서도 회전 유형처럼 교사들 대부분이 거북표현체계가 유용하다고 느끼고 있음을 알 수 있다. 교사들의 반응은 ‘회전 문항의 경우는 직관적으로 푸는 것이 빨랐지만 결합 문항은 난이도가 있고 헷갈리는 부분도 많아 거북표현을 사용해 푸는 것이 속도, 설명, 해결, 정확도면에서 훨씬 좋았다.’와 같은 긍정적인 내용이 많았다. 하지만 ‘결합 문항의 경우 큐

브 2조각 중 하나는 제외하고 나머지가 맞는지 안 맞는지 확인하는 방식으로 풀었는데, 남은 조각을 바닥면이 개수가 많도록 한 다음 거북표현 체계를 이용하려니 헷갈리는 면이 있었다.’와 같이 거북표현체계에 익숙하지 않아 생기는 부정적 반응도 일부 있었다.

항목 중 가장 높은 것은 ‘의사소통’으로 나타났다. T16의 답변([그림 V-11])처럼 거북표현체계를 이용하여 명확하게 설명할 수 있다는 점에서, ‘의사소통’에 높은 점수를 부여한 것으로 보인다.



[그림 V-11] T16의 답변

나. 연결큐브 수업에서 거북표현체계의 유용성

거북표현체계가 연결큐브 수업에 어떠한 도움이 되는지에 대해 교사의 의견을 들어본 결과, 교사들의 의견은 문제해결 측면, 의사소통 측면, 학습 동기 측면 등 크게 세 분류로 나누어 살펴볼 수 있었다.

1) 문제 해결 측면

문제해결 측면에서 대부분의 교사들이 공통적으로 말한 것은 거북표현체계를 사용해 문제를 해결하면 확신을 갖고 풀 수 있어 정확도가 높아진다는 것이다. T1의 답변([그림 V-10])처럼 우연히 해결하는 것이 아니라, 체계적 전략으로 해결하는 것이기 때문이다. 특히 머릿속으로 공간 대상을 회전하여 비교하는 것이 어려울 때, 거북

표현만으로 비교할 수 있어 도움이 된다고 하였다. 또한 거북표현으로 큐브의 유형(LT, RT)을 ‘기억’할 수 있어서 문제를 해결하는 속도 역시 빨라진다고 하였다. 하지만 일부 교사들은 심상 전략으로 쉽게 해결할 수 있는 문항도 거북표현을 사용하려면 바닥면을 찾아야 해서 시간이 더 오래 걸리기도 한다고 하였다. 바닥면을 찾는 과정을 어려워하는 학생도 있을 거라 우려하기도 하였다. 그러나 이렇게 답한 교사도 복잡도가 높은 문항은 거북표현을 사용하는 것이 더 쉽고 빠르다고 답하였다. 사전 설문 시 일반적 전략의 필요성을 얘기했던 교사들은 거북표현체계가 일반적 전략으로 사용될 수 있다는 점에서 긍정적으로 보았다. 이는 <부록 1>의 T3의 사전 사후 답변을 비교한 것으로 알 수 있다. T3은 사전에 문항에 따라 설명하는 방법이 일관되지 않는 모습을 보이고 있으나, 사후에는 거북표현체계라는 일반적 전략을 적용하여 일관되게 설명하고 있다. 한 교사는 거북표현체계로 새로운 문제도 학생 스스로 분석할 수 있게 되어 문제 해결 뿐 아니라 더 나아가 ‘공간 감각’향상에 도움이 될 것이라고 예상하기도 하였다.

실제 연결큐브를 사용해 문제를 해결할 때 우연히 돌리고, 결합해 문제를 해결하는 경우가 있어서, 다음번에 같은 문제로 풀더라도 해결이 가능하기에 대한 확신이 없었음. 거북표현체계를 사용하면 우연적 요소에 의한 문제 해결이 아닌 논리적인 체계성을 가지고 해결하는 것이기 때문에 정확성 면에서 좋았음.

[그림 V-11] T1의 답변

2) 의사소통 측면

의사소통 측면에서는 설문을 했던 모든 교사가 거북표현체계를 사용했을 때 의사소통에 유용하다고 대답하였다. 그 이유로 T4의 답변([그림 V-12])처럼 이전에 복잡하고 애매모호하게 설명하던 입체를 거북표현을 사용하면 간단하고 구체적으로 명명할 수 있어 교사의 설명이 명확해진다고 하였다.

그림으로 설명하면 복잡해지수록 그림으로 그리기 어렵고 전달할 때도 오류가 발생할 때가 많다. 거북표현체계는 문자도 정확하면서 간단하게 표현할 수 있어 시간도 줄어들고 오류도 줄어든다. 가장 좋은 점은 실물이 없어도 설명이 가능하다는 것이다.

[그림 V-12] T4의 답변

예를 들어 입체 도형을 표현 할 때 ‘기과 같이 생긴 도형’처럼 애매한 표현이 아니라 ‘ssru’나 ‘sslu’와 같이 명확한 표현이 가능하다. <부록 1>, <부록 2>에서 교사의 사후 답변이 사전에 비해 훨씬 간단해진 것에서도 이를 확인할 수 있다. 연결큐브 수업에서 지도가 어려운 이유로 설명할 용어나 방법이 없어서 어렵다고 생각하는 교사가 많았다는 점을 볼 때, 이 점은 교사에게 매우 큰 장점으로 다가올 수 있다. 특히 거북표현체계를 사용하면 교사가 문제를 해결할 때와 설명할 때 사용하는 전략의 불일치 현상이 전혀 나타나지 않는 것은 주목할 만하다. 거북표현체계는 ‘기호적 표현’이므로 이를 통한 해결과 설명이 모두 가능하여 불일치 현상이 나타나지 않게 되는 것이다. 따라서 교사는 자신이 풀었던 방법으로 설명할 수 있어 설명하는 시간이나 수

고가 적게 들게 된다. 또한 거부표현이라는 공통된 표현체계로 학생 스스로도 문제 해결 과정을 설명할 수 있어 교사와 학생 뿐 아니라 학생 간의 의사소통도 수월하게 할 것이라 많은 교사들이 예상하였다. 이와 같이 거부표현은 의사소통에 유용하지만 이를 숙지하지 못하는 학생은 혼란을 겪을 것이라 우려하는 교사도 있었다.

많은 교사들이 거부표현체계의 가장 좋은 점으로 ‘연결큐브 없이도 해결과 설명이 가능하다는 점’을 말하였다. 즉, 연결큐브에서 기인하는 어려움을 제거할 수 있다. 거부표현체계는 ‘바닥면’개념과 ‘코딩’을 이용해 설명하고 있지만 그 자체는 컴퓨터 조작에 의존하지 않으므로 어떤 문제 해결 상황에서도 사용할 수 있는 ‘내적 도구’이기 때문이다.

또한 장혜원(2015)에서도 확인되었던 연결큐브를 바라보는 교사와 학생의 관점이 달라 설명과 이해가 어려운 문제도 방지할 수 있다. 교사와 학생이 거부표현으로 각자 머릿속으로 공간 대상을 떠올리기 때문에, 의사소통 과정에서 관점 변화로 인한 혼동을 없앨 수 있다.

3) 정의적 측면

정의적 측면에서는 대부분 교사와 학생 모두 거부표현체계를 활용한다면 자신감이 생길 것이라 하였다. 많은 교사들이 연결큐브 수업을 어떻게 해야 할지 막막하고 자신이 없었는데 거부표현체계를 배우고 나니 자신감이 생겼다고 대답한 것에서 이를 확인할 수 있었다. 한 교사는 ‘외적 도구에 의존하지 않을 수 있어서 학생의 내적 동기를 유발시키기에 유용하다.’고 하였다. 특히 T7([그림 V-13])은 거부표현체계는 표현이 명료하고 새로워 공간 감각이 부족한 학생이 이해하기 쉬울 뿐 아니라 선행학습을 한 학생의 흥미를 유발시키기에 좋다고 하였다.

<p>1. 선행학습을 한 학생들은 수업에 흥미가 없는 경우가 많음. 거부표현은 이런 학생들도 흥미를 느낄 수 있다.</p> <p>2. 공간 감각이 부족한 학생들에게도 비교적 빠르고 정확하게 수업 가능</p>
<p>1. 선행학습을 한 학생들은 수업에 흥미가 없는 경우가 많음. 거부표현은 이런 학생들도 흥미를 느낄 수 있다.</p> <p>2. 공간 감각이 부족한 학생들에게도 비교적 빠르고 정확하게 수업 가능.</p>

[그림 V-13] T7의 답변

이처럼 설문을 했던 교사 모두가 긍정적으로 답하였으나, 그 중 일부(약 19%)는 공간 감각이 부족한 학생들에게 바닥면과 거북의 시작점을 찾는 것이 어렵게 느껴져 흥미를 잃을 수도 있을 것이라 우려하였다.

VI. 결론 및 제언

본 연구에서 교사가 연결큐브 문제를 설명할 때 사용하는 전략을 알아보고 교사가 겪는 어려움을 알아본 결과 다음과 같은 결론을 내릴 수 있었다.

첫째, 교사들은 주로 대상을 회전시키는 ‘심상 전략’, ‘대상 변환’을 사용하여 문항을 설명하려는 경향이 높게 나타났다. 그러나 이와 같은 전략으로 설명할 때, 회전 방향이나 관점 등을 언급하지 않는 등 정확한 설명이 어렵다는 문제점이 있었다. 반면 일부 교사들은 학생들의 공간 능력 개인차에 따라 심상 전략을 쉽게 이해하지 못할 거라고 생각하여 구조나 특징을 설명하는 분석 전략을 시도하기도 하였다.

둘째, 교사들 중 일부는 문제를 해결할 때는 ‘심상 전략’을 사용하였지만, 설명할 때 ‘분석 전략’을 사용하여 불일치 현상이 나타나기도 하였다. 이 현상은 회전 문항에서 모양이 다름을 설명하는 경우에 현저하게 나타났다. 이와 같은 현

상이 나타나는 원인은 심상 전략은 직관에 의존하여 말로 표현하기 어렵지만, 분석 전략은 순서가 있고 논리적이어서 설명하기에 더 유용하기 때문으로 추정된다. 또는 교사가 심상 전략은 공간 감각이 부족한 학생에게 지도하기에 적합하지 않다는 인식을 하고 있어 분석 전략을 지도하려고 하는 것으로 볼 수도 있다. 하지만 결합 유형은 이와 같은 현상이 잘 나타나지 않았는데, 이는 난이도가 높은 결합 문항의 특성 상 교사가 설명하기에 적절한 전략을 생각하기보다는 단순하게 자신의 해결 전략을 서술하였기 때문으로 판단된다.

셋째, 연결큐브 수업에서 교사가 겪는 어려움은 일반적 해결 전략의 부재로 인한 어려움, 해결 과정 설명의 어려움, 연결큐브 교구에서 기인하는 어려움 등이 있었다. 연결큐브 교구에서 기인하는 어려움은 물리적 어려움과 이론적 어려움으로 나뉘는데, 물리적 어려움은 연결큐브 교구의 부족한 환경, 연결큐브로 수업 시 수업 통제의 어려움, 교사와 학생의 관점 차이로 인한 혼동 등이 있었다. 이론적 어려움은 문제 해결과 설명 시 도구에 의존하게 되는 점과 그로 인해 평가시에 의도적으로 쉬운 문제만 출제하는 현상 등이 있었다. 또한 교사들은 공간 감각이 부족한 학생에게 구체물 없이 공간 대상을 표현하기 어렵고, 문제를 해결할 때 직관에 의존하여 해결하여 이를 설명하기 어렵다고 하였다. 일반적 해결 전략이 제시되지 않아 문제에 따라 일일이 설명해서 번거롭고 학생도 새로운 문항을 해결하기 어렵다고도 하였다.

이처럼 교사들이 연결큐브 수업에서 겪는 어려움을 확인하였고, 그에 대한 대안으로 거북표현체계를 제시하고 이를 교사들에게 적용한 결과 다음과 같은 결론을 이끌어 낼 수 있었다.

첫째, 사후검사에서 난이도가 높은 결합 유형에서 유의미하게 정답률이 높은 것을 통해 난이

도가 높을수록 거북표현체계의 전략이 효과적임을 알 수 있다. 거북표현체계는 부분적, 분석적, 자기변환적 전략으로서, 보다 높은 성취를 이끄는 체계적 전략이기 때문이다(이지운, 2015b).

둘째, 거북표현체계는 심상 전략을 사용하기 어려운 상황에 사용할 수 있는 대안 전략임을 알 수 있었다. 결합 유형에서 사전 정답률이 낮았던 교사 집단이 사후 정답률이 가장 크게 높아졌던 것에서 이를 확인할 수 있었으며, 이는 이지운 외(2013)에서도 이미 확인된 바 있다. 이처럼 본 연구는 교사에게 공간 감각이 부족한 학생을 지도할 때 사용할 수 있는 대안 전략을 제시하였다는 점에서 의의가 있다.

셋째, 거북표현체계는 연결큐브 수업에서 교수 학습이 가능한 전략으로 사용될 수 있다. 교사들이 회전 유형에서 거북표현체계의 효과가 유의미하지 않았는데도, 문제 해결 측면에서 거북표현체계의 유용성을 높이 평가한 이유도 바로 이 점 때문으로 볼 수 있다.

넷째, 거북표현체계는 해결 전략이자 ‘기호적 표현’이기 때문에, 교사의 설명이 명확해짐을 확인하였다. 이전에 애매모호하게 설명하던 입체를 거북표현으로 간단하고 구체적으로 명명할 수 있기 때문이다. 또한 거북표현체계는 분석적 전략으로서 설명에 유용하며, 문제를 해결할 때와 설명할 때 이를 동일하게 사용할 수 있어 교사가 설명하는 시간과 수고가 줄게 된다. 따라서 연결큐브 수업에서 거북표현체계를 통해 의사소통이 원활해짐을 예상해볼 수 있다.

다섯째, 거북표현체계는 외적 도구에 의존하지 않는 ‘내적 도구’이므로, 연결큐브 수업에서 교사가 겪는 어려움을 줄여줄 수 있다. 이를 통해 평가 상황에서 구체물 없이 문제를 해결해야 하는 어려움, 교사와 학생의 관점 차이로 인한 혼동 등을 방지할 수 있기 때문이다.

여섯째, 그러나 거북표현체계는 기존에 배우지

않았던 기호를 학습하는 것이므로, 이를 활용한 코딩전략에 익숙해지는데 시간과 노력이 소요된다는 한계가 있다. 본 연구에서 제시한 입체 외에 좀 더 복잡한 입체를 표현하려면 다른 기호를 추가적으로 학습하여 부담이 늘어날 수 있다. 또한 바닥면을 찾고 기호로 표현할 때 바닥면을 찾는 단계가 번거롭거나 어렵게 느껴질 수도 있다. 하지만 거북표현체계를 활용한 코딩 전략은 최근 강조되는 컴퓨팅적 사고 기반의 코딩교육(Coding education)과 3D 프린팅(<표 III-2>) 그리고 자유학기제 융합교육과도 연계되어 활용될 수 있으므로, 연결큐브 수업의 도구를 넘어서는 가치가 있다고 볼 수 있다.

이상으로 본 연구를 통해 연결큐브 수업에서 거북표현체계의 효과와 유용성을 살펴보았다. 아울러 본 연구의 한계점을 지적하며 다음과 같이 후속 연구를 위한 제언을 남긴다.

첫째, 교실 수업 속에서 교사와 학생의 어려움을 확인하고 거북표현체계를 적용해 볼 필요가 있다. 본 연구는 실제 수업에 거북표현체계를 적용하기 전에 수업의 어려움과 지도 가능성을 알아보고자 한 것으로, 교사만을 대상으로 연구가 이루어졌다. 따라서 교실 수업에서 거북표현체계를 적용하고 그 결과를 확인하는 것이 필요하다.

둘째, 초등학생을 대상으로 거북표현체계의 효과를 확인해볼 필요가 있다. 본 연구는 적은 수의 교사를 대상으로 실시한 연구이므로, 많은 수의 초등학생을 대상으로 거북표현체계를 적용한 수업을 실시한 후 그 효과를 확인해볼 필요가 있다. 이 때 거북표현체계를 학습하는 시간을 충분히 확보하고, 학습자 개인의 인지양식에 따라 거북표현체계의 효과가 어떤지 확인하는 것도 중요하다.

셋째, 다양한 문항으로 거북표현체계의 효과를 알아볼 필요가 있다. Cho et al.(2016)은 분해 유형에서 거북표현체계의 효과를 확인한 결과, 정

답률이 유의미하게 높아진 것을 확인하였다. 이처럼 다양한 문항으로 거북표현체계의 효과를 확인하고 그 원인을 알아보는 것은 수학 교육적으로 의미 있는 일이다.

넷째, 쌓기나무 단원에 관한 교사의 PCK에 관한 연구가 이루어져야 한다. 이화진 외(2005)는 학생들이 이해하기 어려워하는 내용, 교사가 지도하기 어려워하는 내용을 우선적으로 선정하여 PCK를 알아보는 것이 필요하다고 하였다. 쌓기나무 단원은 이해하기 어려워하는 학생과 지도하기 어려워하는 교사가 분명히 존재함에도 교사의 PCK에 관해 많은 연구가 이루어지지 않았다. 따라서 후속 연구를 통해 이를 확인하고 이를 지도하는 교사에게 실제적 도움을 주는 것은 매우 의의가 있는 일이라 할 수 있다.

참고문헌

- 교육부(1998). **초등학교 교육과정 해설(IV)**. 서울: 대한교과서주식회사.
- 교육부(2003). **수학 6-가**. 서울: 대한교과서주식회사.
- 교육부(2003). **수학익힘책 6-가**. 서울: 대한교과서주식회사.
- 교육부(2015). **수학 6-2 교사용 지도서**. 서울: 천재교육.
- 교육부(2015). **수학 6-2**. 서울: 천재교육.
- 교육부(2015). **수학익힘책 6-2**. 서울: 천재교육.
- 김수은(2004). **쌓기나무 단원의 수업 실행 연구 - 6단계를 중심으로 -**. 청주교육대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 이지운(2015a). 공간 과제에서 인지 전략의 유형과 역할 - 시각적 변별과 기억 능력을 중심으로. **수학교육학연구**, 25(4), 571-598.
- 이지운(2015b). **3D 입체 변별 과제에서 공간 인지 전략의 유형과 역할 - 체화된 3D 거북 표**

- 현식과 전략을 중심으로 -. 서울대학교 대학원 박사학위논문.
- 이지윤, 조한혁, 송민호(2013). 공간 시각화 과제에 체화된 거북 스킵 적용에 관한 연구. *수학교육*, 52(2), 191-201.
- 이화진 외(2005). **KICE 교수학습개발센터 콘텐츠 개발·운영-내용 교수법(PCK) 및 온라인 수업 장학 지원 프로그램 개발을 중심으로. 연구보고 RRI 2005-1.** 서울:한국교육과정평가원.
- 장유라(2010). **초등학교 수학수업에 있어서 수학적 의사소통에 관한 연구.** 부산대학교대학원 석사학위논문.
- 장혜원(2015). 2학년 쌓기나무 수업에서의 수학적 의사소통 분석. *학교수학*, 17(2), 223-239.
- 장혜원, 강종표(2007). 쌓기나무 지도를 위한 부분 제거법의 적용. *수학교육학연구*, 19(3), 425-441.
- 조한혁, 송민호(2014). 실행식(Executable expression) 기반 SMART 스토리텔링 수학교육. *수학교육학연구*, 24(2), 269-283.
- Ben-Chaim, D., Lappan, G., & Houang, R. T. (1989). Adolescents' ability to communicate spatial information: Analyzing and effecting students' performance. *Educational Studies in Mathematics*, 20(2), 121-146.
- Bruner, J. (1967). *Toward a theory of instruction.* Cambridge, MA: The Belknap Press of Harvard University Press.
- Bruner, J. (1973). *Beyond the information given.* New York: W.W. Norton & Company Inc.
- Cho, H. H., Lee, J. Y., & Song, M. H. (2012). Construction and design activities through Logo-based 3D microworld. *Proceedings of the 2nd International Constructionism Conference 2012 held at Athens, Greece; August 21-25, 2012*(pp.565-569). Athens, Greece.
- Cho, H. H., Lee, J. Y., Shin, D. J., & Woo, A. S. (2011). MCY-Mentoring Activities by Creating and Communicating Mathematical Objects. *Journal of the Korean Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematics Education*, 15(2), 141-158.
- Cho, H. H., Cho, H. I., Lee, C. H., Lee, E. J. & Jeong, H. R. (2016). 3D turtle coding activities for Korean Primary education. *Proceedings of the 4th International Constructionism Conference 2016 held at Bangkok, Thailand; February 1-5, 2016*(pp.22-29).
- Clements, D. (1999). Concrete manipulatives, concrete ideas. *Contemporary Issues in Early Childhood*, 1(1), 45-60.
- Ernest, P. (2010). Mathematics and Metaphor. *An International Journal of Complexity and Education*, 7(1), 98-104.
- Gorgorió, N. (1998). Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problems. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 207-231.
- Hegarty, M., Stieff, M. & Dixon, B. L. (2013). Cognitive change in mental models with experience in the domain of organic chemistry. *Journal of Cognitive Psychology*, 25(2), 220-228.
- Hershkowitz, R., Ben-Chaim, D., Hoyles, C., Lappan, G., Mitchelmore, M., & Vinner, S. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.). *Mathematics and cognition: a research synthesis by the international group for the psychology of mathematics education.* 70-95. Cambridge University Press.
- Hoyles, C., & Noss, R. (2003). "What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education?" In A. J. Bishop, M.

- A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.). *Second International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 323-349
- Kamii, C., Kirkland, L., & Lewis, B. (2001). Representation and abstraction in young children's numerical reasoning. In A. Cuoco (Ed.). *The Roles of Representation in School Mathematics* (pp. 24 - 34). Reston, VA: NCTM.
- Lajoie, S. P. (2003). Individual differences in spatial ability_Developing technologies to increase strategy awareness and skills. *Educational Psychologist*, 38(2), 115-125.
- Michaelides, M. P. (2002). *Students' Solution Strategies in Spatial Rotation Tasks*. Paper is the result of a Master's Thesis, University of Cambridge.
- Moyer, P. S. (2001). Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 47(2), 175-197.
- Noss, R. (2001). For a Learnable Mathematics in the Digital Culture. *Educational Studies in Mathematics* 48, 21-46.
- Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas*. Cambridge, Massachusetts: Perseus Publishing.
- Sack, J. J. (2013). Development of a top-view numeric coding teaching-learning trajectory within an elementary grades 3-D visualization design research project. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(2), 183-196.
- Schultz, K. (1991). The contribution of solution strategy to spatial performance. *Canadian Journal of Psychology*, 45, 474-491.
- Shepard, R. N. & Metzler, J. (1971). Mental Rotation of Three-Dimensional Objects. *Science*, 171(3972), 701-703.
- Stieff, M., Ryu, M., Dixon, B., & Hegarty, M. (2012). The role of spatial ability and strategy preference during spatial problem solving in organic chemistry. *Journal of Chemical Education*, 89, 854-859.
- Stieff, M. (2007). Mental rotation and diagrammatic reasoning in science. *Learning and Instruction*, 17, 219-234.
- Vandenberg, S. G., & Kuse, A. R. (1978). Mental rotations, a group test of three dimensional spatial visualization. *Perceptual and Motor Skills*, 47, 599-604.
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind and society: The development of higher psychological processes*. Cambridge: Harvard University Press.
- Wraga, M., Shephard, J. M., Church, J. A., Inati, S. & Kosslyn, S. M. (2005). Imagined rotations of self versus objects: an fMRI study. *Neuropsychologia*, 43, 1351-1361.
- Zacks, J. M., Vettel, J. M., & Michelon, P. (2003). Imagined viewer and object rotations dissociated with event-related FMRI. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 15(7), 1002-1018.

Educational Application of Turtle Representation System for Linking Cube Mathematics Class

Jeong, Hye Rim (Graduate School, Seoul National University)

Lee, Seung Joo (Graduate School, Seoul National University)

Cho, Han Hyuk (Seoul National University)

The 2009 revised national mathematics curriculum have inserted mathematical 'linking cube' activities in the 6th grade math classes to improve students' spatial problem solving abilities and communication skills. However, we found that it was hard for teachers to teach problem solving and communication skills due to the absence of mathematical way of representing linking cubes in the classroom. In this paper, we propose 3D 'turtle representation system' as teaching and learning tools for linking

cube activities. After using turtle representation system for linking cube activities, teachers responded that turtle representation system is a valuable problem solving and communication tools for the linking cube mathematics classes. We conclude that turtle representation system is a well designed teaching and learning tools for linking cube activities, and there are lots of educational meanings in the 3D turtle representation system.

* Key Words : linking cubes(연결큐브), spatial ability(공간 능력), problem solving(문제해결), communication(의사소통), turtle representation system(거북표현체계)

논문접수 : 2016. 5. 10

논문수정 : 2016. 6. 10

심사완료 : 2016. 6. 13

<부록 2> 결합 문항(C)에 관한 T3의 사전 사후 답변 비교

다음 연결큐브 모양을 이용하여 만들 수 있는 새로운 모양을 모두 찾아보시오.

문항



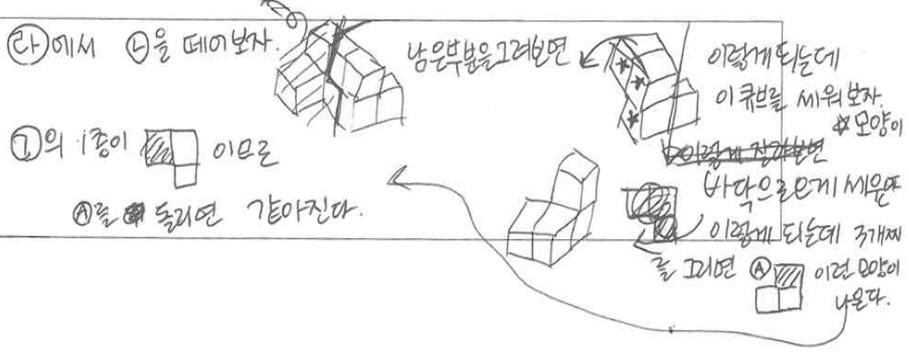
가  나  다 

라  마  바 

4) 다음은 위 문항을 준 학생의 반응입니다. 각 학생에게 어떻게 설명하실지 적어주세요.
(단, '연결큐브 또는 쌓기나무로 직접 보여줄 수 없다'는 가정 하에 설명해주세요)

학생: '라 모양'은 어떻게 결합해도 나올 수가 없는 모양이에요.

사전
답변



㉠에서 ㉡을 떼어보자.
남은 부분을 고려하면
이렇게 되는데 이 큐브를 세워보자. 모양이 이렇게 정가변
바닥으로만 세워보면 이렇게 되는데 3개씩
를 더하면 ㉠ 이런 모양이 나온다.

㉡의 모양이 이모든
㉠로 돌리면 가 돌아진다.

사후
답변

㉡을 제거하면 보면 ssu 같다.