

SOS 제어기법을 이용한 입력제한이 있는 2관절 로봇팔의 조정제어

Regulation Control of Two-Link Robot Arm with the Input Constraint using Sum of Squares Method

정진강* · 좌동경†
 (Jin-Gang Jeong · Dongkyoung Chwa)

Abstract - This paper proposes the controller design for regulation control of two-link robot arm using sum of squares (SOS) control method that takes into account the input constraint. The existing studies of two link robotic arm system used a linear model of all the non-linearity of the system is linearized. For a linear controller, since the model of the system is simplified, it is possible to design a controller in consideration of constraints on the disturbance. However, there is a limit to the performance using a linearized model for a system with a complex nonlinear properties. To compensate for this in the case of using a fuzzy LMI method, it is necessary to have a large number of linear models and thus there is a disadvantage that the system becomes complicated. To solve these problems, we represents a two-link robot arm system with a polynomial model using a Taylor series expansion and design the controller considering the case where the magnitude of the control input is limited using SOS method. We demonstrate by simulations the feasibility of the proposed algorithm.

Key Words : Sum of squares, Two-link robot arm, Input constraint

1. 서론

선형제어기의 경우 시스템 모델이 간단해지기 때문에 외란에 강인하고 제한조건을 고려한 제어를 설계할 수 있다. 하지만 동작점 부근에서만 선형화된 모델을 사용하기 때문에 성능에 한계가 있으며 복잡한 비선형성을 포함한 시스템의 경우 모델링 오차가 발생하게 된다. 이를 보완하기 위해 fuzzy LMI기법을 사용한 경우에는 다수의 선형모델이 필요하기 때문에 시스템이 복잡해지는 단점이 있다.

이러한 문제를 해결하기 위하여 본 논문에서는 2관절 로봇팔 시스템을 테일러 급수 전개를 통해 하나의 다항모델로 나타낸다. 또한 Sum of Squares(SOS) 제어기법을 이용하여 제어입력의 크기가 제한되었을 경우를 고려한 제어를 설계한다. 제안된 제어기법은 시스템의 비선형성을 근사화하여 표현할 수 있고 입력제한을 고려한 제어기 설계가 가능하다. 제안된 제어기법의 타당성은 모의실험을 통하여 입증한다.

2. 2관절 로봇팔의 모델링

2.1 2관절 로봇팔의 동역학

본 절에서는 2관절 로봇팔의 조정제어 문제를 다루기에 앞서 2관절 로봇팔의 동역학[3]에 대해 살펴본다. 제안된 SOS 제어

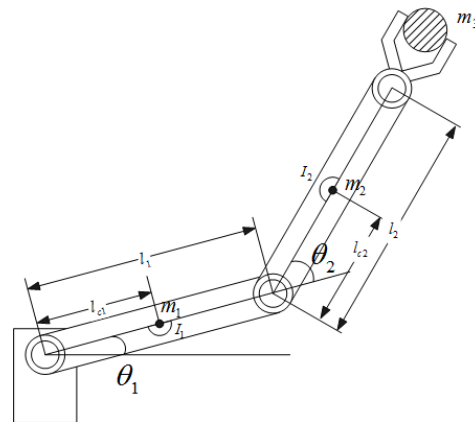


그림 1 2관절 로봇팔 (θ_1 은 1번째 관절의 각도, θ_2 는 2번째 관절의 각도)

Fig. 1 Two-link Manipulator System (θ_1 is degree of the first link, θ_2 is degree of the second link)

† Corresponding Author : Dept. of Electrical and Computer Engineering, Ajou University, Korea
 E-mail : dkchwa@ajou.ac.kr

* Dept. of Electrical and Computer Engineering, Ajou University, Korea

Received : December 14, 2015; Accepted : June 22, 2016

기법을 적용하기 위해 기존의 2관절 로봇팔 시스템을 테일러 급수 전개를 통해 다항 모델로 나타낸다.

그림 1은 2관절 로봇팔의 기구학적 모델을 표현한 것이다. 여기서 θ_1 은 첫 번째 관절의 각도, θ_2 는 두 번째 관절의 각도, m_1 은 첫 번째 관절의 무게, m_2 는 두 번째 관절의 무게, m_3 는 부하의 무게, I_1 은 첫 번째 관절의 무게중심에서의 관성, I_2 는 두 번째 관절의 무게중심에서의 관성, l_1 은 첫 번째 관절의 길이, l_2 는 두 번째 관절의 길이, l_{c1} 은 첫 번째 관절의 관절과 무게중심 사이의 거리, l_{c2} 는 두 번째 관절의 관절과 무게중심 사이의 거리이다. 그림 1과 같은 2관절 로봇팔 시스템은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{H_{22}(x)hx_4(t)(2x_2(t) + x_4(t)) + H_{12}(x)hx_2^2(t)}{H_{11}(x)H_{22}(x) - H_{12}(x)H_{21}(x)} \\ &\quad + \frac{-H_{22}(x)g_1 + H_{12}g_2 + H_{22}(x)u_1(t) - H_{12}(x)u_2(t)}{H_{11}(x)H_{22}(x) - H_{12}(x)H_{21}(x)} \\ \dot{x}_3(t) &= x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) &= \frac{-H_{21}(x)hx_4(t)(2x_2(t) + x_4(t)) - H_{11}(x)hx_2^2(t)}{H_{11}(x)H_{22}(x) - H_{12}(x)H_{21}(x)} \\ &\quad + \frac{H_{21}(x)g_1 - H_{11}g_2 - H_{12}(x)u_1(t) + H_{11}(x)u_2(t)}{H_{11}(x)H_{22}(x) - H_{12}(x)H_{21}(x)} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서

$$\begin{aligned} H_{11} &= I_1 + I_2 + m_1l_{c1}^2 + m_2(l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1l_{c2}\cos(x_3(t))) \\ &\quad + m_3(l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2\cos(x_3(t))), \\ H_{12} &= I_2 + m_2(l_{c2}^2 + l_1l_{c2}\cos(x_3(t))) \\ &\quad + m_3(l_2^2 + l_1l_2\cos(x_3(t))), \\ H_{21} &= H_{12}, \\ H_{22} &= I_2 + m_2l_{c2}^2 + m_3l_2^2, \\ h &= m_2l_1l_{c2}\sin(x_3(t)), \\ g_1 &= m_1l_{c1}g\cos(x_1(t)) + m_2g(l_{c2}\cos(x_1(t) + x_3(t)) \\ &\quad + l_1\cos(x_1(t))), \\ g_2 &= m_2l_{c2}g\cos(x_1(t) + x_3(t)) \end{aligned} \quad (2)$$

이다.

표 1 비선형항의 테일러 급수 전개

Table 1 Taylor series expansion of nonlinear term

비선형항	다항식 근사화
$\cos\theta$	$1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{40320}x^8$
$\sin\theta$	$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9$

2.2 2관절 로봇팔의 다항 모델링

식 (1)의 시스템에 SOS 제어 기법을 적용하기 위해 테일러 급수 전개를 통하여 비선형 항을 다항식으로 변형한다. 표 1은 본 논문에서 사용한 테일러 급수 전개를 통한 다항식 근사화이다.

아래의 그림에서 알 수 있듯이 차수가 높을수록 비선형에 가까운 다항식이 되지만 너무 높은 차수를 사용하면 시스템이 복잡해지기 때문에 본 논문에서는 식 (1)의 시스템의 비선형항들을 9차항까지 나타낸 표 1의 다항식을 사용하였다.

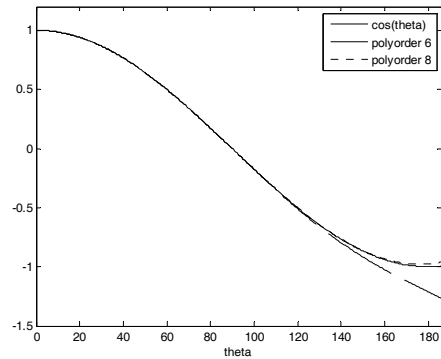


그림 2 $\cos(\theta)$ 의 다항식 그래프

Fig. 2 The polynomial expression of $\cos(\theta)$

표 1과 같이 비선형 항을 다항식으로 변형하면 식 (1)의 시스템은 아래와 같은 다항모델로 나타낼 수 있다.

여기서 $\dot{x}(t) = A(x(t)) + B(x(t))u_o(t) + E$ (3)

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & poly1 & 0 & poly2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & poly3 & 0 & poly4 \end{bmatrix},$$

$$B(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f_1(x) & -f_2(x) \\ 0 & 0 \\ -f_2(x) & f_3(x) \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 \\ -f_1(x(t))g_1 + f_2(x(t))g_2 \\ 0 \\ f_2(x(t))g_1 - f_3(x(t))g_2 \end{bmatrix},$$

$$poly1 = f_2(x(t))h(x(t))x_2(t),$$

$$poly2 = f_1(x(t))h(x(t))x_4(t),$$

$$poly3 = -f_3(x(t))h(x(t))x_2(t),$$

$$poly4 = -f_2(x(t))h(x(t))x_4(t),$$

$$f_1(x) = \frac{M_{22}}{M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21}},$$

$$f_2(x) = \frac{M_{12}}{M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21}},$$

$$f_3(x) = \frac{M_{11}}{M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21}},$$

$$M_{11} = I_1 + I_2 + m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \text{taylor}(\cos(x_3(t)))) + m_3 (l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \text{taylor}(\cos(x_3(t)))),$$

$$M_{12} = I_2 + m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \text{taylor}(\cos(x_3(t)))) + m_3 (l_2^2 + l_1 l_2 \text{taylor}(\cos(x_3(t)))),$$

$$M_{21} = M_{12},$$

$$M_{22} = I_2 + m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2,$$

$$h = m_2 l_1 l_{c2} \text{taylor}(\sin(x_3(t))),$$

$$g_1 = m_1 l_{c1} g \text{taylor}(\cos(x_1(t))) + m_2 g (l_{c2} \text{taylor}(\cos(x_1(t) + x_3(t)))) + m_2 g l_1 \text{taylor}(\cos(x_1(t))),$$

$$g_2 = m_2 l_{c2} g \text{taylor}(\cos(x_1(t) + x_3(t))) \quad (4)$$

이고, $\text{taylor}(\alpha(x))$ 는 $\alpha(x)$ 를 테일러 급수 전개한 다항식이다. 제어입력 $u_o(t) = [u_1(t), u_2(t)]^T$ 이다. 제어입력 $u(t)$ 에 대해

$$u_o(t) = u(t) + R(x(t)) \quad (5)$$

라고 하자. 여기서

$$R(x(t)) = \begin{bmatrix} g1 \\ g2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

이다. 따라서 $B(x(t))R(x(t)) + E = 0$ 이 되므로 식 (3)과 식 (5)로부터 다음과 같은 다항 모델을 얻을 수 있다.

$$\dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + B(x(t))u(t). \quad (7)$$

3. 제어기 설계

3.1 SOS 제어기 설계

이 절에서는 앞 절에서 구한 다항 모델에서 시스템의 안정성을 보장하기 위한 제어입력을 SOS 접근법[3-5]을 이용하여 구하도록 한다. 다항식 $f(x)$ 에 대해 $f(x) = \sum_{i=1}^m f_i^2(x)$ 를 만족하는 $f_1(x), \dots, f_m(x)$ 가 존재하면 $f(x)$ 를 SOS(Sum of Square)라 한다. SOS는 제곱형태의 다항식의 합이므로 항상 $f(x) > 0$ 조건을 만족한다. $f(x)$ 의 $x(t) \in R^n$ 차수가 $2d$ 인 다항식일 때 $\hat{x}(x)$ 를 $x(t)$ 의 차수가 d 를 넘지 않는 단항식으로 이루어진 열 벡터라고 하면 $f(x)$ 가 SOS라는 것은 다음의 조건을 만족하는 것과 같다.

$$f(x) = \hat{x}(x)^T P(x) \hat{x}(x). \quad (8)$$

식 (8)은 SOS 다항식을 이차형식(quadratic form)으로 표현할 수 있음을 뜻하며 이를 이용해 시스템의 안정성을 보일 수 있다. 2관절 로봇팔 시스템을

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (9)$$

로 표현한다. 위의 식을 앞 절에서 기술한 테일러 급수 전개를 이용하여

$$\dot{x} = A(x)\hat{x}(x) + B(x)u \quad (10)$$

같은 상태변수의 종속적인 다항 시스템 형태로 표현할 수 있다. 여기서, $A(x)$ 와 $B(x)$ 는 상태변수 x 를 포함하는 다항 행렬이며, $\hat{x}(x)$ 는 $N \times 1$ 크기를 갖는 x 의 모든 단항식 열벡터이다. 또한, $A(x)$ 의 j 번째 행을 $A_j(x)$, $B(x)$ 의 행 색인을 $J = j_1, j_2, \dots, j_m$ 으로 나타내고, $\tilde{x} = (x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m})$ 을 정의한다.

보조정리 2[3]. 다항 대칭행렬 $P(x)$ 의 모든 x 가 비특이성일 때

$$\frac{\partial P}{\partial x_i}(x) = -P(x) \frac{\partial P^{-1}}{\partial x_i}(x) P(x) \quad (11)$$

로 표현할 수 있다.

증명. $P(x)$ 가 비특이성이므로 $P(x)P^{-1}(x) = I$ 이다. 이를 x_i 에 대해 미분하였을 때

$$\frac{\partial P(x)}{\partial (x_i)} P^{-1}(x) + P(x) \frac{\partial P^{-1}(x)}{\partial (x_i)} = 0 \quad (12)$$

이다. 따라서 식 (11)의 결과를 얻을 수 있다. **(Q.E.D.)**

정리 1. 식 (9)의 시스템에서 다항 대칭행렬 $X(\tilde{x}) \in R^{n \times n}$ 가 존재하고 상수 $\epsilon_1 > 0, \epsilon_2$ 가 SOS일 때 다음과 같은 조건을 만족하면 시스템을 안정하게 하는 제어입력을 얻을 수 있다.

$$v^T (X(\tilde{x}) - \epsilon_1 I) v \text{는 SOS이다.} \quad (13)$$

$$-v^T \left(\begin{array}{c} T(x)A(x)X(\tilde{x}) + X(\tilde{x})A^T(x)T^T(x) \\ + T(x)B(x)M(x) + M^T(x)B^T(x)T^T(x) \\ - \sum_{k \in J} \frac{\delta X(\tilde{x})}{\delta x_k} A^k(x)(\tilde{x}) + \epsilon_2 I \end{array} \right) v \text{는 SOS}$$

이다. (14)

여기서 시스템의 안정성을 보장하는 제어입력 $u(x)$ 는

$$u(x) = K(x)X^{-1}(\tilde{x})\tilde{x} \quad (15)$$

이다. 여기서 식 (14)에서의 행렬 $T(x)$ 는

$$T^{ij}(x) = \frac{\delta \hat{x}_i}{\delta x_j}(x), \quad i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, n \quad (16)$$

로 가정하고, $v \in R^N$ 이다.

증명. 리아푸노프 함수를

$$V = \hat{x}^T X^{-1}(\tilde{x}) \hat{x} \quad (17)$$

로 가정하였을 때, 이를 시간에 대해 미분하면

$$\begin{aligned} \frac{dV(x)}{dt} &= \dot{\hat{x}}^T(x) X^{-1}(\tilde{x}) \hat{x}(x) + \hat{x}^T X^{-1}(\tilde{x}) \dot{\hat{x}}(x) \\ &\quad + \hat{x}^T(x) \sum_{k \in J} \frac{\partial X^{-1}(\tilde{x})}{\partial x_k} A^k(x) \hat{x}(x) \\ &= \dot{x}^T \frac{\partial \hat{x}^T(x)}{\partial x} X^{-1}(\tilde{x}) \hat{x}(x) + \hat{x}^T X^{-1}(\tilde{x}) \frac{\partial \hat{x}(x)}{\partial x} \dot{x} \\ &\quad + \hat{x}^T \sum_{k \in J} \frac{\partial X^{-1}(\tilde{x})}{\partial x_k} A^k(x) \hat{x}(x) \\ &= \dot{x}^T T^T(x) X^{-1}(\tilde{x}) \hat{x}(x) + \hat{x}^T(x) X^{-1}(\tilde{x}) T(x) \dot{x} \\ &\quad + \hat{x}^T(x) \sum_{k \in J} \frac{\partial X^{-1}(\tilde{x})}{\partial z_k} A^k(x) \hat{x}(x). \end{aligned} \quad (18)$$

이 된다. 여기서 식 (11)과 식 (15)를 식 (18)에 대입하면

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \\ &- \hat{x}^T(x) \left(\begin{array}{c} A^T(x) T^T(x) X^{-1}(\tilde{x}) + X^{-1}(\tilde{x}) T(x) A(x) + \\ K^T(x) B^T(x) T^T(x) X^{-1}(\tilde{x}) \\ + X^{-1}(\tilde{x}) T(x) B(x) K(x) \\ + \sum_{k \in J} \frac{\partial X^{-1}(\tilde{x})}{\partial x_k} A^k(x) \end{array} \right) \hat{x}(x) \end{aligned} \quad (19)$$

과 같이 표현할 수 있다. 양변에 $X(\tilde{x})$ 를 곱하고, 보조정리 2의 결과를 이용하면 식 (19)의 제곱항들이 모든 x 에서 음반한정임을 알 수 있다. 따라서 궤환 제어입력의 안정성이 보장된다.

(Q.E.D.)

4. 입력제한 조건을 고려한 모델링

본 절에서는 식 (7)에서 제어입력 $u(t)$ 의 크기가 $\|u(t)\|_2 \leq \mu$ 와 같이 제한되었을 때 SOS 입력제한 조건을 제시한다. 다항 모델은 비선형 모델보다 SOS 제어 기법을 이용하여 입력제한이 있는 시스템을 안정하게 하는 제어입력을 효율적으로 설계할 수 있다. 일반적으로 입력제한이 있는 상태궤환시스템에

서는 다음과 같은 LMI를 만족해야 한다.

$$\begin{bmatrix} 1 & x^T(0) \\ x(0) & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} X & M_i^T \\ M_i & \mu^2 I \end{bmatrix} \geq 0. \quad (21)$$

여기서 $X = P^{-1}$, $M_i = K_i^T X$ 이다. 위의 LMI를 SOS 입력제한 조건으로 변형하면 아래와 같이 정리할 수 있다.

정리 1[8] : 입력제한이 있는 시스템의 초기값 $x(0)$ 를 안다고 가정하면, $t \geq 0$ 일 때 입력제한조건 $\|u(t)\|_2 \leq \mu$ 는 아래와 같은 조건을 만족해야 한다.

$$v_1^T \begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & X(\tilde{x}) \end{bmatrix} v_1 \text{은 SOS이다.} \quad (22)$$

$$v_2^T \begin{bmatrix} X(\tilde{x}) & M_i^T(x) \\ M_i(x) & \mu^2 I \end{bmatrix} v_2 \text{는 SOS이다.} \quad (23)$$

이 때 $X(\tilde{x}) \in R^{N \times N}$ 는 다항 대칭행렬이고 $M_i(x) \in R^{m \times N}$ 은 다항행렬이다.

증명 : 리아푸노프 함수 $V(x(t)) = x^T(t) P(\tilde{x}) x(t)$ 라고 하자. 초기값 $x(0)$ 를 알고 있을 때 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$\hat{x}^T(x(0)) P(\tilde{x}) \hat{x}(x(0)) \leq 1 \quad (24)$$

여기서 $P(\tilde{x}) \in R^{N \times N}$ 는 다항 대칭행렬이다. $X = P^{-1}$ 로 치환하면

$$\hat{x}^T(x(0)) X^{-1}(\tilde{x}) \hat{x}(x(0)) \leq 1 \quad (25)$$

가 되고 Schur complement를 이용해서 다음과 같은 조건을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 1 & \hat{x}(x(0))^T \\ \hat{x}(x(0)) & X(\tilde{x}) \end{bmatrix} \geq 0. \quad (26)$$

식 (21)은 다음과 같이 증명할 수 있다. 시스템의 제어입력 $u(t) = K_i(x) \hat{x}(x)$ 일 때, 입력제한 조건 $\|u(t)\|_2 \leq \mu^2$ 는 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$u^T(t) u(t) = \hat{x}^T(x) K_i^T(x) K_i(x) \hat{x}(x) \leq \mu^2. \quad (27)$$

그러므로

$$\frac{1}{\mu^2} \hat{x}^T(x) K_i^T(x) K_i(x) \hat{x}(x) \leq 1 \quad (28)$$

가 된다. 여기서 $\dot{V}(x) \leq 0$ 이면 $V(x) \leq V(x(0)) \leq 1$ 이므로 식 (24)로 부터

$$\hat{x}^T(x) X^{-1}(\tilde{x}) \hat{x}(x) \leq \hat{x}^T(x(0)) X^{-1}(\tilde{x}) \hat{x}(x(0)) \leq 1 \quad (29)$$

라고 할 수 있다. 여기서 식 (28)과 식 (29)로 부터

$$\frac{1}{\mu^2} \hat{x}^T(x) K_i^T(x) K_i(x) \hat{x}(x) \leq \hat{x}^T(x) X^{-1}(\tilde{x}) \hat{x}(x) \quad (30)$$

이면 식 (27)을 만족한다. 그러므로 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\hat{x}^T(x) \left(\frac{1}{\mu^2} K_i^T(x) K_i(x) - X^{-1}(\tilde{x}) \right) \hat{x}(x) \leq 0. \quad (31)$$

위의 식 (31)으로 부터

$$\frac{1}{\mu^2} K_i^T(x) K_i(x) - X^{-1}(\tilde{x}) \leq 0 \quad (32)$$

라고 하면 식 (30)를 만족한다. 위의 식에서 $M_i(x) = K_i(x) X(\tilde{x})$ 로 치환하면 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{1}{\mu^2} M_i^T(x) M_i(x) - X(\tilde{x}) \leq 0. \quad (33)$$

위의 식에 Schur complement를 적용하면 다음과 같은 조건을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} X(\tilde{x}) & M_i^T(x) \\ M_i(x) & \mu^2 I \end{bmatrix} \geq 0. \quad (34)$$

(Q.E.D.)

보조정리 1 : 만약 $\hat{x}(x(t)) = x(t)$ 이고 모든 i 에 대해 $X(\tilde{x})$, $M_i(x)$ 가 상수 행렬이라면 식 (22)과 식 (23)는 LMI 조건이 될 수 있다. 그러므로 식 (22)과 식 (23)는 좀 더 일반적인 표현이라고 할 수 있다.

식 (7)의 시스템의 B 행렬에는 복잡한 비선형항이 포함되어 있기 때문에 입력제한을 고려한 제어기를 설계하기가 복잡하다. 따라서 이 절에서는 비선형항을 포함하지 않는 행렬을 도입하여 입력제한을 고려한 2관절 로봇팔 시스템을 모델링한다. 식 (7)의 시스템에서 입력제한 조건을 고려하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\dot{x}(t) = A(x)\hat{x}(x(t)) + B(x) \text{sat}(K_i(x)\hat{x}(x(t))) \quad (35)$$

식 (7)의 시스템에서 $B(x)u(t) = \overline{B}u(t)$ 로 변환하면 식 (35)는 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{x}(t) = A(x)\hat{x}(x(t)) + \overline{B} \text{sat}(\overline{K}_i(x)\hat{x}(x(t))) \quad (36)$$

여기서 \overline{B} 는 상수행렬, $\overline{u} = \overline{K}(x)\hat{x}(x)$ 이다. 또한 앞 절에서 얻은 식 (22)의 입력제한 조건도 \overline{B} 행렬을 이용해 다시 정리하면 아래와 같다. 먼저 $Bu = \overline{B}\overline{u}$ 에서 $u(t)$ 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u(t) = B^\dagger(x)\overline{B}\overline{u}. \quad (37)$$

여기서 $B^\dagger(x) = (B^T(x)B(x))^{-1}B^T(x)$ 이다. 식 (27)에 식 (37)을 대입하면

$$u^T(t)u(t) = \hat{x}^T(x)B^\dagger(x)\overline{B}\overline{K}_i^T(x)B^\dagger(x)\overline{B}\overline{K}_i(x)\hat{x}(x) \leq \mu^2 \quad (38)$$

이다. 위의 식에 $M_i(x) = K_i(x)X(\tilde{x})$ 에 대해 Schur complement를 적용하면 다음과 같이 입력제한 조건을 얻을 수 있다.

$$v_2^T \begin{bmatrix} X(\tilde{x}) & (B^\dagger(x)\overline{B}M_i(x))^T \\ B^\dagger(x)\overline{B}M_i(x) & \mu^2 I \end{bmatrix} v_2 \text{는 SOS이다.} \quad (39)$$

지금까지 우리는 SOS 제어기법을 이용한 입력제한조건을 제시하였다. 다음 절에서는 위의 제한조건들을 고려한 SOS 제어기를 사용하여 모의실험을 수행하고 제안된 제어기법의 성능을 입증한다.

5. 모의실험

5.1 모의실험

이 절에서는 모의실험을 통해 본 논문에서 제안하는 입력제한을 고려한 제어기의 성능을 검증한다. 입력이 제한되었을 때 입력제한을 고려한 제어기를 설계하고 SOSTOOL[7]을 이용해 제어입력을 생성하였다. 모의실험은 표 1의 매개변수를 사용하였고 초기값은 $x_0 = [-45^\circ, 0^\circ, 30^\circ, 0^\circ]^T$ 으로 하였다.

제안된 제어기의 안정성을 입증하기 위해 제한조건이 없이 모의실험을 수행하였고 그 결과는 그림 3, 4, 5를 통해 확인할 수 있다. 그림 3, 4, 5는 각각 2관절 로봇팔 시스템의 관절의 각도와 각속도를 보여주며 원하는 목표 값으로 제어되는 것을 확인할 수 있다. 이를 통해 비선형 시스템에 대한 다항모델링의 타당성과 제안된 제어기법의 안정성을 입증하였다. 다음으로 입력제한 조건을 고려한 제어기의 안정성을 확인하는 모의실험을 하였다. 입력제한 조건을 고려한 제어기를 2관절 로봇팔에 적용하였을 때 시스템이 안정하게 목표 값으로 수렴하는 것을 그림 7, 8을 통해 확인할 수 있다. 그림 5와 8은 각각의 제어기를 적용하였을 때 제어입력의 크기를 보여주며 입력제한을 고려하여 설계한 제어기의 모의실험 결과인 그림 8에서 제안된 제어입력의 크기를 넘지 않는 것을 확인할 수 있다.

모의실험 결과를 통해 제안된 제어기법의 안정성과 다항모델의 타당성을 확인할 수 있었다. 또한 입력제한 조건을 고려한 제어기를 설계하여 입력이 제한되었을 때 제안된 제어기의 안정성을 입증하였다.

표 2 2관절 로봇팔의 매개변수

Table 2 Parameters of two-link robot arm

매개 변수	값	설명
m_1	3kg	1번째 관절의 무게
m_2	2kg	2번째 관절의 무게
m_3	2kg	부하의 무게
I_1	2.5kgm ²	1번째 관절의 무게중심에서의 관성
I_2	1.5kgm ²	2번째 관절의 무게중심에서의 관성
l_1	0.5m	1번째 관절의 길이
l_2	0.5m	2번째 관절의 길이
l_{c1}	0.1m	1번째 관절의 관절과 무게중심 사이의 거리
l_{c2}	0.1m	2번째 관절의 관절과 무게중심 사이의 거리

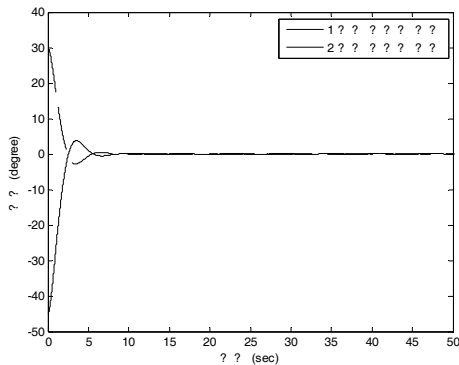


그림 3 입력제한이 없을 때 각 관절의 각도

Fig. 3 Degree of each link without input constraint

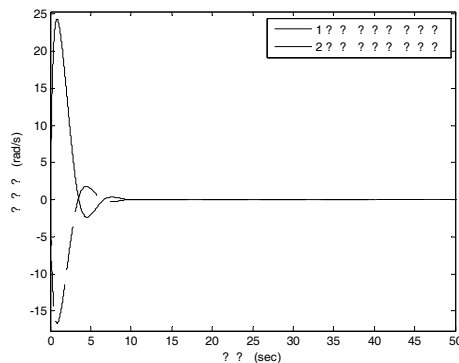


그림 4 입력제한이 없을 때 각 관절의 각속도

Fig. 4 Angular velocity of each link without input constraint

6. 결 론

본 논문에서는 SOS 접근법을 통해 입력제한을 고려한 2관절 로봇팔의 조정제어 기법을 제안하였다. 비선형항을 포함하는 2관절 로봇팔의 시스템 모델을 테일러 급수 전개를 통해 다항 모델

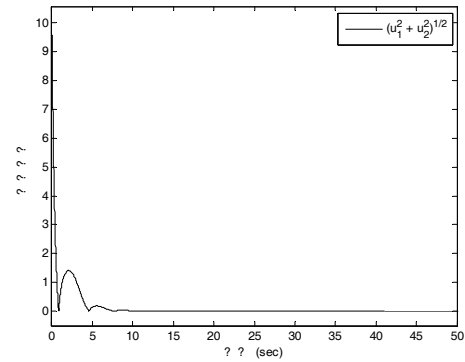


그림 5 입력제한이 없을 때 ||u||₂의 크기

Fig. 5 Control input ||u||₂ without input constraint

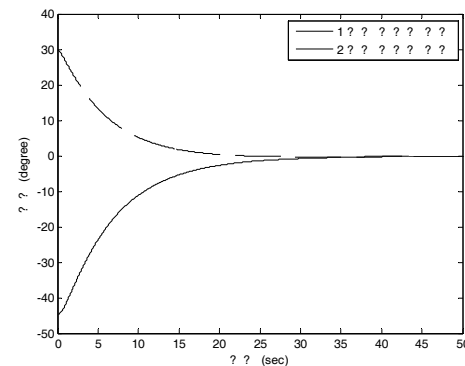


그림 6 입력제한을 고려한 제어를 사용하였을 때 각 관절의 각도

Fig. 6 Degree of each link with considering input constraint

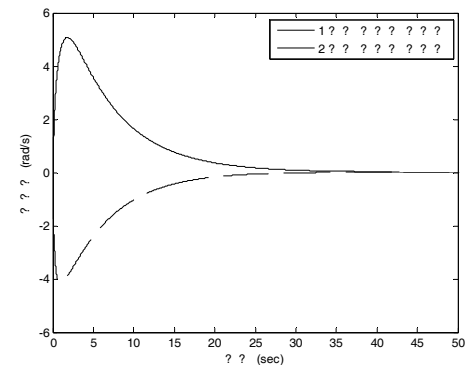


그림 7 입력제한을 고려한 제어를 사용하였을 때 각 관절의 각속도

Fig. 7 Angular velocity of each link with considering input constraint

로 모델링하였고, SOS 제어기법을 이용하여 입력제한을 고려한 제어를 설계하였다. 시스템에서 입력제한 조건을 고려하는 것은 대부분의 실제 시스템에서 입력이 무한정하지 않기 때문에 제어기 설계 시에 항상 고려해야 할 부분이며 제한된 입력에서도 시스템의 안정성을 보장할 수 있도록 설계되어야 한다. 비선형

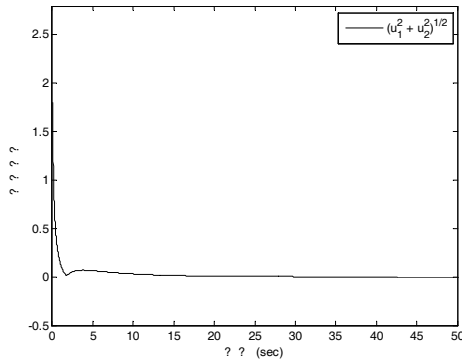


그림 8 입력제한($\|u\|_2 \leq 5$)을 고려한 제어기를 사용하였을 때 $\|u\|_2$ 의 크기

Fig. 8 Control input $\|u\|_2$ with considering input constraint ($\|u\|_2 \leq 5$)

제어기법은 이러한 제한조건을 고려함에 있어서 수식이 복잡한 단점이 있지만 SOS 제어기법은 다항모델을 사용하기 때문에 고려해야 하는 조건의 수식이 비교적 간단한 장점이 있다. 제한조건을 고려한 제어기에 대해 모의실험을 수행한 결과 제한된 입력에서도 시스템이 안정한 것을 확인할 수 있었다. 추후 연구의 진행방향은 실제 시스템에서 존재하는 시간지연 그리고 시간지연과 입력제한을 동시에 고려한 제어기 설계에 관해 연구할 계획이다.

감사의 글

이 논문은 2016년도 정부(미래창조과학부)의 재원으로 정보통신기술진흥센터의 지원을 받아 수행된 연구(B0101-15-0557, 실시간 자율복원 사이버물리 시스템 기초 연구(고신뢰 CPS 연구센터))이며, 또한 정부(미래창조과학부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임(2014 R1A2A1A11053153).

References

[1] H. K. Lam and L. D. Seneviratne, "LMI-based stability design of fuzzy controller for nonlinear systems," IET Control Theory & Applications, vol. 1, no. 1, pp. 393-401, Jan. 2007.

[2] L. W. Huang, C. Y. Cheng and G. R. Yu, "SOS-based Design of fuzzy Tracking Controller for a Two-Link Robot Arm," International Conference on System Science and Engineering, pp. 437-442, Jun. 2011.

[3] Jean-Jacques E. SLOITINE and W. LI, APPLIED NONLINEAR CONTROL, Prentice-Hall International, Inc, USA, 1991.

[4] C. J. Kim and D. K. Chwa, "Synchronization of Two Different Unified Chaotic Systems with Unknown Mismatched Parameters via Sum of Squares Method," IEICE trans. fundamentals, vol. E96-A, no.9, pp. 1840-1847, Sep. 2013.

[5] K. Tanaka, H. Yoshida and H. Ohtake, "A Sum-of Squares Approach to Modeling and control of Nonlinear Dynamical Systems With Polynomial Fuzzy Systems", IEEE transactions on Fuzzy Systems, VOL. 17, NO. 4, Aug. 2009.

[6] G. R. Yu and H. T. Huang, "A Sum-of-Squares Approach to Synchronization of Chaotic Systems with Polynomial Fuzzy Systems", Proceedings of 2012 International Conference on Fuzzy Theory and Its Applications, Nov, 2012.

[7] S. Prajna, A. Papachristodoulou, P. Seiler, and P. Parrilo, SOSTOOLS: Sum of Squares Optimization Toolbox for MATLAB, Pasadena: California Institute of Technology, 2004.

[8] G. R. Yu and K. H. Ho, "Constraints on Control Input and Output of Polynomial Fuzzy Systems via a Sum of Squares Approach", WCCI 2012 IEEE World Congress on Computational Intelligence, pp. 1-6, Jun. 2012.

저 자 소 개



정진강 (Jin-Gang Jeong)

2014년 아주대학교 전자공학과 학부 졸업.
2016년 동 대학원 석사 졸업. 현재 B&R에 재직중임.

Tel : 031-219-2489

Fax : 031-219-9531

E-mail : xdbdbx@ajou.ac.kr



좌동경 (Dongkyoung Chwa)

1995년 서울대 제어계측공학과 졸업.
2001년 동 대학원 제어계측공학과 졸업(공학박). 2005년~현재 아주대 전자공학과 교수.

Tel : 031-219-1815

Fax : 031-212-9531

E-mail : dkchwa@ajou.ac.kr