The Korean Journal of Applied Statistics (2016) DOI: http://dx.doi.org/10.5351/KJAS.2016.29.4.689
29(4), 689–697

Vector at Risk and alternative Value at Risk

C. S. Hong[a,1] · S. J. Han[a] · G. P. Lee[a]

[a]Department of Statistics, Sungkyunkwan University

(Received March 4, 2016; Revised April 14, 2016; Accepted April 26, 2016)

Abstract

The most useful method for financial market risk management may be Value at Risk (VaR) which estimates the maximum loss amount statistically. The VaR is used as a risk measure for one industry. Many real cases estimate VaRs for many industries or nationwide industries; consequently, it is necessary to estimate the VaR for multivariate distributions when a specific portfolio is established. In this paper, the multivariate quantile vector is proposed to estimate VaR for multivariate distribution, and the Vector at Risk for multivariate space is defined based on the quantile vector. When a weight vector for a specific portfolio is given, one point among Vector at Risk could be found as the best VaR which is called as an alternative VaR. The alternative VaR proposed in this work is compared with the VaR of Morgan with bivariate and trivariate examples; in addition, some properties of the alternative VaR are also explored.

Keywords: loss, portfolio, quantile, risk, weight

1. 서론

1990년대 이후 세계적으로 금융 및 자본시장이 개방되고 자유화됨에 따라 시장위험을 어떻게 측정하고 관리할 것인가에 대한 관심이 고조되고 있다. 국제결제은행(Bank for International Settlements; BIS)에서도 신 BIS 기준(Basel III)을 통해 금융기관이 독자적으로 개발한 내부모형을 사용하는 것을 허용함으로써 금융기관들로 하여금 시장위험을 정확하게 측정하려는 노력을 활성화시키고 있고, 시장위험 관리수단으로 금융기관들이 가장 선호하는 기법이 Value at Risk(VaR)이다. Morgan (1996)이 제안한 VaR이란 금리, 주가, 환율 등 기초적 시장가격들에 대해 주어진 신뢰수준 내에서 목표기간 내에 걸쳐 발생할 수 있는 최대손실금액(expected maximum loss)을 통계적인 모형으로 추정한다 (Jorion, 2007). 금융기관들이 직면하는 위험의 정도를 파악하기 위해 고안된 VaR는 간결하면서도 종합적으로 위험을 평가한다는 측면에서 최근 금융기관뿐만 아니라 일반기업에서도 널리 활용되고 있는 추세이며, VaR의 큰 장점은 여러 금융자산으로 구성된 포트폴리오 전체의 위험을 최대손실액이라는 하나의 수치로 나타내므로 해당 금융자산의 위험의 크기를 한 눈에 알아볼 수가 있다 (Barone-Adesi 등, 1999; Berkowitz 등, 2011; Kupiec, 1995; Lopez, 1998; Rockafellar와 Uryasev, 2000, 2002).

VaR은 최대손실금액에 중점을 두므로 우측꼬리 $\alpha \in (0,1)$값에 대응하는 $\min\{z|F_X(z) \geq 1-\alpha\}$로 정의하고 VaR_α로 표기한다. 정규분포 가정 하의 신뢰수준 $1-\alpha$에 해당하는 손실률의 임계값은 $z_\alpha = (v_\alpha - \mu)/\sigma$라 나타낸다. 여기서 v_α는 신뢰수준 $1-\alpha$에서의 손실률 위험값, μ는 손실률의 모평균, σ는

[1]Corresponding author: Department of Statistics, Sungkyunkwan University, 25-2, Sungkyunkwan-ro, Jongno-gu, Seoul 03063, Korea. E-mail: cshong@skku.edu

손실률의 모표준편차이다 (Andersson 등, 2001; Berkowitz 등, 2011; Krokhmal 등, 2002). 이를 v_α에 대해 정리하면 $\mathrm{VaR}_\alpha \equiv v_\alpha = \mu + z_\alpha \sigma$로 나타낸다. 손실률의 반대 개념인 이익률 그리고 손실률과 이익률에 초기투자금액을 곱한 손실금액과 이익금액에 대하여는 생략하고, 본 연구에서는 손실률에 대하여만 논의한다.

현실생활에서는 어떤 특정한 회사의 VaR를 추정하기보다는 그 회사가 포함된 여러 산업 내지는 국내 전체의 산업의 VaR를 추정하는 경우가 많다. 즉 단일분포의 VaR가 아닌 두 개 이상의 다변량분포에 대한 VaR를 추정이 필요하다. 현실생활에서는 국내 전체산업에 대하여나 투자할 여러 산업들에 대하여 포트폴리오가 설정된 경우에 VaR를 추정해야하는 경우인 즉, 다변량분포에 대하여 특정한 포트폴리오인 경우에 VaR를 추정할 필요성이 증가되었다.

다차원분포에서의 VaR를 추정에 대하여 Longin (2000, 2001) 등은 손실률을 따르는 확률변수의 벡터 $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_k)^T$가 다변량 정규분포 $N(\underline{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$를 따른다고 가정하였다. 여기서 $\underline{\mu}$는 손실률의 모평균 벡터 $(\mu_1, \ldots, \mu_k)^T$이며, $\boldsymbol{\Sigma}$는 손실률의 모분산 공분산 행렬 $\mathrm{Var}(\underline{X})$이다. 특정한 포트폴리오에 대한 가중값 벡터를 $\underline{w} = (w_1, \ldots, w_k)^T$로 설정하면, $\underline{w}^T \underline{X} \sim N(\underline{w}^T \underline{\mu}, \underline{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \underline{w})$이므로 다변량 산업에 대한 손실률 즉, α에 대응하는 다차원 손실률에 대한 VaR는 다음과 같이 정의하였다.

$$\mathrm{VaR}_\alpha = \underline{w}^T \underline{\mu} + z_\alpha \sqrt{\underline{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \underline{w}}. \tag{1.1}$$

금융자산의 수익률에 대한 분포를 정규분포로 가정하여 VaR를 추정하는 모수적 방법에 크게 의존해 왔으나 VaR 실증분석의 결과에 의하면 금융자산의 수익률분포는 정규분포보다 다른 분포들에 더 적합하다는 주장이 제기되었다. 예를 들어 Zangari (1996)는 미국의 주식을 이용한 금융자산들에 대한 수익률분포의 경우 꼬리부분이 더 두꺼운 것으로 보고하고 있으며, Li (1999)와 Neftci (2000)는 외환시장에서 이루어지는 환거래가 정규분포를 따르지 않는다는 사실을 보고한 바 있다. 따라서 다른 여러가지 분포들 예를 들어 치우친 t(skewed t) 분포와 치우친 라플라스(skewed laplace) 분포, 정규혼합(normal mixture) 분포 등의 대체분포를 통하여 실제 수익률분포를 설명하려 했다. Hong과 Kwon (2010)은 실제 수익률분포에 정규혼합분포가 높은 적합도를 나타내는 결과를 보였다. Hong과 Lee (2011a, 2011b)은 Copula 함수를 이용하여 다변량 손실에 대한 VaR를 연구하였다. VaR에 관한 많은 연구문헌이 있으며 응용통계연구에 게재된 논문 중에서 본 연구와 관련있는 최근 논문은 Heo 등 (2012), Kang 등 (2013), Park 등 (2013), Seo와 Kim (2010), Yeo와 Li (2015) 등을 참조바란다.

본 연구에서는 다변량분포에 대한 VaR를 추정하기 위하여, 다차원 분위 벡터를 바탕으로 연구를 제안한다. 다차원 분위 벡터를 이용하여 VaR가 다차원 공간에서 정의되는 Vector at Risk로 정의하고, 다변량 벡터에 특정한 가중값 벡터가 부여될 때 즉, 다변량분포에 대하여 특정한 포트폴리오가 설정된 경우에 Vector at Risk 중의 한 점을 가장 적절한 VaR로 설정하는 대안적인 방법을 제안하고 구하는 방법을 토론한다. 본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 다변량 분위 벡터(multivariate quantile vector)와 Vector at Risk를 제안하고 설명한다. 3장에서는 각각의 변수에 가중값이 주어진 경우에 대안적인 VaR를 구하는 방법을 정의한다. 4장에서는 2차원과 3차원에 대하여 상세히 설명하면서 2변량의 실증 예제와 3변량의 가상 예제를 통해 탐색한다. 마지막 5장에서는 결론을 유도한다.

2. 다변량 분위 벡터와 Vector at Risk

2변량 분위수에 대하여는 Chen과 Welsh (2002), Yuzhi (2010)는 다변량 분위함수에 대하여 연구하였다. 본 연구에서는 기존 연구와는 다른 각도로 다변량 분위 벡터(multivariate quantile vector)에 대해 정의한다.

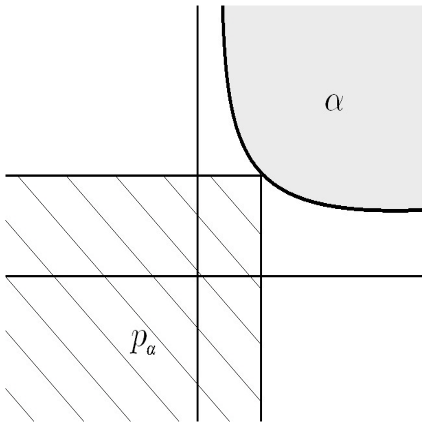

Figure 2.1. Bivariate $(1-\alpha)^{th}$ quantile vector.

우선 이차원 경우의 분위 벡터를 설명한다. 2변량 벡터 $\underline{z_\alpha} = (z_{1\alpha}, z_{2\alpha})^T$의 우상향 영역(right and upper region)을 2차원 평면에서 R^2로 표기하고 식 (2.1)을 만족할 때의 벡터 $\underline{z_\alpha}$를 $1-\alpha$ 분위 벡터(bivariate $(1-\alpha)^{th}$ quantile vector)라고 제안한다. 즉 α는 이변량 $1-\alpha$ 분위 벡터의 우상향 영역 R^2에 대응하는 확률을 의미한다.

$$\alpha = P\left[(z_1, z_2) \in R^2\right] = \iint_{(z_1,z_2)\in R^2} dF(z_1, z_2), \tag{2.1}$$

여기서 $F(\cdot,\cdot)$는 2변량 분포함수이다. $(1-\alpha)\,100\%$ 신뢰수준에서의 $1-\alpha$ 분위 벡터 $\underline{z_\alpha}$는 주어진 $p_\alpha \in (0,1)$에 대하여 다음의 두 식을 동시에 만족하여야 한다.

$$z_{1\alpha} = \min\{x_1 | F(x_1, x_2) \geq p_\alpha \ \forall x_2\}, \qquad z_{2\alpha} = \min\{x_2 | F(x_1, x_2) \geq p_\alpha \ \forall x_1\}.$$

관계식 $1-p_\alpha \geq \alpha$이 성립한다. 단 일변량에서는 $1-p_\alpha = \alpha$이다. 2변량에서는 상관계수 ρ가 주어졌을 때 α가 증가하면 p_α는 감소하며, 고정된 α에 대하여 ρ가 -1부터 $+1$까지 증가하면 p_α는 증가한다. Figure 2.1은 α와 p_α와의 관계를 설명하는 그래프이다. 2변량 $1-\alpha$ 분위 벡터 $\underline{z_\alpha}$는 곡선(curve)의 형태로 나타나며, 이 벡터의 우상향 영역이 R^2이다. 그리고 3변량 분위 벡터는 곡면(surface)으로 표현되면 이 벡터의 우상향 공간은 R^3로 표기할 수 있다. 다차원으로 확장하여 다변량 $1-\alpha$ 분위 벡터 $\underline{z_\alpha} = (z_{1\alpha}, \ldots, z_{k\alpha})^T$와 R^k를 다음과 같이 정의할 수 있다.

정의 2.1 k (≥ 3)차원의 벡터 $\underline{z_\alpha} = (z_{1\alpha}, \ldots, z_{k\alpha})^T$의 우상향 공간을 k차원 공간에서 R^k로 표기하고 식 (2.2)를 만족할 때, 임의의 $\alpha \in (0,1)$에 대하여 벡터 $\underline{z_\alpha}$를 다변량 $1-\alpha$ 분위 벡터(multivariate $(1-\alpha)^{th}$ quantile vector)로 정의한다.

$$\alpha = P\left[(z_1, \ldots, z_k) \in R^k\right] = \iint_{(z_1,\ldots,z_k)\in R^k} dF(z_1, \ldots, z_k), \tag{2.2}$$

여기서 $F(\cdot, \ldots, \cdot)$는 k변량 분포함수며, 주어진 p_α와 $i = 1, \ldots, k$에 대하여 $z_{i\alpha} = \min\{x_i | F(x_i, \ldots, x_k) \geq p_\alpha \ \forall x_j,\ j \neq i\}$.

일차원 손실률에 대한 VaR를 확장하여 다변량 $1-\alpha$ 분위 벡터 $\underline{z_\alpha} = (z_{1\alpha}, \ldots, z_{k\alpha})^T$의 모든 점에서의 VaR는 손실률의 모평균 벡터 $\underline{\mu}$와 모분산 공분산 행렬 $\boldsymbol{\Sigma}$을 이용하여 정의할 수 있으며 이를 다변량 Vector at Risk라고 하며 $\underline{\mathrm{VaR}_\alpha}$로 표기한다.

정의 2.2 k변량인 경우의 Vector at Risk는 다음과 같이 정의한다. 임의의 $\alpha \in (0,\ 1)$에 대하여,

$$\underline{\mathrm{VaR}_\alpha} = \underline{\mu} + \sqrt{\mathrm{diag}(\mathbf{\Sigma})}\,\underline{z_\alpha},$$

여기서 $\underline{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_k \end{pmatrix}$, $\sqrt{\mathrm{diag}(\mathbf{\Sigma})} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_k \end{pmatrix}$이며 $\underline{z_\alpha} = \begin{pmatrix} z_{1\alpha} \\ \vdots \\ z_{k\alpha} \end{pmatrix}$는 k변량 $1-\alpha$ 분위 벡터이다.

그리고 이변량인 경우의 Vector at Risk는 $\underline{\mathrm{VaR}_\alpha} = \binom{\mu_1 + z_{1\alpha}\sigma_1}{\mu_2 + z_{2\alpha}\sigma_2}$이다. 모평균 벡터 $\underline{\mu}$를 영 벡터로 각 변수의 모분산을 단위분산인 경우에는, Vector at Risk와 다변량 분위 벡터와 동일하다 ($\underline{\mathrm{VaR}_\alpha} = \underline{z_\alpha}$).

3. 대안적인 VaR

정의 2.2를 통하여 구한 다변량 Vector at Risk의 모든 점은 각 변량을 구성하는 포르토폴리오의 구성에 대응하는 VaR가 된다. 즉 Vector at Risk, $\underline{\mathrm{VaR}_\alpha}$의 어떤 임의의 한 점은 각 변량에 어떤 특정한 가중값 벡터 $\underline{w} = (w_1, \ldots, w_k)^T$를 부여하여 투자하는 경우에 대한 VaR, VaR_α이다. 다변량 $\underline{\mathrm{VaR}_\alpha}$에서 특정한 가중값을 부여하는 경우에 최적의 VaR를 다변량 대안적인 VaR라고 제안한다.

특정한 가중값에 대응하는 Vector at Risk의 한 점인 최적의 VaR는 다음과 같이 구한다. 다변량 $1-\alpha$ 분위 벡터 $\underline{z_\alpha}$에 대하여 $\underline{w}^T(\underline{\mu} + \sqrt{\mathrm{diag}(\mathbf{\Sigma})}\,\underline{z_\alpha})$를 최소화하는 $\underline{z_\alpha^*} = (z_{1\alpha}^*, \ldots, z_{k\alpha}^*)^T$를 찾고 이에 대응하는 $\underline{w}^T(\underline{\mu} + \sqrt{\mathrm{diag}(\mathbf{\Sigma})}\,\underline{z_\alpha^*})$를 대안적인 최적의 VaR로 제안하고 정의 3.1에서와 같이 VaR_α^*로 표기한다.

정의 3.1 대안적인 최적의 VaR를 다음과 같이 정의한다. 임의의 $\alpha \in (0,\ 1)$에 대하여,

$$\mathrm{VaR}_\alpha^* \equiv \underline{w}^T\underline{\mu} + \underline{w}^T\sqrt{\mathrm{diag}(\mathbf{\Sigma})}\,\underline{z_\alpha}^*,$$

여기서 $\underline{z_\alpha^*} = (z_{1\alpha}^*, \ldots, z_{k\alpha}^*)^T$는 $\underline{w}^T(\underline{\mu} + \sqrt{\mathrm{diag}(\mathbf{\Sigma})}\,\underline{z_\alpha})$를 최소화한다.

k차원의 대안적인 VaR는 다음과 같이 표현하여 사용할 수 있다.

$$\mathrm{VaR}_\alpha^* = \sum_i (w_i\ \mu_i) + \sum_i (w_i\ z_{i\alpha}^*\ \sigma_i).$$

그러므로 Morgan의 VaR인 $\mathrm{VaR}_\alpha = \underline{w}^T\underline{\mu} + z_\alpha\sqrt{\underline{w}^T\mathbf{\Sigma}\underline{w}}$와 본 연구의 정의 3.1에서 제안한 대안적인 VaR인 $\mathrm{VaR}_\alpha^* = \underline{w}^T\underline{\mu} + \underline{w}^T\sqrt{\mathrm{diag}(\mathbf{\Sigma})}\underline{z_\alpha^*}$의 차이를 살펴보기 위하여 모평균벡터에 대한 $\underline{w}^T\underline{\mu}$에 대하여는 생략하고, $z_\alpha\sqrt{\underline{w}^T\mathbf{\Sigma}\underline{w}}$와 $\underline{w}^T\sqrt{\mathrm{diag}(\mathbf{\Sigma})}\underline{z_\alpha^*}$만을 비교하면서 토론한다. 정의 3.1에서 제안한 대안적인 최적의 VaR에서는 변수들의 상관관계가 다변량 분위 벡터에 포함되어있는 반면에 Morgan의 VaR는 변수들의 상관관계가 포함된 분산공분산행렬을 사용했다는데 그 차이가 존재한다.

4. 예제

4.1. 2차원 실증 예제

Park과 Jung (2002)는 다섯 종목으로 구성된 주식포트폴리오를 <표 2>와 같이 설정하였는데 본 연구에서는 $\alpha = 0.05$인 경우에 두 종목인 삼성전자와 현대차만을 선정한 주식포트폴리오에 대하여 Var인 $\mathrm{VaR}_{0.05}$와 대안적인 최적의 VaR인 $\mathrm{VaR}_{0.05}^*$를 구하여보고 비교 토론한다. Park과 Jung (2002)의 <표 2>인 주식포트폴리오의 분산 공분산 행렬로부터 발췌한 삼성전자와 현대차의 분산 공분산 행렬은 다음과 같다.

$$\mathrm{Var}\begin{pmatrix} \text{삼성전자} \\ \text{현대차} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.001487 & 0.000682 \\ 0.000682 & 0.001508 \end{pmatrix}.$$

Table 4.1. Bivariate 0.95th quantile vector and Q values

$z_{1\ 0.05}$	$z_{2\ 0.05}$	Q	
0.912	3.282	0.06654396	
0.913	2.986	0.06266126	
⋮	⋮	⋮	
1.243	1.246	0.04808640	
1.244	1.245	0.04809865	
1.245	1.244	0.04811089	
1.246	1.243	0.04812314	
⋮	⋮	⋮	
1.097	1.449	0.04705085	
1.098	1.447	0.04704990	**min**
1.099	1.446	0.04706214	
⋮	⋮	⋮	
2.986	0.913	0.08805027	
3.282	0.912	0.09557047	

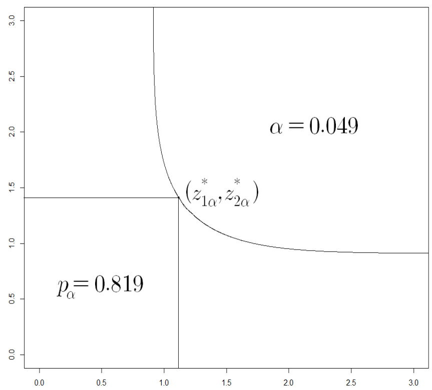

Figure 4.1. Bivariate 0.95 quantile vector.

삼성전자와 현대차의 상관계수는 $\rho = 0.000682/(0.001487 \quad 0.001508) \approx 0.45$이다. 그리고 삼성전자와 현대차의 보유주식금액은 각각 3,475,000,000과 1,780,000,000이므로 가중값은 $w_1 = 0.66$, $w_2 = 0.34$이다. 그러므로 $\alpha = 0.05$에서 식 (1.1)을 이용한 VaR는 다음과 같이 구한다.

$$\begin{aligned}\mathrm{VaR}_{0.05} &= 1.645\sqrt{w_1^2\sigma_1{}^2 + w_2{}^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\rho\sigma_1\sigma_2} \\ &= 1.645\sqrt{0.66^2 \cdot 0.001487 + 0.34^2 \cdot 0.001508 + 2 \cdot 0.66 \cdot 0.34 \cdot 0.000682} = 0.0553.\end{aligned}$$

그리고 $\rho = 0.45$인 경우의 이변량 정규분포를 가정했을 때의 0.95 분위 벡터 $\underline{z_{0.05}} = (z_{1\,0.05}, z_{2\,0.05})^T$를 구하여 Table 4.1에 나타내고 Figure 4.1에 곡선으로 표현하였다. $\rho = 0.45$인 경우에 탐색적으로 찾은 $p_{0.05}$는 0.819이며, 모든 Vector at Risk에 대응하는 $Q = w_1\, z_{1\,0.05}\,\sigma_1 + w_2\, z_{2\,0.05}\,\sigma_2$도 구하여 Table 4.1에 같이 정리하였다. 그리고 가장 작은 값인 Q경우에의 0.95 분위 벡터의 한 점인 $\underline{z^*_{0.05}} = (z^*_{1\,0.05}, z^*_{2\,0.05})^T$를 Figure 4.1에 표현하였다.

본 예제의 2차원 분포에 대응하는 대안적인 VaR를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathrm{VaR}^*_{0.05} &= w_1\, z^*_{1\,0.05}\,\sigma_1 + w_2\, z^*_{2\,0.05}\,\sigma_2 \\ &= 0.66\cdot 1.098\cdot 0.001487 + 0.34\cdot 1.447\cdot 0.001508 = 0.0471.\end{aligned}$$

그러므로 Morgan의 VaR값 0.0553은 본 연구에서 제안한 대안적인 최적의 VaR값 0.0471보다 크다. 즉 $\mathrm{VaR}_{0.05} > \mathrm{VaR}^*_{0.05}$의 관계를 나타낸다. 예제 4.1에서의 가중값 백터 $(w_1, w_2)^T = (0.66, 0.34)^T$ 이외의 다양한 가중값 벡터를 고려해본 결과도 마찬가지로 $\mathrm{VaR}_\alpha > \mathrm{VaR}^*_\alpha$ 관계임을 탐색하였다. 그러므로 다음과 같은 결론을 유도할 수 있겠다. 변수들의 상관관계가 포함된 분산공분산행렬을 사용한 Morgan의 VaR값이 변수들의 상관관계가 2변량 분위 벡터에 포함되어있는 대안적인 VaR값보다 크다는 것은 정의 3.1에서 제안한 대안적인 VaR이 2변량 변수들의 상관관계 정도와 2변량 분포의 성격을 더욱 잘 반영하기 때문에 최대손실금액을 과소 추정하였다고 판단한다.

4.2. 3차원 가상 예제

4.1절의 예제에서는 2변량에 대하여 설명하였는데 4.2절에서는 3변량인 경우를 고려한다. 3변량 변수에 대한 분포를 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix}, \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} {\sigma_1}^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 & \rho^2\sigma_1\sigma_3 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & {\sigma_2}^2 & \rho\sigma_2\sigma_3 \\ \rho^2\sigma_1\sigma_3 & \rho\sigma_2\sigma_3 & {\sigma_3}^2 \end{pmatrix}\right).$$

여기서 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 1.0$, 그리고 모든 상관계수를 $\rho = 0.3$로 가정한다. 또한 가중값을 $w_1 = 0.5, w_2 = 0.3, w_3 = 0.2$로 설정한다. 이때에 대응하는 $\alpha = 0.05$에서의 VaR는 다음과 같이 구한다.

$$\begin{aligned}\mathrm{VaR}_{0.05} &= 1.645\sqrt{w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + w_3^2\sigma_3^2 + 2w_1w_2\rho\sigma_1\sigma_2 + 2w_2w_3\rho\sigma_2\sigma_3 + 2w_1w_3\rho^2\sigma_1\sigma_3} \\ &= 1.645\sqrt{0.5^2 + 0.3^2 + 0.2^2 + 2\cdot 0.5\cdot 0.3\cdot 0.3 + 2\cdot 0.3\cdot 0.2\cdot 0.3 + 2\cdot 0.5\cdot 0.2\cdot 0.09} = 1.19.\end{aligned}$$

4.2절에서 가정한 3변량 분포인 경우에 0.95 분위 벡터 $\underline{z_{0.05}} = (z_{1\,0.05}, z_{2\,0.05}, z_{3\,0.05})^T$와 이에 대응하는 $Q = \sum_i w_i\, z_{i0.05}\,\sigma_i$를 계산하였다. 여기에서 각 변수의 모분산을 단위분산인 경우이므로 3변량 분위 벡터는 Vector at Risk와 동일하다. 계산하여 구한 Q값 중에서 가장 작은 값이 0.86이며 이에 대응하는 0.95 분위 벡터 중의 한 점은 $\underline{z^*_{0.05}} = (0.7, 0.9, 1.2)^T$이다. 이를 이용하여 3차원 대안적인 VaR는 다음과 같이 구한다.

$$\begin{aligned}\mathrm{VaR}^*_{0.05} &= w_1\, z^*_{1\,0.05}\,\sigma_1 + w_2\, z^*_{2\,0.05}\,\sigma_2 + w_3\, z^*_{3\,0.05}\,\sigma_3 \\ &= 0.5\cdot 0.7\cdot 1.0 + 0.3\cdot 0.9\cdot 1.0 + 0.2\cdot 1.2\cdot 1.0 = 0.86.\end{aligned}$$

예제 4.2에서도 3차원에서 정의한 대안적인 VaR값 (= 0.86)은 Morgan의 VaR값 (= 1.19)보다 작다. 즉 예제 4.1에서와 같이 $\mathrm{VaR}^*_\alpha < \mathrm{VaR}_\alpha$의 관계를 나타낸다. 변수들의 상관관계가 3변량 분위 벡터에 포함되어있는 대안적인 VaR값이 변수들의 상관관계가 포함된 분산공분산행렬을 사용한 VaR값보다 작다는 것은 본 연구에서 제안한 대안적인 VaR이 3변량 변수들의 상관관계 정도와 3변량 분포의 성격을 더욱 잘 반영하기 때문에 최대손실금액을 적게 추정하였다. 따라서 2변량 이상의 다변량 분포에 대하여는 본 연구에서 제안한 대안적인 VaR를 사용하는 것이 더욱 효율적이며 또한 경제적이라고 판단할 수 있다.

5. 결론

시장위험 관리수단으로 금융기관들이 가장 선호하는 기법 중의 하나인 VaR를 구할 때에 수익 또는 손실에 대한 변수를 사용하는데, 본 논문에서는 변수가 손실일 경우를 다루고, 손실률에 자산을 곱한 값이 손실금액이므로 손실률에 대하여만 토론한다. 그리고 손실률의 분포를 가장 일반적인 정규분포로 가정하였다.

현실생활에서는 특정한 한 회사의 VaR를 추정하기보다는 그 회사가 포함된 여러 산업 내지는 국내 전체의 산업에 대한 VaR를 추정하는 경우가 발생한다. 단일분포에 대한 VaR이 아닌 다변량분포에 대하여 특정한 포트폴리오가 설정된 경우에 VaR를 추정할 필요가 있다. 기존의 문헌 연구에서는 손실률을 따르는 다변량 변수와 가중값 벡터의 선형결합인 변수를 설정하여 이를 일차원분포로 변환하여 VaR를 추정하였지만, 본 연구에서는 다변량분포에 대한 다차원 분위 벡터를 제안하고 이 분위 벡터를 바탕으로 다차원 공간에서 정의되는 Vector at Risk를 제안하였다. 그리고 여러 산업에 투자하기 위하여 특정 가중값 벡터가 부여된 경우에 즉, 다변량분포에 대하여 특정한 포트폴리오가 설정된 경우에 가장 적절한 VaR를 대안적으로 제안하였다. 2차원과 3차원에 대하여 상세히 설명을 추가하면서 다차원으로 확장하여 대안적인 VaR를 토론하였다.

2변량과 3변량의 예제를 통해 대안적인 VaR를 구하면서 Morgan (1996)의 VaR과 비교하였다. 그 결과 변수들의 상관관계가 포함된 분산공분산행렬을 사용한 기존의 VaR값이 변수들의 상관관계가 다변량 분위 벡터에 포함되어있는 대안적인 VaR값보다 크거나 같다는 것을 탐색하였으며, 상관관계가 없으며 포트폴리오의 가중값이 균등한 경우만 두 종류의 VaR값이 일치한다. 이것은 본 연구에서 제안한 VaR이 다변량 변수들의 상관관계 정도와 다변량 분포의 성격을 더욱 잘 반영하기 때문에 최대손실금액을 과소 추정한다고 판단된다. 따라서 다변량 분포에 대하여는 본 연구에서 제안한 대안적인 VaR 즉, 정의 3.1에서 제안한 VaR를 사용하는 것이 더욱 손실비용 측면에서 경제적이며 효율적이라고 결론내릴 수 있다.

본 연구에서는 2변량과 3변량 정규분포의 특정한 분산공분산행렬인 경우만을 고려하였는데 다양한 상관계수 또는 분산공분산행렬을 갖고 있는 경우에 그리고 다양한 가중값 벡터의 조합인 경우를 고려하여 이에 대응하는 Vector at Risk와 대안적인 VaR를 연구할 필요가 있다. 또한 이를 k (> 3)차원의 다변량 정규분포와 보다 일반적인 분포함수(예를 들면 Copular 함수 등)를 이용하여 다변량분포에 대한 Vector at Risk와 대안적인 VaR에 대한 연구를 향후 연구과제로 남겨둔다.

References

Andersson, F., Mausser, H., Rosen, D., and Uryasev, S. (2001). Credit risk optimization with condition value-at-risk, *Mathematical Programming*, **89**, 273–291.

Barone-Adesi, G., Giannopoulos, K., and Vosper, L. (1999). VaR without correlations for portfolio of derivative securities, *Journal of Futures Markets*, **19**, 583–602.

Berkowitz, J., Christoffersen, P., and Pelletier, D. (2011). Evaluating Value-at-Risk models with desk-level data, *Management Science*, **57**, 2213–2227.

Chen, L. A. and Welsh, A. H. (2002). Distribution-function-based bivariate quantiles, *Journal of Multivariate Analysis*, **83**, 208–231.

Heo, S. J., Yeo, S. C., and Kang, T. H. (2012). Performance analysis of economic VaR estimation using risk neutral probability distributions, *Korean Journal of Applied Statistics*, **25**, 757–773.

Hong, C. S. and Kwon, T. W. (2010). Distribution fitting for the rate of return and value at risk, *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **21**, 219–229.

Hong, C. S. and Lee, J. H. (2011a). VaR estimation of multivariate distribution using Copula functions, *Korean Journal of Applied Statistics*, **24**, 523–533.

Hong, C. S. and Lee, W. Y. (2011b). VaR estimation with multiple Copula functions, *Korean Journal of Applied Statistics*, **24**, 809–820.

Jorion, P. (2007). *Value at Risk, The New Benchmark for Market Risk* (1st Ed.), McGraw-Hill, New York.

Kang, M. J., Kim, J. Y., Song, J. W., and Song, S. J. (2013). Value at Risk with peaks over threshold: comparison study of parameter estimation, *Korean Journal of Applied Statistics*, **26**, 483–494.

Krokhmal, P., Palmquist, J., and Uryasev, S. (2002). Portfolio optimization with conditional Value-at-Risk objective and constraints, *Journal of Risk*, **4**, 11–27.

Kupiec, P. (1995). Techniques for verifying the accuracy of risk management models, *Journal of Derivatives*, **2**, 73–84.

Li, D. X. (1999). *Value at Risk based on the volatility skewness and kurtosis*, Available from: http://www.riskmetrics.com/research/working/var4mm.pdf, RiskMetrics Group.

Longin, F. M. (2000). From value at risk to stress testing: the extreme value approach, *Journal of Banking & Finance*, **24**, 1097–1130.

Longin F. M. (2001). Beyond the VaR, *Journal of Derivatives*, **8**, 36–48.

Lopez, J. A. (1998). Methods for evaluating Value-at-Risk estimates, *Economic Policy Review*, **4**, 119–124.

Morgan, J. P. (1996). *RiskMetrics, Technical Document* (4th Ed.), JP Morgan, New York.

Neftci, S. N. (2000). Value-at-Risk calculation extreme events and tail estimation, *Journal of Derivatives*, **7**, 23–37.

Park, J. S. and Jung, M. S. (2002). Market risk management strategies through VaR, *KISDI Research Papers, Fall 2002*, KISDI.

Park, K. H., Ko, K. Y., and Beak, J. S. (2013). An one-factor VaR model for stock portfolio, *Korean Journal of Applied Statistics*, **26**, 471–481

Rockafellar, R. T. and Uryasev, S. (2000). Optimization of conditional value-at-risk, *Journal of Risk*, **2**, 21–41.

Rockafellar, R. T. and Uryasev, S. (2002). Conditional value-at-risk for general loss distributions, *Journal of Banking & Finance*, **26**, 1443–1471.

Seo, S. H. and Kim, S. G. (2010). Estimation of VaR using extreme losses, and back-testing: case study, *Korean Journal of Applied Statistics*, **23**, 219–234.

Yeo, S. C. and Li, Z. (2015). Performance analysis of volatility models for estimating portfolio value at risk, *Korean Journal of Applied Statistics*, **28**, 541–599.

Yuzhi, C. (2010). Multivariate quantile function models, *Statistica Sinica*, **20**, 481–496.

Zangari, P. (1996). An improved methodology for measuring VaR, *RiskMetrics Monitor*, **2**, 7–25.

Vector at Risk와 대안적인 VaR

홍종선[a,1] · 한수정[a] · 이기쁨[a]

[a]성균관대학교, 통계학과

(2016년 3월 4일 접수, 2016년 4월 14일 수정, 2016년 4월 26일 채택)

요 약

금융시장 위험관리 수단으로 많이 사용하는 기법 중의 하나는 Morgan이 제안한 최대손실금액을 추정하는 VaR (Value at Risk)이다. VaR은 한 산업의 금융위험 측정도구로 사용되어지지만 실제 생활에서는 여러 회사 또는 국내 전체의 산업의 VaR를 추정하는 경우가 많다. 따라서 투자할 여러 산업에 대하여 특정한 포트폴리오가 설정된 경우에 다변량분포에 대한 VaR를 추정하는 문제가 필요하다. 본 연구에서는 다변량분포에 대한 VaR를 추정하기 위하여, 다차원 분위 벡터를 제안하고, 이를 바탕으로 다차원 공간에서의 Vector at Risk를 정의한다. 다변량분포에 대하여 특정한 포트폴리오가 설정된 경우에, Vector at Risk 중에서의 한 점을 가장 적절한 VaR로 설정하는 방법을 제안한다. 이를 대안적인 VaR이라고 정의하고, 다변량 분포에 대한 이 방법에 대하여 토론한다. 2변량과 3변량의 예제를 통해 본 연구의 대안적인 VaR과 Morgan의 VaR를 각각 구하고, 비교 설명하면서 대안적인 VaR의 특징을 탐색한다.

주요용어: 가중값, 분위수, 손실, 위험, 포트폴리오

[1]교신저자: (03063) 서울특별시 종로구 성균관로 25-2, 성균관대학교 통계학과. E-mail: cshong@skku.edu