*The Korean Journal of Applied Statistics* (2016) DOI: http://dx.doi.org/10.5351/KJAS.2016.29.4.571
**29**(4), 571–579

# Saddlepoint approximation to the distribution function of quadratic forms based on multivariate skew-normal distribution

Jonghwa Na[a,1]

[a]Department of Information & Statistics, Chungbuk National University

(Received February 3, 2016; Revised March 14, 2016; Accepted April 25, 2016)

**Abstract**

Most of studies related to the distributions of quadratic forms are conducted under the assumption of multivariate normal distribution. In this paper, we suggested an approximation to the distribution of quadratic forms based on multivariate skew-normal distribution as alternatives for multivariate normal distribution. Saddlepoint approximations are considered and the accuracy of the approximations are verified through simulation studies.

Keywords: quadratic forms, multivariate skew-normal, saddlepoint approximation, cumulant generating function

## 1. 서론

다변량 왜정규분포는 Azzalini와 Dalla Valle (1996)에 의해 처음 소개된 분포로 다음의 밀도함수를 가진다.

$$f_p(x) = 2\phi_p(x;\Omega)\Phi(\alpha' x) \quad (x \in R^p),$$

여기서 $\phi_p(x;\Omega)$는 평균이 0이고 상관행렬이 $\Omega$인 $p$-차원의 다변량 정규분포의 밀도함수이며, $\Phi(\cdot)$는 일변량 표준정규분포의 분포함수이다. 또한 $\alpha\,(\alpha \in R^p)$는 형태모수로 불리며, $\alpha = 0$일 때 위의 분포는 다변량 정규분포 $N_p(0,\Omega)$가 된다. 위 분포는 기호로는 $X \sim SN_p(\Omega,\alpha)$으로 나타낸다. 다변량 왜정규분포의 통계적 응용에 대해서는 Azzalini와 Capitanio (1999)를 참고하기 바란다.

본 논문에서는 위의 다변량 왜정규분포의 가정하에서 다음과 같이 정의되는 이차형식 통계량 즉,

$$Q = (X-a)'A(X-a) \tag{1.1}$$

의 분포함수에 대한 근사를 다루고자 한다. 여기서 $A$는 대칭행렬이며, $a$는 상수벡터이다.

This work was supported by the research grant of the Chungbuk National University in 2014.

[1]Department of Information and Statistics, Chungbuk National University, Chungdae-Ro 1, Seowon-Gu, Cheongju, Chungbuk 28644, Korea. E-mail: cherin@cbnu.ac.kr

다변량 왜정규분포에 기반한 선형결합 통계량에 대한 연구에는 Na (2014)가 있으며, 이차형식과 관련된 연구로는 Huang과 Chen (2006), Genton 등 (2001), Gupta와 Huang (2002), Loperfido (2001), Wang 등 (2009)이 있다. 이 가운데 Gupta와 Huang (2002)은 이차형식 $Q$의 적률생성함수를 유도하고, 적절한 조건하에서 $Q$의 분포가 카이제곱 분포를 따름을 보였다. Loperfido (2001)도 유사한 결과를 제시하고 통계적 응용을 언급하였으며, Genton 등 (2001)은 $Q$의 처음 4차 적률을 구체적으로 제시하였으며, Huang과 Chen (2006)은 보다 일반화된 다변량 왜대칭분포(multivariate skew-symmetric distribution)하에서 이차형식의 적률생성함수를 유도한 바 있다.

이차형식 통계량의 분포함수의 계산을 다룬 Imhof (1961)의 연구를 비롯하여 안장점근사와 관련된 연구로는 주로 다변량 정규분포의 가정 하에서 수행되어 왔다. 이 가운데 Kuonen (1999)은 동차이차형식의 분포함수에 대한 안장점근사를 다루었으며, Na와 Kim (2005)은 보다 일반화된 통계량에 대해 안장점근사를 적용하였다. 본 논문에서는 다변량 왜정규분포의 가정하에서 통계량 $Q$의 분포함수에 대한 안장점근사를 다루고자 한다. 2절에서는 왜정규분포 기반 이차형식 통계량의 분포와 안장점 근사에 대해 소개하고, 3절에서는 안장점근사에 요구되는 주요 내용을 구체적으로 유도한다. 4절에서는 모의실험을 통해 안장점근사의 정도를 확인하고, 5절에서는 결론 및 향후 연구에 대해 언급한다.

## 2. 왜정규 기반 이차형식의 분포와 안장점근사

### 2.1. 왜정규분포 기반 이차형식의 분포

Gupta와 Huang (2002)은 이차형식 $Q$의 적률생성함수가 다음과 같이 주어짐을 보였다.

$$M_Q(t) = \frac{2\exp\left\{a'\left[tA + 2t^2 A\left(\Omega^{-1} - 2tA\right)^{-1} A\right] a\right\}}{|I - 2tA\Omega|^{\frac{1}{2}}} \times \Phi\left[-\frac{2t\alpha'\left(\Omega^{-1} - 2tA\right)^{-1} Aa}{\left(1 + \alpha'\left(\Omega^{-1} - 2tA\right)^{-1}\alpha\right)^{\frac{1}{2}}}\right], \quad (2.1)$$

여기서 $a \in R^p$, $t \in R^1$이다. 이 결과로부터 $a = 0$인 경우, 이차형식 $Q_0 = X'AX$의 적률생성함수는

$$M_{Q_0}(t) = |I - 2tA\Omega|^{-\frac{1}{2}}, \quad \Omega^{-1} - 2tA > 0, \ t \in R^1$$

이 되어 왜도모수 $\alpha$에 무관함을 보였다. 따라서 $a = 0$일 때, 이차형식 $Q_0$의 분포는 다변량 정규분포 가정하에서의 이차형식과 동일한 분포가 된다. 다변량 정규분포하에서의 이차형식 $Q_0$의 분포함수에 대한 안장점근사는 Kuonen (1999) 또는 Na와 Kim (2005)을 참고하기 바란다. 또한 Gupta와 Huang (2002)은 $A = \Omega^{-1}$일 때 $Q_0$의 분포가 $\chi^2(p)$를 따르고, $A\Omega = \mathrm{diag}(\delta_1, \ldots, \delta_p)$일 때 $Q_0 \sim \sum_{j=1}^p \delta_j X_j$ (여기서 $X_j \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \chi^2(1)$, $j = 1, \ldots, p$)임을 보였다.

본 논문에서는 $a \neq 0$인 경우 이차형식 $Q$의 분포함수에 대한 근사를 다루기로 한다. 근사의 방법으로는 다음 절에서 소개되는 안장점근사를 사용하기로 한다.

### 2.2. 분포함수에 대한 안장점근사

안장점근사는 Daniels (1954)가 처음으로 통계학 분야에 소개한 근사 방법으로, 주어진 한 점에서 통계량의 밀도함수 또는 분포함수에 대한 근사를 제공한다. 통계량의 누율생성함수(cumulant generating function)에 기반한 안장점근사는 표본평균에 대한 근사를 시작으로 그 동안 여러 유형의 통계량에 대해 연구되어 왔다. 이 가운데 Lugannani와 Rice (1980)는 표본평균의 분포함수에 대한 안장점근사를 제안하였으며, 본 연구에서는 이 근사의 개선된 형태인 Daniels (1987)의 결과를 다음과 같이 소개한다.

통계량 $V_n$이 누율생성함수 $K_n(\lambda)$를 가진다고 하자. 이때 $V_n$의 분포함수에 대한 안장점근사는 다음식으로 주어진다.

$$\Pr(V_n \le v) \approx \Phi(\omega) + \phi(\omega)\left\{\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\xi}\right\}, \quad v \ne E(V_n), \tag{2.2}$$

여기서 $\Phi(\cdot)$와 $\phi(\cdot)$는 표준정규분포의 분포함수와 밀도함수를 나타내고, $\omega$와 $\xi$는

$$\omega = \operatorname{sgn}\left(\hat{\lambda}\right)\left[2\left\{\hat{\lambda}x - K_n\left(\hat{\lambda}\right)\right\}\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad \xi = \hat{\lambda}\left\{K_n''\left(\hat{\lambda}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

이고, $\hat{\lambda}$는 안장점 방정식 $K_n'(\lambda) = v$의 해이다.

## 3. 이차형식에 대한 안장점근사

식 (1.1)의 이차형식의 분포함수에 대한 안장점근사를 수행하기 위해서는 식 (2.1)로부터 정의되는 누율생성함수의 1차, 2차 미분식이 요구된다. 이를 위해서 본 논문에서는 $A = \Omega^{-1}$인 경우와 일반적인 경우로 나누어 그 결과를 제시한다.

### 3.1. $A = \Omega^{-1}$인 경우

식 (1.1)에서 $A = \Omega^{-1}$인 경우의 이차형식을 편의상 $Q_1 = (X-a)'\Omega^{-1}(X-a)$이라 하자. 식 (2.1)로부터 $Q_1$의 적률생성함수는 다음과 같이 주어진다 (Gupta와 Huang, 2002).

$$M_{Q_1}(t) = \frac{2\exp\left\{t(1-2t)^{-1}a'\Omega^{-1}a\right\}}{(1-2t)^{\frac{p}{2}}}\Phi(A_t), \quad t \in R^1, \tag{3.1}$$

여기서

$$A_t = -\frac{2t\alpha'(1-2t)^{-1}a}{\sqrt{1+\alpha'\Omega\alpha/(1-2t)}}$$

이다.

아래의 정리 3.1은 식 (2.2)의 안장점근사에 요구되는 누율생성함수의 1차와 2차의 미분 결과이다. 정리 3.1은 다소 지루한 계산과정을 통해 정리된 식으로 그 증명 과정은 생략한다.

**정리 3.1** $Q_1$의 누율생성함수 $K_{Q_1}(t) = \log M_{Q_1}(t)$의 1, 2차 미분식은 다음과 같이 주어진다.

$$K_{Q_1}'(t) = \frac{p}{1-2t} + \frac{a'\Omega^{-1}a}{(1-2t)^2} + \frac{A_t'\phi(A_t)}{\Phi(A_t)},$$

$$K_{Q_1}''(t) = \frac{2p}{(1-2t)^2} + \frac{4\alpha'\Omega^{-1}a}{(1-2t)^3} + \frac{\phi(A_t)\left\{A_t''\Phi(A_t) - {A_t'}^2 A_t\Phi(A_t) - {A_t'}^2\phi(A_t)\right\}}{\Phi(A_t)^2},$$

여기서 $A_t'$과 $A_t''$은 다음과 같다.

$$A_t' = \frac{-2\alpha'a(1-2t)^{-2}}{\sqrt{1+\alpha'\Omega\alpha/(1-2t)}}\left\{1 - \frac{t\alpha'\Omega\alpha}{(1-2t)+\alpha'\Omega\alpha}\right\},$$

$$A_t'' = \frac{-2\alpha'a(1-2t)^{-3}}{\sqrt{1+\alpha'\Omega\alpha/(1-2t)}}\left\{4 - \frac{(2+4t)\alpha'\Omega\alpha}{(1-2t)+\alpha'\Omega\alpha} + \frac{3t\alpha'\Omega\alpha\alpha'\Omega\alpha}{(1-2t)^2[1+\alpha'\Omega\alpha/(1-2t)]^2}\right\}.$$

### 3.2. 일반적인 이차형식의 경우

이차형식의 가장 일반적인 형태인 식 (1.1)의 누율생성함수 $K_Q(t) = \log M_Q(t)$는 식 (2.1)로부터 다음과 같이 주어진다.

$$K_Q(t) = \log 2 - \frac{1}{2}\log|I - 2tA\Omega| + A_t + \log\Phi(-B_t), \tag{3.2}$$

여기서 $A_t$과 $B_t$는

$$A_t = a'\left[tA + 2t^2A\left(\Omega^{-1} - 2tA\right)^{-1}A\right]a, \qquad B_t = \frac{C_t}{D_t}$$

이고, $C_t$와 $D_t$는 다음과 같다.

$$C_t = 2t\alpha'\left(\Omega^{-1} - 2tA\right)^{-1}Aa, \qquad D_t = \sqrt{1 + \alpha'\left(\Omega^{-1} - 2tA\right)^{-1}\alpha}.$$

아래의 정리 3.2는 누율생성함수의 미분에 사용되는 정리이다.

**정리 3.2** 다음의 사실이 성립한다.

(a) $\log|I - 2tA\Omega| = -\mathrm{tr}[-\log(I - 2tA\Omega)]$.

(b) $\dfrac{d}{dt}\mathrm{tr}[-\log(I - 2tA\Omega)] = 2\mathrm{tr}\left\{(I - 2tA\Omega)^{-1}A\Omega\right\}$.

증명:

(a) Na와 Kim (2005)을 참고할 것.

(b)
$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\left[\frac{d}{dt}\{-\log(I - 2tA\Omega)\}\right] &= \mathrm{tr}\left(\frac{d}{dt}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(2tA\Omega)^r}{r}\right) \\
&= \mathrm{tr}\left\{2A\Omega + 2tA\Omega(2A\Omega) + (2tA\Omega)^2(2A\Omega) + \cdots\right\} \\
&= \mathrm{tr}\left\{(I - 2tA\Omega)^{-1}(2A\Omega)\right\} \\
&= 2\mathrm{tr}\left\{(I - 2tA\Omega)^{-1}A\Omega\right\}.
\end{aligned}$$

□

위의 정리 3.2를 이용하여 $K_Q(t)$의 1, 2차 미분식을 구하면 정리 3.3과 정리 3.4와 같이 주어진다. 증명과정은 매우 지루하므로 그 결과만을 소개한다.

**정리 3.3** $Q$의 누율생성함수 $K_Q(t)$의 1차 미분식은 다음과 같이 주어진다.

$$K_Q{}'(t) = \left[(I - 2tA\Omega)^{-1}A\Omega\right] + A_t' - \frac{B_t'\phi(-B_t)}{\Phi(-B_t)},$$

여기서 $A_t'$과 $B_t'$은

$$\begin{aligned}
A_t' &= \alpha'\left[A + \left\{4tA + 4t^2A(\Omega^{-1} - 2tA)^{-1}A\right\}\left(\Omega^{-1} - 2tA\right)^{-1}A\right]a, \\
B_t' &= \frac{C_t'D_t - C_tD_t'}{D_t{}^2}
\end{aligned}$$

이고, $C_t'$과 $D_t'$은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
C_t' &= 2\alpha'\left(I + 2t(\Omega^{-1} - 2tA)^{-1}A\right)(\Omega^{-1} - 2tA)^{-1}Aa, \\
D_t' &= \left(1 + \alpha'(\Omega^{-1} - 2tA)^{-1}\alpha\right)^{-\frac{1}{2}}\alpha'(\Omega^{-1} - 2tA)^{-1}A\left(\Omega^{-1} - 2tA\right)^{-1}\alpha.
\end{aligned}$$

**Table 4.1.** Simulation design for the approximation of the distribution of quadratic forms

| Quadratic forms | Dimension | $\Omega$ | $\alpha'$ | $a'$ | $A$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $Q_1$ | 2 | $\begin{pmatrix} 1 & 0.3 \\ 0.3 & 1 \end{pmatrix}$ | (2, 5) | (2, 3) | $\Omega^{-1}$ |
| $Q$ | 2 | $\begin{pmatrix} 1 & 0.3 \\ 0.3 & 1 \end{pmatrix}$ | (2, 5) | (2, 3) | $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ |

**정리 3.4** $Q$의 누율생성함수 $K_Q(t)$의 2차 미분식은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} K_Q^{''}(t) &= 2\mathrm{tr}\left[(I-2tA\Omega)^{-1}A\Omega\left(\Omega^{-1}-2tA\right)^{-1}A\Omega\right] + a'\left[\left(4A+16tA\left(\Omega^{-1}-2tA\right)^{-1}A\right.\right. \\ &\quad \left.\left. +6t^2A\left(\Omega^{-1}-2tA\right)^{-1}A\left(\Omega^{-1}-2tA\right)^{-1}A\right)\left(\Omega^{-1}-2tA\right)^{-1}A\right]a + \frac{d^2}{dt^2}\left\{\log\Phi\left(-B_t\right)\right\} \\ &\quad - \frac{\left\{\left(B_t^{''}-B_tB_t^{'2}\right)\phi(-B_t)\Phi(-B_t)\right\}+B_t^{'2}\phi^2(-B_t)}{\Phi^2(-B_t)}, \end{aligned}$$

여기서 $B_t^{''}$은

$$B_t^{''} = \frac{C_t^{''}D_t - C_tD_t^{''}}{{D_t}^2} - \frac{2\left(C_t^{'}D_t - C_tD_t^{'}\right)D_t^{'}}{{D_t}^3}$$

이고, $C_t^{''}$과 $D_t^{''}$은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} C_t^{''} &= 2\alpha'\left\{4I+8t\left(\Omega^{-1}-2tA\right)^{-1}A\right\}\left(\Omega^{-1}-2tA\right)^{-1}A\left(\Omega^{-1}-2tA\right)^{-1}Aa, \\ D_t^{''} &= -\left(1+\alpha'\left(\Omega^{-1}-2tA\right)^{-1}\alpha\right)^{-\frac{3}{2}}\alpha'\left(\Omega^{-1}-2tA\right)^{-1}A\left(\Omega^{-1}-2tA\right)^{-1}\alpha \\ &\quad \times\alpha'\left(\Omega^{-1}-2tA\right)^{-1}A\left(\Omega^{-1}-2tA\right)^{-1}\alpha \\ &\quad +4\left(1+\alpha'\left(\Omega^{-1}-2tA\right)^{-1}\alpha\right)^{-\frac{1}{2}}\alpha'\left(\Omega^{-1}-2tA\right)^{-1}A\left(\Omega^{-1}-2tA\right)^{-1}A\left(\Omega^{-1}-2tA\right)^{-1}\alpha. \end{aligned}$$

## 4. 모의실험과 실증 예제

### 4.1. 모의실험

앞 절에서 유도된 결과를 이용하여 $a \neq 0$인 두 가지 유형의 이차형식 $Q_1(A=\Omega^{-1}$인 경우)과 $Q$의 분포함수에 대한 안장점근사를 실시한다. 모의실험은 편의상 2차원의 경우에 대해서 실시하기로 한다. 아래의 Table 4.1은 모의실험에 사용된 조건을 나타낸다.

아래의 Table 4.2는 이차형식 통계량 $Q_1$과 $Q$의 분포함수에 대한 안장점근사의 결과를 제시한 것이다. 안장점근사의 정도를 확인하기위하여 10만 번의 난수발생에 기초한 모의실험 결과(Sim.Exact)를 함께 제시하였다. 각 표에서 제시된 Normal, Saddlepoint, Sim.Exact는 다음을 의미한다.

- Normal: 식 (2.2)의 첫 항을 사용한 정규근사.
- Saddlepoint: 식 (2.2)에 의한 안장점근사.
- Sim.Exact: 10만 번의 모의실험의 수행 결과.

위의 모의실험 결과에서 알 수 있듯이 안장점근사의 결과가 10만 번의 모의 실험을 통한 정확한 값과 매우 근사함을 알 수 있다. 따라서 왜정규 분포 기반 이차형식의 분포함수의 추정에 안장점근사를 사용하는 것이 매우 유용함을 알 수 있다. 특히 안장점근사의 결과가 극단의 꼬리부분에서도 정확도가 뛰어나므로 정밀한 추론이 요구되는 상황에서 더욱 효과적이다.

**Table 4.2.** Saddlepoint approximation to the distribution function of quadratic forms in multivariate skew-normal distribution

| $P(Q_1 < q)$ | | | | $P(Q < q)$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q$ | Normal | Saddlepoint | Sim.Exact | $q$ | Normal | Saddlepoint | Sim.Exact |
| 0.0 | 0.0088 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0 | 0.0410 | 0.0000 | 0.0001 |
| 0.5 | 0.0135 | 0.0043 | 0.0044 | 2.0 | 0.0571 | 0.0173 | 0.0174 |
| 1.0 | 0.0203 | 0.0121 | 0.0127 | 4.0 | 0.0778 | 0.0451 | 0.0460 |
| 1.5 | 0.0298 | 0.0238 | 0.0248 | 6.0 | 0.1038 | 0.0813 | 0.0836 |
| 2.0 | 0.0426 | 0.0396 | 0.0407 | 8.0 | 0.1356 | 0.1259 | 0.1293 |
| 2.5 | 0.0596 | 0.0600 | 0.0624 | 10.0 | 0.1735 | 0.1779 | 0.1794 |
| 3.0 | 0.0815 | 0.0853 | 0.0887 | 12.0 | 0.2176 | 0.2359 | 0.2364 |
| 3.5 | 0.1090 | 0.1158 | 0.1200 | 14.0 | 0.2674 | 0.2984 | 0.2973 |
| 4.0 | 0.1426 | 0.1519 | 0.1559 | 16.0 | 0.3225 | 0.3635 | 0.3626 |
| 4.5 | 0.1825 | 0.1936 | 0.1971 | 18.0 | 0.3817 | 0.4294 | 0.4277 |
| 5.0 | 0.2288 | 0.2408 | 0.2431 | 20.0 | 0.4439 | 0.4943 | 0.4939 |
| 5.5 | 0.2811 | 0.2931 | 0.2912 | 22.0 | 0.5075 | 0.5558 | 0.5558 |
| 6.0 | 0.3386 | 0.3501 | 0.3447 | 24.0 | 0.5709 | 0.6162 | 0.6143 |
| 6.5 | 0.4000 | 0.4109 | 0.4006 | 26.0 | 0.6325 | 0.6710 | 0.6701 |
| 7.0 | 0.4641 | 0.4747 | 0.4584 | 28.0 | 0.6909 | 0.7208 | 0.7206 |
| 7.5 | 0.5291 | 0.5404 | 0.5182 | 30.0 | 0.7448 | 0.7655 | 0.7669 |
| 8.0 | 0.5933 | 0.6065 | 0.5792 | 32.0 | 0.7933 | 0.8048 | 0.8067 |
| 8.5 | 0.6551 | 0.6715 | 0.6406 | 34.0 | 0.8359 | 0.8390 | 0.8415 |
| 9.0 | 0.7130 | 0.7330 | 0.7037 | 36.0 | 0.8724 | 0.8684 | 0.8697 |
| 9.5 | 0.7659 | 0.7889 | 0.7615 | 38.0 | 0.9028 | 0.8933 | 0.8944 |
| 10.0 | 0.8129 | 0.8371 | 0.8142 | 40.0 | 0.9275 | 0.9142 | 0.9160 |
| 10.5 | 0.8535 | 0.8765 | 0.8606 | 42.0 | 0.9471 | 0.9315 | 0.9329 |
| 11.0 | 0.8878 | 0.9075 | 0.8971 | 44.0 | 0.9622 | 0.9457 | 0.9467 |
| 11.5 | 0.9159 | 0.9312 | 0.9252 | 46.0 | 0.9736 | 0.9573 | 0.9581 |
| 12.0 | 0.9383 | 0.9488 | 0.9463 | 48.0 | 0.9820 | 0.9666 | 0.9670 |
| 12.5 | 0.9558 | 0.9619 | 0.9610 | 50.0 | 0.9880 | 0.9741 | 0.9746 |
| 13.0 | 0.9691 | 0.9716 | 0.9718 | 52.0 | 0.9922 | 0.9800 | 0.9803 |
| 13.5 | 0.9788 | 0.9788 | 0.9793 | 54.0 | 0.9950 | 0.9846 | 0.9850 |
| 14.0 | 0.9859 | 0.9841 | 0.9849 | 56.0 | 0.9969 | 0.9883 | 0.9884 |
| 14.5 | 0.9908 | 0.9880 | 0.9886 | 58.0 | 0.9981 | 0.9911 | 0.9913 |

### 4.2. 실증 예제: VaR 추정

Value at Risk(VaR)은 금리, 주가, 환율 등 기초적 시장가격에 대해 주어진 신뢰수준 하에서 목표기간 동안 발생 가능한 최대손실금액을 의미하는 하나의 위험측도로, 다음과 같이 정의된다.

$$\alpha = \int_{\mathrm{VaR}_\alpha}^{\infty} f(x)\,dx.$$

위 식은 다음의 식으로 표현될 수 있다.

$$P(X < \mathrm{VaR}_\alpha) = F(\mathrm{VaR}_\alpha) = 1 - \alpha,$$

여기서 $F(\cdot)$는 수익률 $X$의 분포함수이다.

**Table 4.3.** Experimental designs for the estimation of Value at Risk(VaR)

| Design | $\Omega$ | $\alpha'$ | $a'$ | $A$ |
|---|---|---|---|---|
| I | $\begin{pmatrix} 1 & 0.3 \\ 0.3 & 1 \end{pmatrix}$ | (1, 3) | (1, 2) | $\Omega^{-1}$ |
| II | $\begin{pmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.7 & 1 \end{pmatrix}$ | (1, 3) | (0, 0) | $\begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ |

**Table 4.4.** Estimation of Value at Risk(VaR) via saddlepoint approximation

| $\alpha$ | Design I | | | Design II | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Sim.Exact | Saddlepoint | Normal | Sim.Exact | Saddlepoint | Normal |
| 0.050 | 6.7512 | 6.7076 | 6.4337 | 11.5361 | 11.4089 | 9.8474 |
| 0.025 | 7.9097 | 7.9123 | 7.0812 | 15.0497 | 14.9742 | 11.1784 |
| 0.010 | 9.5879 | 9.5539 | 7.8341 | 19.7663 | 19.8254 | 12.7259 |
| 0.005 | 10.7432 | 10.8243 | 8.3468 | 23.3452 | 23.5688 | 13.7796 |
| 0.001 | 13.9795 | 13.8395 | 9.4038 | 32.3841 | 32.4254 | 15.9523 |

본 예제에서는 $X$가 다변량 왜정규분포 기반의 이차형식 통계량으로 정의될 때, 위험측도 VaR을 본 논문에서 제시한 안장점근사로 추정한다. Table 4.3과 Table 4.4는 각각 VaR 추정을 한 실험계획과 그 결과를 나타낸다. Table 4.4로부터 안장점근사의 결과가 정규근사와는 매우 다른 결과를 제시할 뿐 아니라, 10만 번의 모의실험을 통한 정확한 값(Sim.Exact)에 매우 근사함을 알 수 있다.

## 5. 결론

Kuonen (1999)은 다변량 정규분포 가정하에서 정의되는 이차형식의 분포함수에 대한 안장점근사를 수행한 바 있다. 본 논문은 Kuonen (1999)의 결과를 다변량 왜정규분포의 경우로 확장하였다. 다변량 왜정규분포는 다변량 정규분포에 왜도모수가 추가된 모형으로 다변량 정규분포가 가지는 여러 가지 성질을 보존(preserve)하는 장점을 가진다. 본 연구에서도 밝혀진 바, 다변량 왜정규분포하에서 특별한 형태($a = 0$)의 이차형식의 분포는 다변량 정규분포에서와 동일함을 확인하였다. 또한, 본 논문에서 보다 일반적인 경우($a \neq 0$)의 이차형식의 분포함수에 대해 안장점근사를 통해 매우 정확한 결과를 얻을 수 있음을 모의실험을 통해 확인하였다. 또한 본 논문에서 다룬 이차형식의 분포함수에 대한 근사는 금융 분야에서 금융자산의 이차 포트폴리오(quadratic portfolios)의 위험관리를 위한 VaR과 Expected Shortfall(ES) 측도 등의 계산에 활용될 수 있다.

## References


Azzalini, A. and Capitanio, A. (1999). Statistical applications of the multivariate skew normal distributions, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **61**, 579–602.

Azzalini, A. and Dalla Valle, A. (1996). The multivariate skew-normal distribution, *Biometrika*, **83**, 715–726.

Daniels, H. E. (1954). Saddlepoint approximations in statistics, *The Annals of Mathematical Statistics*, **25**, 631–650.

Daniels, H. E. (1987). Tail probability approximations, *International Statistical Review*, **55**, 37–48.

Genton, M. G., He, L., and Liu, X. (2001). Moments of skew-normal random vectors and their quadratic forms, *Statistics and Probability Letters*, **51**, 319–325.

Gupta, A. K. and Huang, W. J. (2002). Quadratic forms in skew normal variates, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **273**, 558–564.

Huang W. J. and Chen Y. H. (2006). Quadratic forms of multivariate skew normal symmetric distributions, *Statistics and Probability Letters*, **76**, 871–879.

Imhof, J. P. (1961). Computing the distribution of quadratic forms in normal variables, *Biometrika*, **48**, 419–426.

Kuonen, D. (1999). Saddlepoint approximations for distributions of quadratic forms in normal variables, *Biometrika*, **86**, 929–935.

Loperfido, N. (2001). Quadratic forms of skew-normal random vectors, *Statistics and Probability Letters*, **54**, 381–387.

Lugannani, R. and Rice, S. (1980). Saddlepoint approximation for the distribution of the sum of independent random variables, *Advanced Applied Probability*, **12**, 475–490.

Na, J. H. (2014). Saddlepoint approximation to the linear combination based on multivariate skew-normal distribution, *The Korean Journal of Applied Statistics*, **27**, 809–818.

Na, J. H. and Kim, J. S. (2005). Saddlepoint approximations to the distribution function of non-homogeneous quadratic forms, *The Korean Journal of Applied Statistics*, **18**, 183–196.

Wang, T., Baokun, L. and Gupta, A. K. (2009). Distribution of quadratic forms under skew normal settings, *Journal of Multivariate Analysis*, **100**, 533–545.

# 다변량 왜정규분포 기반 이차형식의 분포함수에 대한 안장점근사

나종화[a,1]

[a]충북대학교 정보통계학과

(2016년 2월 3일 접수, 2016년 3월 14일 수정, 2016년 4월 25일 채택)

**요 약**

이차형식 통계량의 분포함수에 대한 연구는 주로 다변량 정규분포의 가정하에서 진행되어 왔다. 최근 다변량 정규분포를 포함하는 다변량 왜정규분포에 대한 연구가 활발하다. 본 논문에서는 다변량 왜정규분포의 가정하에서 이차형식 통계량의 분포함수에 대한 근사를 다루었다. 근사의 방법으로는 소표본에서도 정확도가 뛰어난 근사법으로 알려진 안장점근사를 사용하였으며, 모의실험을 통해 그 정도를 확인하였다.

주요용어: 이차형식, 다변량 왜정규분포, 안장점근사, 누율생성함수

이 논문은 2014학년도 충북대학교 학술연구지원사업에 의하여 연구되었음.

[1](28644) 충북 청주시 서원구 충대로 1, 충북대학교 정보통계학과. E-mail: cherin@cbnu.ac.kr