

Diffraction and Radiation of Waves by Array of Multiple Buoys

Il-Hyoung Cho*

*Department of Ocean System Engineering, Jeju National University, Jeju, Korea

다수 부체 배열에 의한 파의 회절과 방사

조일형*

*제주대학교 해양시스템공학과

KEY WORDS: interaction theory 상호작용 이론, eigenfunction expansion method 고유함수전개법, multi-buoy 다수 부체, diffraction 회절, radiation 방사

ABSTRACT: The diffraction and radiation of linear waves by an array of truncated floating multiple buoys are solved using the interaction theory based on a matched eigenfunction expansion method (MEEM). The interaction processes between multiple buoys are very complex and numerous, because the scattered and radiated waves from each buoy affect the others in the array. Our primary aim is therefore to construct the rigorous wave exciting forces and hydrodynamic forces to deal with the problem of multiple interactions. This present method is applied to a square array of four buoys with two incidence angles, and the results are given for the wave excitation forces on each buoy, heave RAO for each buoy heaving independently, and wave elevations around the buoys and wave run-up. The analytical solutions are in good agreement with the numerical solutions obtained from commercial code (WAMIT).

1. 서 론

많은 종류의 해양구조물의 하부 구조는 다수 부체가 배열된 형태로 이루어져 있다. 반 잠수식 시추선, 다수 파력발전장치로 구성된 에너지 농장, 부교, 부유식 공항 등이 대표적인 예이다. 따라서 다수 부체로 구성된 하부 구조물의 유체역학적 특성을 정확히 파악하기 위해서는 다수 부체의 상호작용 문제를 풀어야 한다. 단일 부체와 달리 다수 부체 주변에서의 파계는 자체의 회절파와 방사파 뿐만 아니라 주변의 다른 부체로부터의 산란파와 방사파가 더해지는 다중 산란(Multiple scattering)으로 매우 복잡하다. 따라서 다수 부체간의 상호작용 문제는 수학적으로 매우 복잡할 뿐만 아니라 많은 계산시간을 요구한다.

단일 부체에 대한 회절문제는 Garrett(1971)에 의해, 방사문제는 Tung(1979)과 Cho and Kweon(2011)에 의해 해석되었다. 다수 부체가 배열된 경우 일어나는 회절문제는 Kagemoto and Yue(1986)에 의해 처음으로 다루어졌다. Kagemoto and Yue(1986)가 제안한 상호작용 이론(Interaction theory)은 단일 부체에 대한 해석해가 존재할 때 적용이 가능하다. Murai et al.(1999)는 다수 부체로 지지되는 대형 부유 구조물에 Kagemoto and Yue(1986)가 제안한 상호작용 이론을 적용하였다. Linton and

Evans(1990)는 해저면에 고정된 원기둥의 다수 배열에 대한 회절문제를 풀었다. Yilmaz and Incecik(1998)는 Kagemoto and Yue(1986)의 상호작용 이론을 일정한 홀수를 갖는 원기둥의 다수 배열 문제에 적용하여 파기진력과 동유체력을 구하였다. Yilmaz et al.(2001)는 4개의 원형 부체로 지지되는 반 잠수식 해양구조물에 대한 회절과 방사문제를 풀어 구조물 주변의 수면 변위를 구하고 실험결과와 비교하였다. Siddorn and Taylor (2008)은 Kagemoto and Yue(1986)의 상호작용 이론에 기반을 둔 이론을 사용하여 다수 배열된 원형 부체에 작용하는 파기진력과 운동변위를 구하였다. Child and Venugopal(2010)는 점 흡수식 파력발전장치가 여러 개 배열되어 있는 경우에 파와 다수 부체 사이의 상호작용 문제를 해석하여 파력발전장치의 최적 배열을 연구하였다.

본 연구에서는 다수 원형 부체에 대한 회절문제와 방사문제를 풀어 부체 간의 상호작용을 고려한 파기진력과 운동변위 그리고 다수 부체 주변의 수면변위를 구하였다. 이를 위하여 고유함수전개법(Matched eigenfunction expansion method)에 기초를 둔 Child and Venugopal(2010)의 해석방법을 사용하였다. 먼저 단일 원기둥에 대한 회절문제와 방사문제를 풀어 해석해를 구하고 이를 산란 방정식과 결합하여 다수 원형 부체 간의

Received 4 March 2016, revised 21 May 2016, accepted 24 June 2016

Corresponding author Il-Hyoung Cho: +82-064-754-3482, cho0904@jejunu.ac.kr

© 2016, The Korean Society of Ocean Engineers

상호작용 효과를 고려한 해석이론을 정립하였다. 해석결과와 타당성을 검증하기 위하여 상용 수치코드인 WAMIT(Wave analysis MIT)의 수치해석 결과와 비교하였다.

2. 문제의 정식화

본 연구에서는 반경이 a_j 이고, 흘수가 d_j 인 N_B 개의 원형 부체 ($j=1,2,\dots,N_B$)가 일정한 수심(h) 위에 배열되어 있을 때 다수 부체간의 상호작용을 고려한 각 부체에 작용하는 수직방향 파기진력과 수직 운동변위를 구하였다. Fig. 1(b)와 같이 공간상 고정된 좌표계 (X, Y, z)와 N_B 개의 다수 부체의 중심에 고정된 좌표계 $(r_j, \theta_j, z), j=1,2,\dots,N_B$ 를 도입한다. j 번째 부체의 중심의 좌표는 (x_j, y_j) 이다. i 번째 부체의 중심에 대한 j 번째 부체의 중심의 상대 위치는 (R_{ij}, α_{ij}) 로 표현할 수 있다(Fig 1(b) 참조). 선형 포텐셜 이론을 가정하여 속도포텐셜을 도입한다. 속도포텐셜을 시간과 공간의 함수로 분리하면 $\phi(r, \theta, z, t) = Re\{\phi(r, \theta, z)e^{-i\omega t}\}$ 로 쓸 수 있다. 속도포텐셜의 공간함수 $\phi(r, \theta, z)$ 는 아래와 같은 경계치 문제를 만족한다.

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial r_j} = 0, \quad \text{on } r_j = a_j, -d_j \leq z \leq 0, \quad j=1,2,\dots,N_B \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = w_j, \quad \text{on } z = -d_j, 0 \leq r_j \leq a_j, \quad j=1,2,\dots,N_B \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad \text{on } z = -h \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \phi = 0, \quad \text{on } z = 0, r_j \geq a_j, \quad j=1,2,\dots,N_B \end{cases} \quad (1)$$

여기서 g 는 중력가속도이며, $w_j (= -i\omega \xi_j)$ 는 j 번째 부체의 수직 운동속도로 복소수 값을 갖는다. 속도포텐셜 $\phi(r, \theta, z)$ 은 입사포텐셜(ϕ^I)과 산란포텐셜(ϕ^S) 그리고 방사포텐셜(ϕ^R)의 합으로 표현된다. 이때 산란포텐셜과 방사포텐셜은 아래와 같은 방사경계조건식을 만족한다.

$$\lim_{k_1 r_j \rightarrow \infty} \sqrt{r_j} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r_j} - ik_1 \phi \right) = 0 \quad (2)$$

여기서 k_1 는 입사파의 파수이다.

2.1 입사포텐셜

입사파가 진폭(A)과 주파수(ω)를 가지고 x 축의 양의 방향과 β 의 입사각도를 이루며 진행할 때 j 번째 원형 부체의 중심에 고정된 좌표계 (r_j, θ_j, z) 에서 입사포텐셜을 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\phi_j^I = -\frac{igA}{\omega} \frac{\cosh k_1(z+h)}{\cosh k_1 h} A_j \sum_{n=-\infty}^{\infty} (i)^n J_n(k_1 r_j) e^{in(\theta_j - \beta)} \quad (3)$$

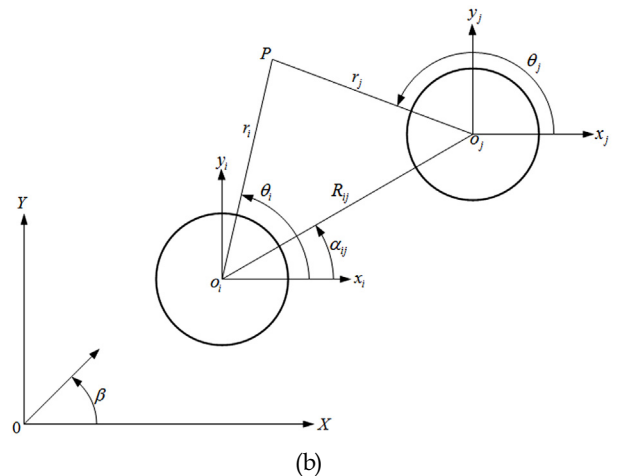
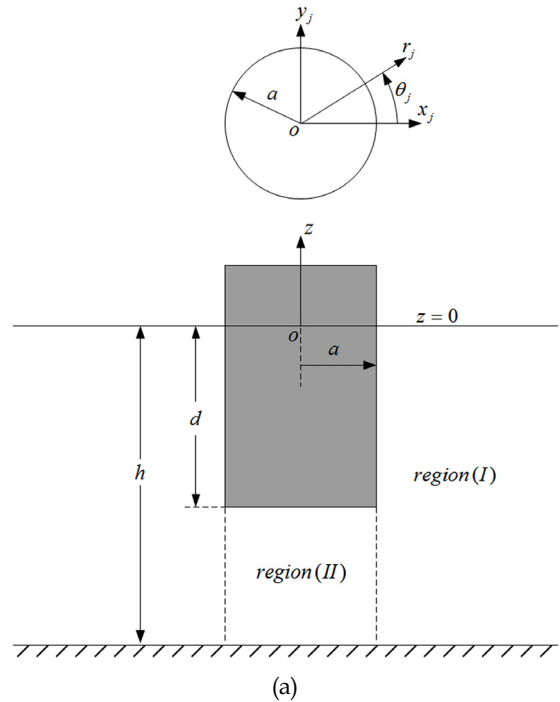


Fig. 1 (a) Side view of buoy and (b) plan view of multiple buoys and coordinate systems

여기서 $A_j (= e^{ik_1(x_j \cos \beta + y_j \sin \beta)})$ 는 공간 고정 좌표계(OXY)의 원점과 j 번째 부체의 중심(x_j, y_j)간의 위상차를 나타내는 함수이다. 식 (3)에 나타난 입사포텐셜을 공간함수와 계수로 분리하여 벡터식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\phi_j^I = -\frac{igA}{\omega} \mathbf{a}_j^T \boldsymbol{\psi}_j^I \quad (4)$$

여기서 윗첨자 T 는 전치행렬을 나타낸다. 벡터식 \mathbf{a}_j 와 $\boldsymbol{\psi}_j^I$ 의 원소들은 다음과 같다.

$$(\mathbf{a}_j)_m^n = \begin{cases} (i)^n A_j e^{-in\beta}, & m=0 \\ 0, & m \geq 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$(\psi_j^f)_m^n = \begin{cases} J_n(k_1 r_j) e^{in\theta_j} \frac{N_{10}}{\cosh k_1 h} f_{10}(z), & m=0 \\ I_n(k_{1m} r_j) e^{in\theta_j} f_{1m}(z), & m \geq 1 \end{cases} \quad (6)$$

여기서 J_n, I_n 는 각각 제1종 Bessel함수와 변형된 Bessel함수를 나타낸다.

식 (6)에서 고유값($k_{10} = -ik_1, k_{1m}, m=1, 2, \dots$)은 선형분산식 ($k_1 \tanh k_1 h = \omega^2/g, k_{1m} \tanh k_{1m} h = -\omega^2/g, m=1, 2, \dots$)을 만족하며, 고유함수 $f_{1m}(z)$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$f_{1m}(z) = N_{1m}^{-1} \cos k_{1m}(z+h), \quad m=0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

$$(N_{1m})^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sin 2k_{1m} h}{2k_{1m} h} \right).$$

식 (7)에 정의된 고유함수 $f_{1m}(z)$ 는 아래와 같은 직교성 (Orthogonality)을 만족한다.

$$\frac{1}{h} \int_{-h}^0 f_{1m}(z) f_{1n}(z) dz = \delta_{mn}, \quad (8)$$

여기서 δ_{mn} 는 $n=m$ 일 때 1이고, $n \neq m$ 일 때 0의 값을 갖는 Kronecker-Delta함수이다.

2.2 산란포텐셜

산란포텐셜은 고정된 부체에 의한 입사파의 산란문제를 풀어 구할 수 있다. 산란문제에 고유함수전개법을 적용하기 위하여 유체영역을 Fig. 1(a)와 같이 영역 (I)과 영역 (II)로 나눈다. 따라서 영역 (I)은 $r_j \geq a_j, -h \leq z \leq 0$, 영역 (II)은 $0 \leq r_j \leq a_j, -h \leq z \leq -d_j$ 으로 정의된다.

영역 (I)의 산란포텐셜은 Laplace방정식과 함께 자유표면, 해저면, 방사 경계조건식을 만족한다. i 번째 부체 주변에서의 산란포텐셜은 다음과 같다.

$$\phi_i^S = -\frac{igA}{\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{im}^n \frac{K_n(k_{1m} r_i)}{K_n(k_{1m} a_i)} f_{1m}(z) e^{in\theta_i}, \quad (9)$$

여기서 제2종 변형된 Bessel함수 K_n 는 $m=0$ 일 때

$$K_n(-ix) = \frac{1}{2} \pi^{n+1} H_n(x) \text{이며, } H_n \text{는 제1종 Hankel함수이다.}$$

입사포텐셜과 마찬가지로 산란포텐셜을 공간함수와 계수로 분리하여 벡터식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\phi_i^S = -\frac{igA}{\omega} \mathbf{A}_i^T \boldsymbol{\psi}_i^S \quad (10)$$

여기서 공간함수 $\boldsymbol{\psi}_i^S$ 의 원소들은 다음과 같다.

$$(\psi_i^S)_m^n = \frac{K_n(k_{1m} r_i)}{K_n(k_{1m} a_i)} f_{1m}(z) e^{in\theta_i}, \quad m \geq 0 \quad (11)$$

N_B 개의 다수 부체들 간의 상호작용을 고려하기 위하여 i 번째 부체에 의해 산란된 파는 나머지 부체($j=1, 2, \dots, N_B, i \neq j$)에게는 입사파로 작용한다. 산란포텐셜 $(\psi_i^S)_m^n$ 을 입사포텐셜 $(\psi_j^f)_m^n$ 로 표현하기 위하여 아래 주어진 Graf의 Bessel함수의 덧셈정리 (Additional theorem)를 사용한다(Linton and Evans, 1990; Maniar and Newman, 1997; Kim, 1993).

$$m=0 \quad e^{in\theta_i} H_n(k_1 r_i) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(k_1 r_j) H_{n+l}(k_1 R_{ij}) e^{i(n+l)\alpha_{ij}} e^{il(\pi-\theta_j)} \quad (12)$$

$$m \geq 1 \quad e^{in\theta_i} K_n(k_{1m} r_i) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} I_l(k_{1m} r_j) K_{n+l}(k_{1m} R_{ij}) e^{i(n+l)\alpha_{ij}} e^{il(\pi-\theta_j)}$$

식 (12)을 이용하여 $i \neq j$ 인 모든 부체에 대하여 $(\psi_i^S)_m^n$ 를 $(\psi_j^f)_m^n$ 로 표현하면 다음과 같다.

$$(\boldsymbol{\psi}_i^S) = \mathbf{T}_{ij} (\boldsymbol{\psi}_j^f) \quad (13)$$

여기서 전달함수 \mathbf{T}_{ij} 의 원소는 다음과 같다.

$$(\mathbf{T}_{ij})_{mm}^{nl} = \begin{cases} \frac{\cosh k_1 h}{N_{10} H_n(k_1 a_i)} H_{n-l}(k_1 R_{ij}) e^{i\alpha_{ij}(n-l)}, & m=0 \\ \frac{K_{n-l}(k_{1m} R_{ij})}{K_n(k_{1m} a_i)} e^{i\alpha_{ij}(n-l)} (-1)^l, & m \geq 1 \end{cases}$$

식 (13)을 식 (10)에 대입하면 $i \neq j$ 일 때 i 번째 부체에 의한 산란된 파는 j 번째 부체에 입사파로 작용함을 나타내는 산란포텐셜을 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\phi_{ij}^S = -\frac{igA}{\omega} \mathbf{A}_i^T \mathbf{T}_{ij} \boldsymbol{\psi}_j^f \quad (14)$$

i 번째 부체의 영역 (II)에서의 속도포텐셜은 변수분리법을 사용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\phi_i^D = -\frac{igA}{\omega} \tilde{\mathbf{A}}_i^T \tilde{\boldsymbol{\psi}}_i^D, \quad 0 \leq r_i \leq a_i, -h \leq z \leq -d_i \quad (15)$$

식 (15)의 공간함수 $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_i^D$ 의 원소는 다음과 같다.

$$(\tilde{\boldsymbol{\psi}}_i^D)_m^n = \begin{cases} \left(\frac{r_i}{a_i} \right)^{|n|} e^{in\theta_i}, & m=0 \\ 2 \frac{I_n(\lambda_m^i r_i)}{I_n(\lambda_m^i a_i)} \cos \lambda_m^i(z+h) e^{in\theta_i}, & m \geq 1 \end{cases} \quad (16)$$

여기서 $\lambda_m^i = m\pi/(h-d_i)$ 는 i 번째 부체의 영역 (II)에서의 고유값이다.

2.3 방사포텐셜

방사포텐셜은 입사파가 없는 상태에서 부체의 수직운동으로 생성된 파형을 나타내는 속도포텐셜이다. i 번째 부체의 수직운동에 의한 영역 (I)의 방사포텐셜은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\phi_i^R &= -\frac{igA}{\omega} \hat{\xi}_i \sum_{m=0}^{\infty} R_{im} \frac{K_0(k_{1m} r_i)}{K_0(k_{1m} a_i)} f_{1m}(z) \\ &= -\frac{igA}{\omega} \hat{\xi}_i \mathbf{R}_i^T \boldsymbol{\psi}_i^S, \quad r_i \geq a_i\end{aligned}\quad (17)$$

여기서 $\hat{\xi}_i (= \xi_i/A)$ 는 무차원화된 수직운동의 복소진폭이다.

산란포텐셜과 마찬가지로 $i \neq j$ 일 때 i 번째 부체의 수직운동으로 생성된 방사파는 나머지 부체($j=1, 2, \dots, N_B, i \neq j$)에 입사파로 작용한다. 2.2절과 동일한 방법으로 Graf의 덧셈정리 식 (12)을 이용하여 식 (17)을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\phi_i^R|_j = -\frac{igA}{\omega} \hat{\xi}_i \mathbf{R}_i^T \mathbf{T}_{ij} \boldsymbol{\psi}_j^I, \quad r_i \geq a_i \quad (18)$$

같은 방법으로 i 번째 부체의 영역 (II)에서의 방사포텐셜은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\phi_i^R &= -\frac{igA}{\omega} \hat{\xi}_i \left[\tilde{\psi}_i^P + \tilde{R}_{i0} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{R}_{im} \frac{I_0(\lambda_m^i r_i)}{I_0(\lambda_m^i a_i)} \cos \lambda_m^i(z+h) \right] \\ &= -\frac{igA}{\omega} \hat{\xi}_i [\tilde{\psi}_i^P + \tilde{\mathbf{R}}_i^T \tilde{\boldsymbol{\psi}}_i^D], \quad 0 \leq r_i \leq a_i\end{aligned}\quad (19)$$

여기서 $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_i^D = (\tilde{\psi}_i^D)_m^0$ 이며, $\tilde{\psi}_i^P = \frac{\omega^2}{2g(h-d_i)} \left[(z+h)^2 - \frac{r_i^2}{2} \right]$ 는 영역 (II)의 특별해이다.

2.4 산란 방정식

j 번째 부체에 입사파로 작용하는 속도포텐셜은 먼 외해로부터 들어오는 순수한 입사포텐셜과 자신을 제외한 나머지 부체들에 의한 산란포텐셜과 방사포텐셜의 합으로 표현할 수 있다.

$$\phi_j^I = -\frac{igA}{\omega} \left[\mathbf{a}_j^T + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N_B} (\mathbf{A}_i + \hat{\xi}_i \mathbf{R}_i)^T \mathbf{T}_{ij} \right] \boldsymbol{\psi}_j^I \quad (20)$$

식 (20)의 입사파의 계수 $\left[\mathbf{a}_j^T + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N_B} \mathbf{T}_{ij}^T (\mathbf{A}_i + \hat{\xi}_i \mathbf{R}_i) \right]$ 와 식 (10)의

산란파의 계수 \mathbf{A}_i 사이에는 회절 전달 행렬(Diffraction transfer matrix) \mathbf{B}_j 에 의해 아래와 같은 관계식이 성립한다.

$$\mathbf{A}_j = \mathbf{B}_j \left[\mathbf{a}_j^T + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N_B} \mathbf{T}_{ij}^T (\mathbf{A}_i + \hat{\xi}_i \mathbf{R}_i) \right], \quad j=1, 2, \dots, N_B \quad (21)$$

여기서 회절 전달 행렬 \mathbf{B}_j 와 \mathbf{R}_i 는 단일 원기둥에 대한 회절문제와 방사문제를 풀어 구할 수 있다(부록 A, B 참조).

영역 (II)에 대해서도 같은 방법이 적용된다.

$$\tilde{\mathbf{A}}_j = \tilde{\mathbf{B}}_j \left[\mathbf{a}_j^T + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N_B} \mathbf{T}_{ij}^T (\mathbf{A}_i + \hat{\xi}_i \mathbf{R}_i) \right], \quad j=1, 2, \dots, N_B \quad (22)$$

2.5 운동 방정식

j 번째 부체의 영역 (II)에서의 속도포텐셜은 회절포텐셜과 방사포텐셜의 합으로 아래와 같이 표현된다.

$$\phi_j = -\frac{igA}{\omega} \left\{ \left[\mathbf{a}_j^T + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N_B} (\mathbf{A}_i + \hat{\xi}_i \mathbf{R}_i)^T \mathbf{T}_{ij} \right] \tilde{\mathbf{B}}_j^T \tilde{\boldsymbol{\psi}}_j^D + \hat{\xi}_j (\tilde{\psi}_j^P + \tilde{\mathbf{R}}_j^T \tilde{\boldsymbol{\psi}}_j^D) \right\} \quad (23)$$

j 번째 부체의 수직방향 유체력($F_j^H = \text{Re}\{F_j^H e^{-i\omega t}\}$)을 구하기 위하여 동압력을 부체 바닥면에 따라 적분한다.

$$F_j^H = i\omega\rho \int_0^{2\pi} \int_0^{a_j} r_j \phi_j(r_j, \theta_j, -d_j) dr_j d\theta_j, \quad (24)$$

j 번째 부체에 대한 수직방향 운동방정식을 쓰면 다음과 같다.

$$(-\omega^2 m_j - i\omega b_j + \rho g \pi a_j^2) \xi_j = F_j^H \quad (25)$$

여기서 $m_j (= \rho \pi a_j^2 d_j)$ 는 j 번째 부체의 질량이며, $b_j (\approx \frac{2\kappa_j \rho g S_j}{\omega_{oj}})$ 는

j 번째 부체의 점성 감쇠계수로 자유감쇠실험(Free-decay test)을 통하여 실험적으로 구할 수 있다. 본 연구에서는 무차원화된 감쇠계수로 $\kappa_j = 0.02$ 를 사용하였다. 여기서 ω_{oj} 는 비감쇠 공진주

파수로 $\omega_{oj} \approx \sqrt{\frac{\rho g S_j}{m_j + \mu_j}}$ 이며, 부체의 질량이 부가질량보다 큰

경우($m_j \gg \mu_j$), $\omega_{oj} \approx \sqrt{g/d_j}$ 이다.

식 (25)의 오른쪽 항의 각 부체의 수직방향 유체력은 다음과 같다.

$$F_j^H = \rho g A \left\{ \left[\mathbf{a}_j^T + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N_B} (\mathbf{A}_i + \hat{\xi}_i \mathbf{R}_i)^T \mathbf{T}_{ij} \right] \tilde{\mathbf{B}}_j^T \tilde{\mathbf{Y}}_j^D + \hat{\xi}_j \tilde{\mathbf{Y}}_j^R \right\} \quad (26)$$

여기서

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{Y}}_j^D &= \int_0^{2\pi} \int_0^{a_j} r_j \tilde{\boldsymbol{\psi}}_j^D(r_j, \theta_j, -d_j) dr_j d\theta_j \\ &= \begin{cases} \pi a_j^2, & m=0, n=0 \\ 4\pi(-1)^m \frac{a_j I_1(\lambda_m^j a_j)}{\lambda_m^j I_0(\lambda_m^j a_j)}, & m \geq 1, n=0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{Y}}_j^R &= \int_0^{2\pi} \int_0^{a_j} r_j \tilde{\boldsymbol{\psi}}_j^R(r_j, -d_j) dr_j d\theta_j + \tilde{\mathbf{R}}_j^T \tilde{\mathbf{Y}}_j^D \\ &= \frac{\omega^2 \pi}{2g(h-d_j)} \left((h-d_j)^2 a_j^2 - \frac{a_j^4}{4} \right) + \tilde{\mathbf{R}}_j^T \tilde{\mathbf{Y}}_j^D\end{aligned}$$

식 (26)에서 입사파에 의한 j 번째 부체에 작용하는 파기진력을 추출하면 다음과 같다.

$$f_j^E = \rho g A \left(\mathbf{a}_j^T + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N_B} \mathbf{A}_i^T \mathbf{T}_{ij} \right) \tilde{\mathbf{B}}_j^T \tilde{\mathbf{Y}}_j^D \quad (27)$$

식 (26)을 식 (25)에 대입하여 정리하면

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N_B} [\mathbf{R}_i^T \mathbf{T}_{ij} \tilde{\mathbf{B}}_j^T \tilde{\mathbf{Y}}_j^D] \hat{\xi}_i + W_j \hat{\xi}_j + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N_B} [\mathbf{T}_{ij} \tilde{\mathbf{B}}_j^T \tilde{\mathbf{Y}}_j^D]^T \mathbf{A}_i = -\mathbf{a}_j^T \tilde{\mathbf{B}}_j^T \tilde{\mathbf{Y}}_j^D \quad (28)$$

$$j = 1, 2, \dots, N_B$$

이다. 여기서 $W_j = \tilde{\mathbf{Y}}_j^R + \frac{1}{\rho g} (\omega^2 m_j + i\omega b_j - \rho g \pi a_j^2)$

행렬식 (21)과 (28)을 풀어 미지수 $\hat{\xi}_i, \mathbf{A}_i (i=1, 2, \dots, N_B)$ 를 구하여 영역 (I)에서 완전한 해를 구하고 영역 (II)에서의 완전한 해는 식 (22)을 이용한다.

부체가 고정되어 있을 때 다수 부체 배열에 의한 각 부체의 주변의 회절파의 파형식은 식 (4)와 식 (9)의 합으로 다음과 같다.

$$\eta^D(r_j, \theta_j) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[A_j(i)^n J_n(k_1 r_j) e^{-in\beta} + \sum_{m=0}^{\infty} A_{jm}^n \frac{K_n(k_{1m} r_j) \cos k_{1m} h}{K_n(k_{1m} a_j) N_{1m}} \right] e^{in\theta_j} \quad (29)$$

윗식으로부터 j 번째 부체 벽면($r_j = a_j$)에서의 파형식인 처울림(Run-up) 파는 아래와 같다.

$$\eta^D(a_j, \theta_j) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[A_j(i)^n J_n(k_1 a_j) e^{-in\beta} + \sum_{m=0}^{\infty} A_{jm}^n \frac{\cos k_{1m} h}{N_{1m}} \right] e^{in\theta_j} \quad (30)$$

3. 계산결과 및 고찰

다수 원형 부체 배열에 대한 해석해를 검증하기 위하여 반경 $a = 1m$ 인 4개의 동일한 부체가 정사각형으로 배열되어 있는 계산모델에 대하여 해석해를 구하고 WAMIT을 이용한 수치계산결과와 비교하였다. 4개의 원형 부체 간의 간격과 수심은 4m이다. 계산에 사용한 z 축 방향의 고유함수 개수는 20개이며, θ 축 방향의 고유함수의 개수는 11개이다. 한편 WAMIT에서 격자수는 각 부체 당 280개이다.

먼저 해석해를 검증하기 위하여 단일 원형 부체($d/a = 2.0, h/a = 4.0$)에 대하여 WAMIT의 수치계산결과와 Fig. 3에서 비교하였다. 여기서 x 축은 $k_1 a$ 로 무차원화된 파장이며, y 축은 무차원화된 파기진력, 부가질량, 방사감쇠계수이다. 실선은 고유함수 전개법을 이용한 해석결과이며, 동그라미는 WAMIT을 이용한 수치계산결과이다. 고유함수 개수가 비교적 적음에도 불구하고 무차원화된 부가질량과 방사감쇠계수 그리고 파기진력 모두 서로

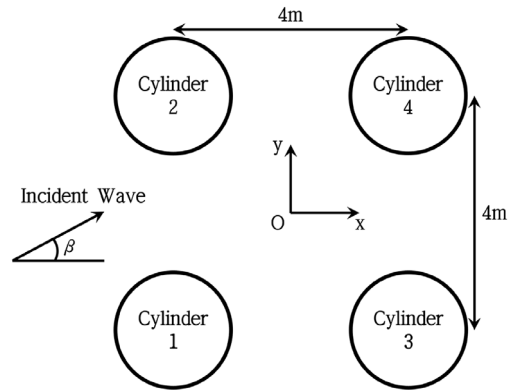


Fig. 2 Configuration Sketch for the square array of four buoys

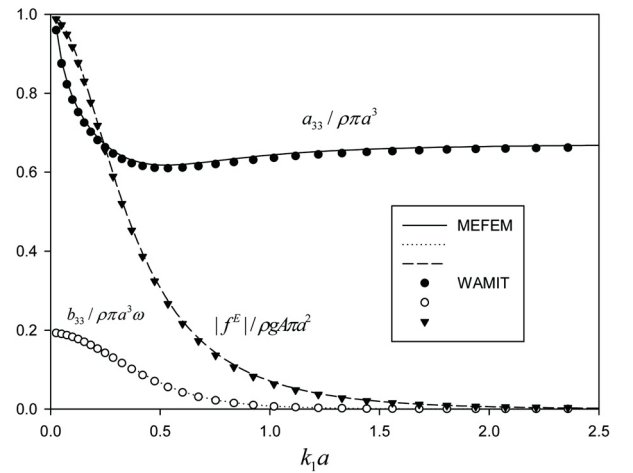


Fig. 3 Non-dimensional wave exciting force, added mass and radiation damping coefficient for single buoy with $d/a = 2.0, h/a = 4.0$ (line : present solutions, symbol: WAMIT numerical solution)

잘 일치하고 있음을 보여주고 있다.

Fig. 4는 4개의 원형 부체가 Fig. 2와 같이 배열되어 있을 때 각 부체에 작용하는 파기진력을 WAMIT의 계산결과와 비교한 그림이다. 여기서 선은 해석해의 결과이며, 기호는 WAMIT의 결과이다. 입사파의 각도(β)는 $0^\circ, 45^\circ$ 이다. 단일 원기둥에서와 같이 해석결과는 수치해석 결과를 잘 따라가고 있음을 보여준다. 특히, 입사각도가 0도일 때는 1, 2번과 3, 4번 부체는 입사파의 진행방향에 서로 대칭으로 놓여 있으므로 파기진력은 서로 같음을 볼 수 있다. 그러나 입사각도가 45도일 때는 2번과 3번 원형 부체만이 입사파의 진행방향에 대해 서로 대칭을 이뤄 동일한 파기진력을 주지만 파의 전면에 놓인 1번 부체에서 파기진력이 가장 크고, 후면에 놓인 4번 부체에서 상대적으로 가장 작은 파기진력이 작용한다.

Fig. 5는 Fig. 4와 동일한 계산 조건하에서 4개의 부체에 작용하는 파기진력들을 모두 합한 결과($= |\sum_{j=1}^4 f_j^E| / \rho g A \pi a^2$)를 보여주고 있다. 즉, 4개의 부체로 지지되는 반 잠수식 시추선에 작용하는 파기진력이라 할 수 있다. $k_1 a$ 가 0.5보다 작은 장파

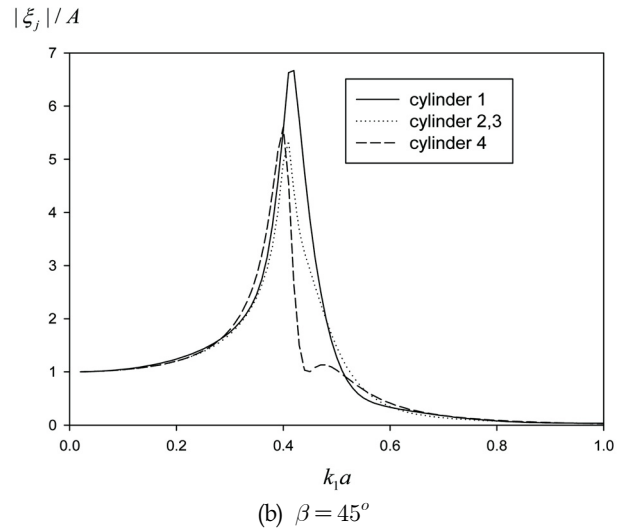
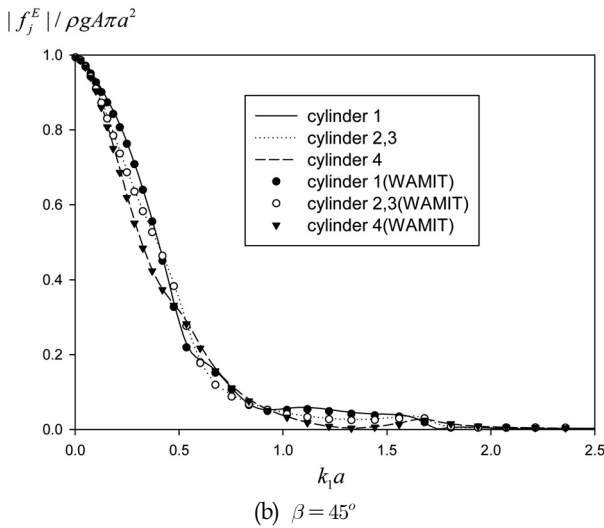
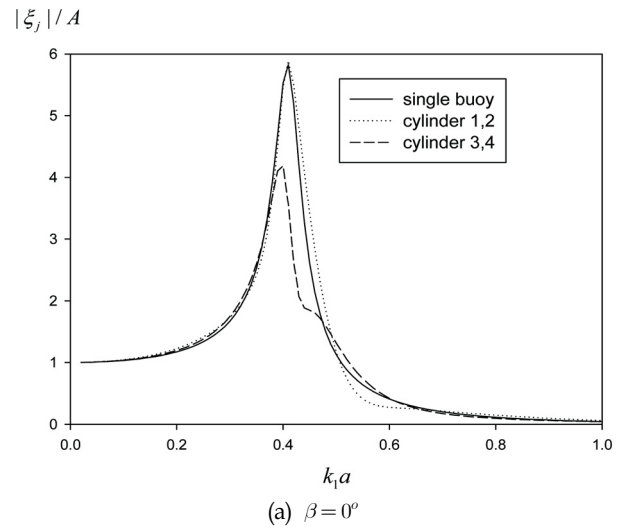
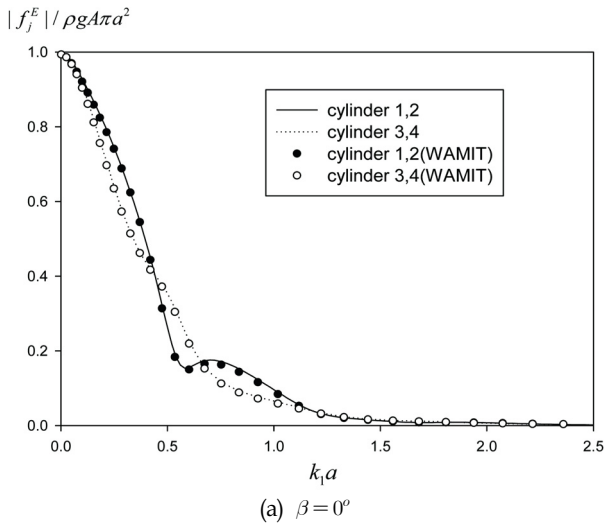


Fig. 4 Non-dimensional wave exciting forces on each buoy in four-buoy array with $d/a = 2.0$, $s/a = 4.0$, $h/a = 4.0$ (line : present solutions, symbol: WAMIT numerical solution)

Fig. 6 Heave RAO of each buoy in four-buoy array with $d/a = 2.0$, $s/a = 4.0$, $h/a = 4.0$

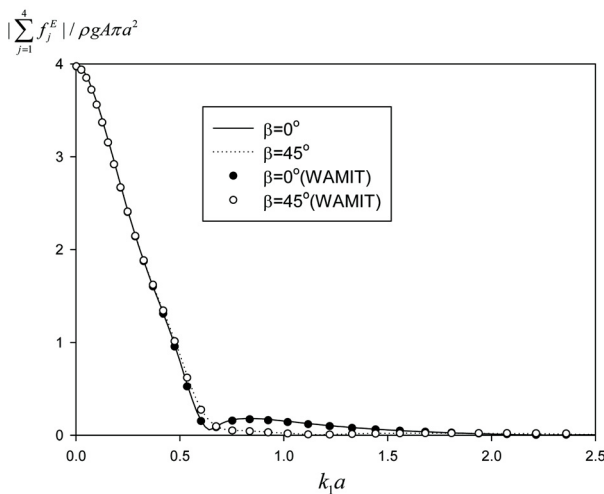


Fig. 5 Non-dimensional wave exciting forces on a four-buoy array with $d/a = 2.0$, $s/a = 4.0$, $h/a = 4.0$ (line : present solutions, symbol: WAMIT numerical solution)

영역에서는 입사각도 $\beta = 0^\circ, 45^\circ$ 에 따른 파기진력의 차이는 거의 나타나지 않았지만 $k_1 a$ 가 0.7보다 큰 단파 영역에서는 입사각도 $\beta = 0^\circ$ 일 때의 파기진력이 $\beta = 45^\circ$ 보다 다소 커지는 것을 볼 수 있다.

Fig. 6에서는 각 부체의 수직운동 RAO(Response amplitude operator)를 살펴보았다. 4개의 원형 부체 사이의 상호작용을 고려하였을 때 전면에 놓인 부체의 수직운동 변위는 단일 부체가 있을 때와 비슷하거나 오히려 증가한다. 그러나 후면에 놓인 원형 부체의 수직운동 변위는 파의 차단 효과로 인해 다소 줄어드는 결과를 주었다. 수직운동의 RAO(ξ_j/A) 곡선의 최고점을 나타내는 $k_1 a$ 는 부체의 공진주파수($k_1 a = 0.42$)와 일치하고 있다. 공진주파수 주변에서 각 부체 간의 운동변위는 다소 차이를 보이나 나머지 주파수영역에서는 큰 차이가 나타나지 않았다.

Fig. 7은 식 (26)에 주어진 j 번째 부체에 작용하는 수직방향 유체력을 보여주고 있다. j 번째 부체에 작용하는 유체력은 파기진력과 j 번째 부체의 운동과 j 번째 부체를 제외한 나머지 부체들의 운동에 의한 동유체력의 합으로 구성되어 있다. 따라서 저

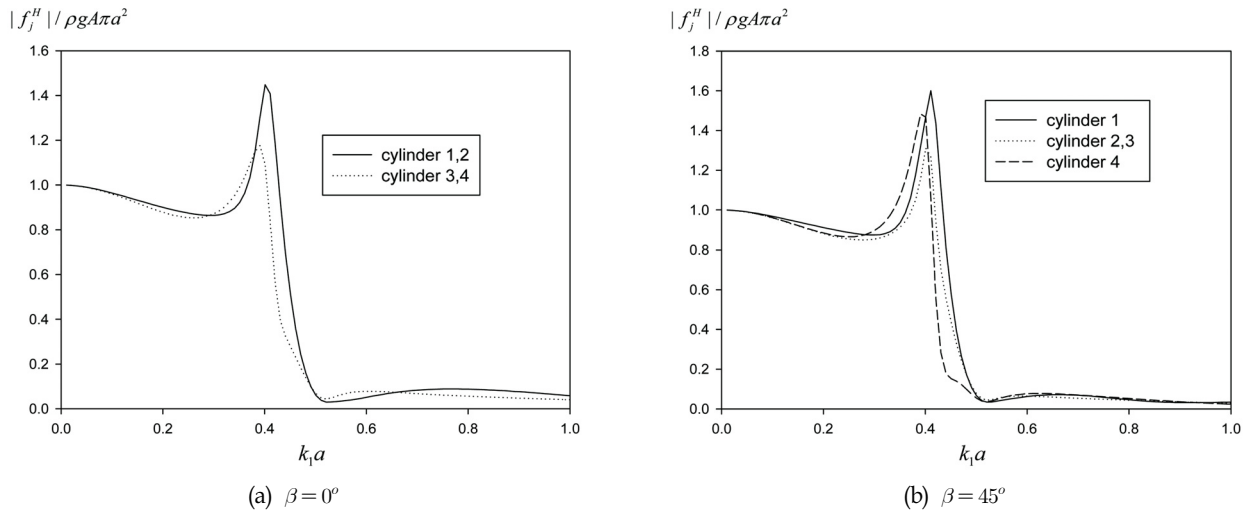


Fig. 7 Non-dimensional fluid forces on each buoy in four-buoy array with $d/a = 2.0$, $s/a = 4.0$, $h/a = 4.0$

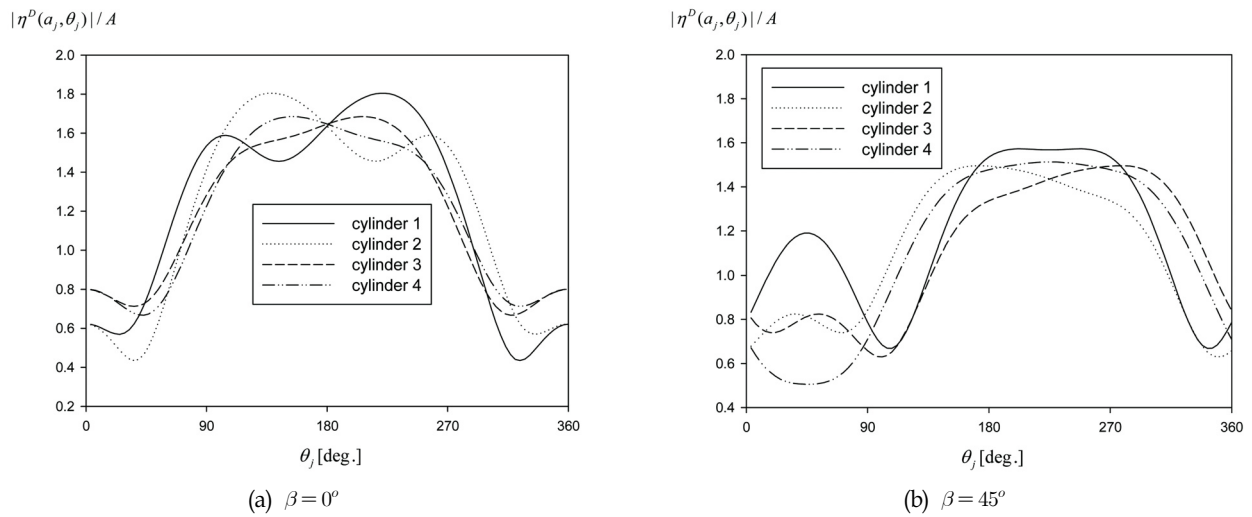


Fig. 8 Wave run-up on wall of each buoy of four-buoy array with $d/a = 2.0$, $s/a = 4.0$, $h/a = 4.0$, $k_1 a = 1.0$

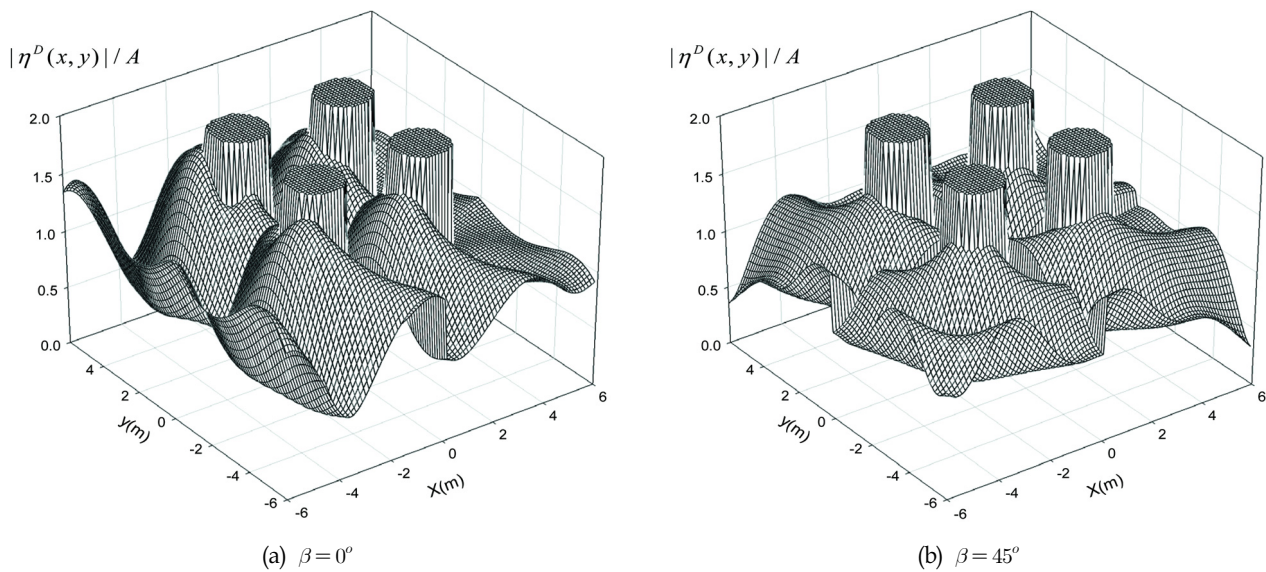


Fig. 9 Diffracted wave elevation ($|\eta^D(x, y)|/A$) around four-buoy array with $d/a = 2.0$, $s/a = 4.0$, $h/a = 4.0$, $k_1 a = 1.0$

주파수와 고주파수 영역에서는 수직방향 유체력은 파기진력의 거동 특성을 따라가지만 공진주파수 부근에서는 부체의 수직운동 특성을 따라감을 보여준다.

Fig. 8은 부체가 고정되어 있을 때 쳐올림 진폭비($|\eta^D(a_j, \theta_j)|/A$)를 보여주고 있다. 이때 무차원화된 입사파의 파장은 $k_1 a = 1.0$ 이다. x 축은 원형 부체의 원주 각도이다. (a)는 입사각도 $\beta = 0^\circ$ 에서의 쳐올림 진폭비이며 (b)는 $\beta = 45^\circ$ 에서의 쳐올림 진폭비이다. 입사각도 $\beta = 0^\circ$ 일 때는 파의 전면($90^\circ < \theta < 270^\circ$)에서의 쳐올림 진폭비가 파의 후면($0^\circ < \theta < 90^\circ, 270^\circ < \theta < 360^\circ$) 보다 더 큰 것을 알 수 있다. x 축에 대한 부체의 대칭 배열로 특정한 원주 각도 범위내에서 동일한 쳐올림 진폭비를 보여주고 있다. 예를 들어 1번 부체의 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ 의 쳐올림 진폭비는 2번 부체의 $270^\circ < \theta < 360^\circ$ 의 쳐올림 진폭비와 서로 같다. 입사각도가 $\beta = 45^\circ$ 일 때 1번 원형 부체의 쳐올림 진폭비가 파의 전면($180^\circ < \theta < 270^\circ$)과 후면($0^\circ < \theta < 90^\circ$) 모두에서 나머지 부체들의 쳐올림 진폭비 보다 크게 나타났다.

Fig. 9는 파의 입사각도(β)는 $0^\circ, 45^\circ$ 일 때 특정한 입사파의 파장($k_1 a = 1.0$)에서 사각형으로 배열된 4개의 고정된 부체 주변에서의 회절파($|\eta^D|/A$)의 분포를 보여주고 있다.

후 기

본 연구는 해양수산부의 해양청정에너지개발사업 "10MW급 부유식 파력-해상풍력 연계형 발전시스템 설계기술 개발"과제의 지원으로 수행되었으며, 연구비 지원에 감사드립니다.

References

Child, B.F.M., Venugopal, V., 2010. Optimal Configuration of Wave Energy Device Arrays. *Ocean Engineering*, 37 (6), 1402-1417.

Cho, I.H., Kweon, H.M., 2011. Extraction of Wave Energy Using the Coupled Heaving Motion of a Circular Cylinder and Linear Electric Generator. *Journal of Ocean Engineering and Technology*, 25(6), 9-16.

Garrett, C.J.R., 1971. Wave Forces on a Circular Dock. *Journal of Fluid Mechanics*, 46, 129-139.

Kagemoto, H., Yue, D.K.P., 1986. Interactions among Multiple Three Dimensional Bodies in Water Waves: an Exact Algebraic Method. *Journal of Fluid Mechanics*, 166, 189-209.

Kim, M.H., 1993. Interaction of Waves with N-vertical Circular-cylinders. *Journal of Waterway Port Coastal and Ocean Engineering*, 119(6), 671-689.

Linton, C.M., Evans, D.V., 1990. The Interaction of Waves with Arrays of Vertical Circular Cylinders. *Journal of Fluid Mechanics*, 215, 549-569.

Maniar, H.D., Newman, J.N., 1997. Wave Diffraction by a Long Array of Cylinders. *Journal of Fluid Mechanics*, 339, 309-330.

Murai, M., Kagemoto, H., Fujino, M., 1999. On the Hydroelastic Responses of a Very Large Floating Structure in Waves. *Journal of Marine Science and Technology*, 4, 123-153.

Siddorn, P., Taylor, R.E., 2008. Diffraction and Independent Radiation by an Array of Floating Cylinders. *Ocean Engineering*, 35(13), 1289-1303.

Tung, C.C., 1979. Hydrodynamic Forces on Submerged Vertical Circular Cylindrical Tanks under Ground Excitation. *Applied Ocean Research*, 1(2), 75-78.

Yilmaz, O., and Incecik, A., 1998. Analytical Solutions of the Diffraction Problem of a Group of Truncated Vertical Cylinders. *Ocean Engineering*, 25(6), 385-394.

Yilmaz, O., Incecik, A., Barltrop, N., 2001. Wave Enhancement Due to Blockage in Semi-submersible and TLP Structures. *Ocean Engineering*, 28(5), 471-490.

부록 A: 단일 원기둥의 회절문제

단일 원기둥의 회절포텐셜 $\phi^D(r, \theta, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (\phi^D)_m^n$ 를 변수분리하면 $(\phi^D)_m^n = -\frac{igA}{\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi_{mn}^n(r, z) e^{in\theta}$ 로 쓸 수 있다. 입사파의 진행파 성분($m=0$)과 비진행파 성분($m \geq 1$)들을 모두 포함시킨 영역 (I)의 회절포텐셜 $\chi_m^n(r, z)$ 는 다음과 같다.

$$\chi_m^n(r, z) = II_m^n(r) f_{1m}(z) + \sum_{q=0}^{\infty} D_{qm}^n \frac{K_n(k_{1q} r)}{K_n(k_{1q} a)} f_{1q}(z) \tag{A1}$$

식 (A1)에서 II_m^n 는 순수한 입사파 성분($m=0$)과 주변의 부체들에 의한 산란파와 방사파의 성분($m \geq 1$)들을 모두 포함하며 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$II_m^n(r) = \begin{cases} (i)^n \frac{N_{10}}{\cosh k_1 h} J_n(k_1 r), & m=0 \\ J_n(k_{1m} r), & m \geq 1 \end{cases} \tag{A2}$$

영역 (II)에서의 회절포텐셜 $\tilde{\chi}_m^n(r, z)$ 은 Laplace방정식과 부체 바닥($z = -d$)과 해저면에서의 경계조건식을 만족해야 하므로 아래와 같다.

$$\tilde{\chi}_m^n(r, z) = C_{0m}^n \left(\frac{r}{a}\right)^{|n|} + 2 \sum_{q=1}^{\infty} C_{qm}^n \frac{I_n(\lambda_q r)}{I_n(\lambda_q a)} \cos \lambda_q (z+h), \tag{A3}$$

영역 (II)에서의 고유값은 $\lambda_q = q\pi/(h-d)$, ($q=1, 2, \dots$)이다. 식 (A1)과 (A3)내의 미지수 D_{qm}^n, C_{qm}^n ($q, m=0, 1, 2, \dots$)는 $r=a$ 에서 영역 (I)과 영역 (II)의 속도포텐셜과 수평방향 속도가 서로

같다는 정합조건식으로부터 구해진다.

$$\chi_m^n = \tilde{\chi}_m^n, \quad \text{at } r = a, -h \leq z \leq -d, \quad (\text{A4})$$

$$\frac{\partial \chi_m^n}{\partial r} = \frac{\partial \tilde{\chi}_m^n}{\partial r}, \quad \text{at } r = a, -h \leq z \leq -d$$

또한 영역 (I)의 해는 다음을 만족해야 한다.

$$\frac{\partial \chi_m^n}{\partial r} = 0, \quad \text{at } r = a, -d \leq z \leq 0 \quad (\text{A5})$$

먼저 $r = a$ 에서 속도포텐셜과 수평방향 속도가 서로 같다는 정합조건식으로부터 아래와 같은 방정식을 얻을 수 있다. 이때 영역 (II)의 고유함수 $\{\cos \lambda_s(z+h); s=1,2,\dots\}$ 의 직교성을 이용한다.

$$C_{sm}^n = \sum_{q=0}^{\infty} D_{qm}^n G_{sq} + U_{sm}^n, \quad m=0,1,2,\dots \quad (\text{A6})$$

$$D_{sm}^n Q_s^n = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon_q P_q^n C_{qm}^n G_{qs} - W_{sm}^n, \quad m=0,1,2,\dots \quad (\text{A7})$$

여기서

$$U_{sm}^n = \begin{cases} (i)^n \frac{N_{10}}{\cosh k_1 h} J_n(k_1 a) G_{s0}, & m=0 \\ I_n(k_{1m} a) G_{sm}, & m \geq 1 \end{cases}$$

$$G_{sq} = \frac{1}{(h-d)} \int_{-h}^{-d} \cos \lambda_s(z+h) f_{1q}(z) dz = \frac{(-1)^s k_{1q} \sin k_{1q}(h-d)}{N_{1q}(h-d)(k_{1q}^2 - \lambda_s^2)}.$$

$$Q_s^n = \frac{k_{1s} h K_n'(k_{1s} a)}{K_n(k_{1s} a)}, \quad s \geq 0$$

$$P_q^n = \begin{cases} \frac{(h-d)|n|}{a}, & q=0 \\ \frac{\lambda_q(h-d)I_n'(\lambda_q a)}{I_n(\lambda_q a)}, & q \geq 1 \end{cases}$$

$$W_{sm}^n = \begin{cases} (i)^n \frac{k_1 h N_{10}}{\cosh k_1 h} J_n'(k_1 a) \delta_{s0}, & m=0 \\ k_{1m} h I_n'(k_{1m} a) \delta_{sm}, & m \geq 1 \end{cases}$$

식 (A6)을 식 (A7)에 대입하여 정리하면 미지수 D_{qm}^n 에 대한 대수방정식을 구할 수 있다.

$$D_{sm}^n + \sum_{q=0}^N \frac{F_{sq}^n}{Q_s^n} D_{qm}^n = \frac{X_{sm}^n}{Q_s^n}, \quad m=0,1,2,\dots,N \quad (\text{A8})$$

여기서

$$F_{sq}^n = - \sum_{k=0}^N \varepsilon_k P_k^n G_{kq} G_{ks},$$

$$X_{sm}^n = -W_{sm}^n + \sum_{k=0}^N \varepsilon_k P_k^n U_{km}^n G_{ks}$$

식 (A8)에 주어진 대수방정식을 수치적으로 풀기 위하여 고유함수의 개수(N)를 유한개로 잡아 각 $n=-M, \dots, 0, \dots, M$ 에 대하여 $D_{qm}^n, (q,m=0,1,2,\dots,N)$ 을 구하고 $C_{qm}^n, (q,m=0,1,2,\dots,N)$ 은 식 (A6)을 이용하여 구한다.

(2.4)절의 회절 전달 행렬(diffraction transfer matrix)의 원소는 다음과 같다.

$$(\mathbf{B})_{qm}^{nn} = \begin{cases} \frac{D_{q0}^n}{(i)^n}, & m=0, q \geq 0 \\ D_{qm}^n, & m \geq 1, q \geq 0 \end{cases} \quad (\text{A9})$$

$$(\tilde{\mathbf{B}})_{qm}^{nn} = \begin{cases} \frac{C_{q0}^n}{(i)^n}, & m=0, q \geq 0 \\ C_{qm}^n, & m \geq 1, q \geq 0 \end{cases} \quad (\text{A10})$$

부록 B: 단일 원기둥의 방사문제

축대칭 형상의 단일 원기둥이 수직운동을 할 때 방사포텐셜은 θ 와 무관한 함수로 $\phi^R(r,z) = -\frac{igA}{\omega} \hat{\xi} \varphi(r,z)$ 라 쓸 수 있다. 여기서 $\hat{\xi}(=\varepsilon/A)$ 는 무차원화된 수직운동 변위이다. 회절문제와 같은 방법으로 유체영역을 영역 (I)과 영역 (II)로 나누어 각 영역에서의 해당 경계조건식들을 만족하는 속도포텐셜을 구한다.

$$\varphi(r,z) = \sum_{q=0}^{\infty} D_q^R \frac{K_0(k_{1q} r)}{K_0(k_{1q} a)} f_{1q}(z), \quad r \geq a \quad (\text{B1})$$

$$\tilde{\varphi}(r,z) = \tilde{\psi}^P + C_0^R + 2 \sum_{q=1}^{\infty} C_q^R \frac{I_0(\lambda_q r)}{I_0(\lambda_q a)} \cos \lambda_q(z+h), \quad r \leq a.$$

부록 A에서 살펴본 회절문제와 같은 방법으로 $r = a$ 에서 인접한 영역의 속도포텐셜과 수평방향 속도가 서로 같다는 정합조건식으로부터 아래와 같은 대수방정식을 유도할 수 있다.

$$C_s^R = \sum_{q=0}^{\infty} D_q^R G_{sq} - \frac{\omega^2}{g} \gamma_s, \quad s=0,1,2,\dots \quad (\text{B2})$$

$$D_s^R Q_s^0 = -\frac{\omega^2 a}{2g} G_{0s} + \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon_q P_q^0 C_q^R G_{qs}, \quad s=0,1,2,\dots \quad (\text{B3})$$

여기서

$$\gamma_s = \begin{cases} \frac{(h-d)}{6} - \frac{a^2}{4(h-d)}, & s=0 \\ \frac{(-1)^s(h-d)}{s^2\pi^2}, & s \geq 1 \end{cases}$$

식 (B2)을 식 (B3)에 대입하여 정리하면 아래와 같은 대수방정식을 유도할 수 있다.

$$D_s^R + \sum_{q=0}^N \frac{F_{sq}^0}{Q_s^0} D_q^R = \frac{X_s^R}{Q_s^0}, \quad s=0,1,2,\dots \quad (\text{B4})$$

여기서 $X_s^R = -\frac{\omega^2 a}{2g} G_{0s} - \frac{\omega^2}{g} \sum_{k=0}^N \varepsilon_k P_k^0 \gamma_k G_{ks}^R$ 이다. 식 (B4)을 풀어 D_q^R 을 구하고 식 (B2)에 대입하여 C_q^R 을 구한다. 영역 (I)과 영역 (II)의 방사포텐셜을 앞에서 (2.2)절에 정의한 공간함수로 표현하면 다음식과 같다.

$$\begin{aligned} \varphi(r,z) &= \mathbf{R}^T \boldsymbol{\psi}^S, \quad r \geq a \\ \tilde{\varphi}(r,z) &= \tilde{\psi}^P(r,z) + \tilde{\mathbf{R}}^T \tilde{\boldsymbol{\psi}}^D, \quad r \leq a \end{aligned} \quad (\text{B5})$$

여기서 $\mathbf{R} = D_q^R$, $\tilde{\mathbf{R}} = C_q^R$, $\boldsymbol{\psi}^S = (\psi^S)_q^0$, $\tilde{\boldsymbol{\psi}}^D = (\tilde{\psi}^D)_q^0$ 이다.