한국초등수학교육학회지 20(4) 655-676. Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 20(4) 655-676.
2016. 11. 30 November 30. 2016.

함수적 사고 기반 수업이 초등학교 6학년 학생들의 대수적 추론 능력 및 함수적 사고 수준에 미치는 영향[1]

최은미[2] · 오영열[3]

본 연구는 대수적 사고 중 하나인 함수적 사고에 기반 한 수학 수업이 6학년 학생들의 대수적 추론 능력 및 함수적 사고 수준에 미치는 영향을 알아보는데 목적이 있다. 이에 본 연구에서는 교육과정 및 선행연구 분석을 통한 12차시의 함수적 사고 기반 수업을 개발하여 실시하였다. 그 결과, 함수적 사고 기반 수업은 전통적인 교과서 중심의 수업에 비해 대수적 추론 능력에 있어 통계적으로 유의미한 차이를 보여주었으며, 대수적 추론 능력의 하위요소인 일반화된 산술로서의 대수적 추론 및 함수적 사고로서의 대수적 추론 능력 향상에도 도움이 되었다. 또한, 함수적 사고 기반 수업은 5가지 유형별 학생들의 함수적 사고 수준 변화에도 긍정적인 영향을 주었다.

주제어: 대수적 추론 능력, 함수적 사고, 함수적 사고 수준

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

대수 학습의 중요성은 학교 수학에서 지속적으로 강조되고 있지만 중등 수학에서 본격적으로 등장하는 대수로 인해 학생들은 대수와 관련된 수학 영역을 더욱 어려워하고 기피하는 경향이 있다. 중등 수학의 대수 영역은 초등 수학에서 다루는 산술 영역과 깊은 관련이 있으며, 따라서 초등 수학에서의 산술과 중등 수학에서의 대수의 자연스러운 연계는 무엇보다 중요하다(Filloy & Rojano, 1989). 예컨대, 초등 수학에서의 '규칙성' 영역은 중등 수학의 '함수' 영역과 연계되는 부분이지만, 대다수의 학생들은 그 관련성을 제대로 이해하지 못한 채 단절된 수학 학습을 하곤 한다. 산술에서 대수로의 연결이 미흡하다면, 문제 해결이나 구조, 패턴과 규칙에 요구되는 대수적 사고의 측면이 소홀해져 초등학교에서 중학교로의 수학 학습이 자연스럽게 이어지지 못할 것이다.

---

1) 본 논문은 최은미(2016)의 석사학위논문을 수정 보완한 것임.
2) [제1저자] 서울송중초등학교
3) [교신저자] 서울교육대학교

산술과 대수를 비교하면 대수가 수를 일반화하기 위해 문자를 사용한다는 점 말고는 딱히 별다른 차이점이 없는 것처럼 보일 수 있다. 그러나 산술에서 대수로의 이행 과정에서 나타나는 학생들의 반복적인 오류나 오개념을 살펴보면, 문자 기호의 도입에는 산술적인 조작 이외의 대수 학습에서 요구되는 수학적 사고가 관련되어 있음을 알 수 있다. 즉, 대수에서 문자의 사용은 산술과 구분될 수 있는 분명한 특징이지만, 대수는 단순한 기호 규칙의 습득이나 방정식의 풀이로만 해석되는 것은 옳지 않으며, 문제 상황에서 변수들 사이의 관계, 패턴과 규칙을 이해하는 과정인 대수적 사고의 측면에서 파악되어야함을 의미한다(우정호, 김성준, 2007). 또한, 미국수학교사협의회는 ‘모두를 위한 대수’라는 슬로건 아래, 대수를 유아와 유치원에서부터 12학년에 이르기까지 지속적으로 다루어야 할 필수 규준으로 채택하였다(NCTM, 2000). 수학교육 개발의 방향에 대해 제시한 RAND 수학 연구위원회의 보고서에서도 대수를 유아 · 유치원 시기부터 12학년까지의 교육과정에서 점진적으로 발달시켜야 할 필수 학습 요소로 규정하고 있다(RAND Mathematics Study Panel, 2003). 이와 같이 대수적 사고는 대수가 본격적으로 등장하는 중등 수학뿐만 아니라, 초등 수학의 여러 영역 속에 내재되어 사고로서 존재한다는 점과 대수를 학교 수학의 초기부터 도입해야 한다는 여러 연구들의 주장은 초등학교에서의 대수적 사고의 중요성을 일깨워 준다.

이러한 대수적 사고는 특정 사례를 수학적 아이디어로 일반화하는 과정인 대수적 추론과 긴밀한 관련이 있으며, 대수적 추론의 여러 유형 중 초등 수학에서 강조되어야할 대수적 추론으로는 일반화된 산술 및 함수적 사고로서의 대수적 추론을 생각할 수 있다(Blanton & Kaput, 2005). 여기서 함수적 사고란 둘 이상의 변화하는 양들 사이의 관계에 초점을 두는 사고이며, 함수적 사고에 초점을 둔 학습 지도는 함수 개념 자체를 학습하기 이전에 학생들이 친근하면서 풍부한 함수적 문제 상황을 사고의 측면에서 다각도로 학습할 수 있다는 장점이 있다(Carraher & Schliemann, 2007).

하지만 이러한 함수적 사고가 현행 교육과정에는 명시적으로 나와 있지 않은 내용이기 때문에 과연 초등학생들에게 함수적 사고의 지도가 가능한지에 대한 의문이 있다. 교과서에서 함수 개념을 제시하지 않는데 굳이 학생들에게 함수적 사고에 대해 지도할 필요가 있을지에 대한 의구심 또한 존재한다. 그러나 Bruner(1962)는 “어떤 교과도 지적으로 정직한 형태로 제시되면 어떤 지적 발달 수준에 있는 어떤 학생에게도 가르칠 수 있다”는 주장으로 학습의 준비성 이론을 제시하였다(p.33). 예컨대, 구체적 조작기에 들어선 학생은 조작이 가능한 내면화된 구조를 개발하기 시작하며, 구체적 조작기 이전에 자신의 구체적 사고를 추상적 형태로 사용하기 위한 기초학습이 전조작기에서 이루어져야 한다(강완 외, 2009). 이는 함수 개념 자체는 중등 수학에서 명시적으로 등장할지라도 초등 수학 학습 과정 중에 함수를 함수적 사고의 관점에서 지도가 가능함을 의미한다.

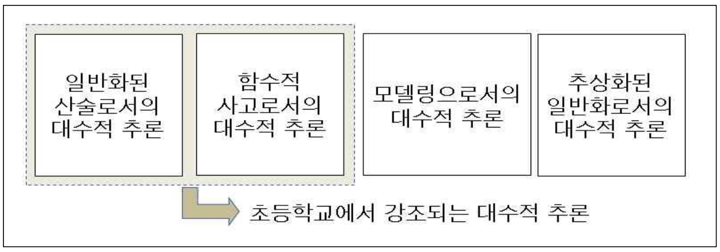
따라서 본 연구는 대수적 추론의 여러 유형 중 초등 수학과 긴밀하게 연계된 함수적 사고를 구현할 수 있는 수업을 개발하여 실시함으로써 학생들의 대수적 추론 능력 및 함수적 사고 수준의 변화 측면에서 그 실효성을 검증하고자 하였다. 이를 위해 초등학교 6학년 수준의 함수적 사고 요소를 추출하고 또한 지도 방안을 다각도로 개발 및 검증함으로써 궁극적으로 초등학교에서의 대수 교육 방향에 대한 시사점을 제시하고자 하였다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 초등학교에서의 대수적 추론 및 함수적 사고

Blanton & Kaput(2005)은 대수적 추론을 일반화된 산술로서의 대수적 추론, 함수적 사고로서의 대수적 추론, 일반화를 표현하고 구성하기 위한 모델링으로서의 대수적 추론, 계산과 수학적 관계로부터 추상화된 일반화로서의 대수적 추론의 4가지로 나누어 설명한다. 그 중 초등 수학에서 더욱 강조되는 대수적 추론은 일반화된 산술로서의 대수적 추론과 함수적 사고로서의 대수적 추론이다.

먼저, 일반화된 산술로서의 대수적 추론은 산술 즉, 수 체계 및 연산의 구조와 성질 등을 대상으로 일반화를 구성하고 표현하는 일련의 사고 과정을 말한다. 반면, 함수적 사고로서의 대수적 추론은 변화하는 양들 사이에서 규칙성과 관계를 추측하고 일반화하며 그러한 일반화를 표현하는 데 초점을 둔 사고 과정으로 보았다. 그들은 초등학교 수학 수업에서 일반화된 산술로서의 대수적 추론을 증진시킬 수 있는 활동으로 범자연수 사이의 속성과 관계 찾기, 연산의 속성 탐구하기, 양 사이의 관계를 표현하기 위해 등식 사용하기, 수들의 대수적 사용, 미지수 해결하기를 제시하였다. 또한, 함수적 사고로서의 대수적 추론 능력을 기를 수 있는 활동으로는 양과 연산을 상징적인 표현으로 기호화하기, 자료를 도표로 표현하기, 함수적 관계 찾기, 기지의 자료를 활용하여 미지의 상태 예상하기, 수치적・기하적 관계를 찾고 설명하기로 범주화하였다.



[그림 1] Blanton & Kaput의 대수적 추론의 유형

'함수'라는 용어는 중등 수학 교과에서 본격적으로 도입이 되지만 초등 수학 내용을 살펴보면 이미 사고로서의 함수 내용이 상당 부분 드러남을 알 수 있다. 초등 수학에서의 함수적 사고 능력의 신장은 곧 초기 대수 교육과도 연관이 되며, 두 수 혹은 그 이상의 변화하는 수들 사이의 관계를 이해하고 탐구할 수 있는 함수적 사고의 학습이 초등학교에서 강조되어야 한다(Blanton & Kaput, 2004; Carraher & Schilemann, 2007; NCTM, 2000; Smith, 2008).

중등 수학에서 함수라는 용어의 본격적 도입은 함수의 개념을 지식으로서 직접적으로 지도해야함을 의미한다. 예컨대, 일차함수, 이차함수의 의미를 이해하고 표현하고, 활용하는 학습은 문제 상황 저변에 내재되어 있는 두 양 혹은 그 이상 사이의 관계를 탐구하는 것이 아닌, 함수의 개념 자체를 지식으로 학습해야함을 말한다. 박교식(1993)은 이와 같이 함수를 지식으로써 배우는 상황을 '지식으로의 함수(function as knowledge, FK)'라고 하였으며, '지식으로의 함수'로부터 경험되고 획득된 함수적 사고를 '지식으로의 함수

에 관련된 함수적 사고(functional thinking in terms of function as knowledge, FTK)'라고 하였다. 하지만 초등학교에서는 '지식으로의 함수' 자체가 존재하지 않기 때문에 초등학교에서의 함수적 사고란 '지식으로의 함수에 관련된 함수적 사고' 이전에 '지식으로의 함수'의 속성을 지닌 그 어떤 것이라고 할 수 있다. 이를 '지식으로의 함수 속성을 지닌 현상에 관련된 함수적 사고(functional thinking in terms of phenomenon which has attributes of FK, FTP)'라고 칭한다. 박교식(1993)이 제시한 초등학교에서의 함수적 사고는 [그림 2]와 같이 나타낼 수 있다.

[그림 2] 박교식이 제시한 초등학교에서의 함수적 사고: FTP

2. 함수적 사고 유형 및 수준

함수적 사고는 학교수학의 초기 과정부터 도입하기에 적절한 대수적 추론 중 하나이며, 또한 둘 이상의 변화하는 양들 사이의 관계에 초점을 두는 사고로써 학생들에게 친근하면서도 풍부한 문제 상황을 소재로 접근할 수 있다는 장점이 있다 (Carraher & Schliemann, 2007).

박교식(1993)은 앞서 제시한 '∼은 ∼에 따라서 변화한다'는 '종속'의 개념과 '∼을 ∼에 지정한다'는 '지정'의 속성을 모두 지닌 '관련(connection)'을 통한 함수적 사고의 학습이 중요하다고 주장한다. 이러한 '관련'을 가정하고 만드는 학습은 상관관계의 지도를 통해 가능하며 이는 함수적 사고를 습득할 수 있는 하나의 방법이다. 또한, 그는 초등학교에서의 함수적 사고 수준을 [그림 3]과 같이 5단계로 구분하여 함수적 사고 지도의 방향을 제시하였다.

두 수량이 서로 관련되어 있다는 것을 인지하는 '수준1'에서부터 두 수량을 변화시켜 보면서 두 수량 중 자유롭게 변하는 양인 독립변수와 그렇지 않은 양인 종속변수 사이의 관련을 구분하게 되면 '수준2'에 도달하게 된다. '수준2'의 활동은 변화표를 사용하면서 진행이 가능하지만, 변화표만을 사용한다고 해서 꼭 수준2의 사고를 한다고 볼 수는 없다. 나아가 '수준3'에서는 각 수량의 변화 규칙을 발견하며, 발견한 함수 관계를 '□, △' 혹은 'x, y'와 같은 문자식으로 표현하고, 그래프, 변화표 등의 적당한 방법으로 나타낸다면 '수준4'의 단계에 해당한다고 볼 수 있다. 마지막으로 표현된 규칙 사이의 관계를 활용할 수 있는 단계를 '수준5'로 분류하였다. 물론 초등학생들은 수준1부터 수준 5까지 모두 가능하지는 않으나, 함수적 사고를 한다는 것은 수준1에서부터 수준5까지 차례로 거치게 됨을 의미한다(박교식, 1993).

수준1	두 변수 사이의 관련을 앎: 변수의 분리
수준2	독립변수와 종속변수의 구별: 변화표 작성
수준3	각 수량 변화의 규칙 발견
수준4	변화하는 규칙 관계를 기술
수준5	규칙 사이의 관계를 활용

[그림 3] 박교식이 제시한 초등학교에서의 함수적 사고 수준

Blanton, Levi, Crites & Dougherty(2011)는 함수적 문제 상황에서 발견할 수 있는 여러 가지 패턴 및 관계를 3가지 유형으로 분류하여 제시하였다. 즉, 순환적인 패턴(recursive patterns), 공변적 관계(co-variational relationships), 대응 규칙(correspondence rules)의 세 가지 유형이 함수적 문제 상황에서 제시될 수 있다고 강조한다. ‘순환적인 패턴’은 단일 수열 값에서의 변화이고, ‘공변적 관계’는 두 변량이 서로 어떻게 관련되어 변화하는지에 대한 분석을 포함하는 규칙에 대한 것이다. 마지막으로 ‘대응 규칙’은 함수 규칙으로 표현된 두 양 사이의 상관관계를 말하는 것으로, 순환적인 관계와 공변적 관계를 넘어서서, 두 양 사이의 일반화된 관계를 확인하는 것이다. 따라서 초등 교육과정에서 이 세 가지 함수적 관계를 적용할 수 있는 내용 영역을 분석하고, 적용 방안을 고안하는 일이 무엇보다 중요하다.

<표 1> 함수적 사고의 패턴 및 관계 유형 (Blanton et al., 2011)

함수적 사고 유형	내용
반복적인 패턴 (recursive patterns)	단일 수열 값에서의 변화
공변적 관계 (co-variational relationships)	두 변량이 서로 어떻게 관련되어 변하는지에 대한 분석
대응 규칙 (correstondence rules)	함수 규칙으로 표현된 두 양 사이의 상관관계

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상 및 실험 설계

본 연구는 대수적 추론의 4가지 유형 중 초등수학과 긴밀하게 연계된 함수적 사고를 구현할 수 있는 수업을 개발하여 그 실효성을 검증하는 데에 그 목적이 있다. 연구의 대상으로 6학년 학생들을 선정한 이유는 중등 수학을 접하기 직전 수준의 학생들이고, 중등 수학에서 본격적으로 도입되는 함수 개념을 학습하기 이전에 함수적 사고를 6학년 학습자의 수준에서 이해하고 적용할 수 있는지에 대해 분석하기 위함이다.

이를 위해, 서울시 강북구에 소재한 S초등학교 6학년 2학급을 실험집단(남10명, 여10명)[4]과 비교집단(남9명, 여11명)으로 선정하였으며, 실험집단의 학생에게는 함수적 사고 기반 수업을 현행 교육과정 내용과 연계하여 지도하였고, 비교집단의 학생들은 전통적인 교과서 중심의 수업을 실시하였다.

본 연구에서는 앞에서 제시한 연구 목적을 달성하기 위해 <표 2>에 제시된 사전-사후검사 통제집단 설계(pretest-posttest control group design)를 적용하였으며, 실험 처치 후 그 효과를 알아보기 위해 실험집단과 비교집단의 학생들에게 사전검사와 동형인 대수적 추론 능력 검사를 사후에 실시하였다. 검사 결과는 SPSS 23.0 버전을 이용해 양적으로 분석하여 두 집단 간의 대수적 추론 능력이 통계적으로 의미가 있는지 확인하였다.

<표 2> 실험 설계

집단	사전검사	실험처치	사후검사
실험반	O_1 , O_3	X_1	O_2 , O_4
비교반	O_1	X_2	O_2

O_1 : 사전 대수적 추론 능력 검사 O_2 : 사후 대수적 추론 능력 검사
O_3 : 사전 함수적 사고 수준 검사 O_4 : 사후 함수적 사고 수준 검사
X_1 : 함수적 사고 기반 수업 적용
X_2 : 전통적인 교수·학습 적용(수학교과서에 나와 있는 것만 지도)

또한 본 연구가 학생들의 함수적 사고 수준 변화에 어떠한 영향을 미치는지를 분석하기 위해 실험집단을 대상으로 함수적 사고 기반 수업을 적용하기 전과 후에 사고 수준 검사를 실시하였으며, 검사지에 포함된 함수 유형에 대한 학생들의 접근 방식을 분석하고 학생들의 함수적 사고 수준이 어떻게 변화하였는지를 파악하고자 하였다. 마찬가지로 실험집단을 대상으로 한 함수적 사고 수준 검사는 동형의 검사 도구를 사전과 사후검사에서 적용하였다.

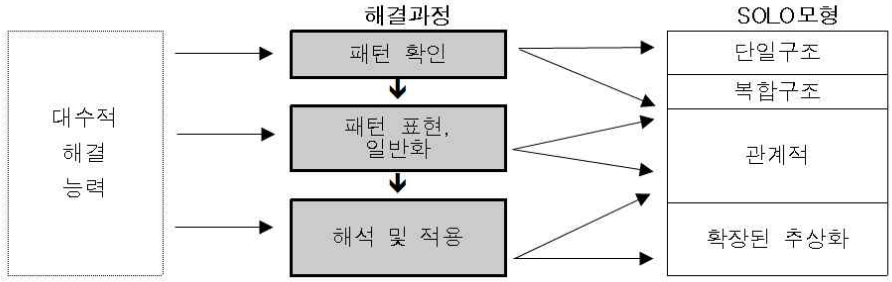
2. 함수적 사고 기반 수업 구성

대수적 사고를 개발하기 위한 수업에 대한 연구 중 Friedlander과 Hershkowitz(1997)의 논문에서는 대수적 관계 파악에서의 패턴을 정당화하는 과정을 ‘도입, 일반화로의 접근, 함축적인 일반화로의 접근, 정당화로의 접근’의 4단계로 나타내었다. ‘도입’에서는 문제 상황에서 귀납적으로 예를 만들어보며 패턴의 실제적인 예시와 경험을 학습자에게 제공한다. 두 번째 ‘일반화로의 접근’은 학생들이 직관적 감지를 바탕으로 본인의 관찰을 일반적인 패턴으로 풀어내며 ‘함축적인 일반화로의 접근’에서는 앞서 직관적으로 관찰한 패턴을 확장하여 또 다른 새로운 예에 적용하면서 일반적인 패턴을 찾는다. 마지막 ‘정당화로의 접근’은 앞서 얻은 일반화된 패턴을 모든 경우에 적용될 수 있는지의 과정이 수행된다. 학생들은 일반적인 규칙을 발견하여 본인이 얻은 결론에 대한 정당성을 확보한다.

또한, Lian과 Idris(2006)의 연구에서는 대수적 문제 해결 과정을 SOLO모형과 연계하여 제시하였는데, 그 과정은 패턴 확인, 패턴 표현 및 일반화, 발견한 것을 해석하고 적용하는 단계로 이루어져 있다.

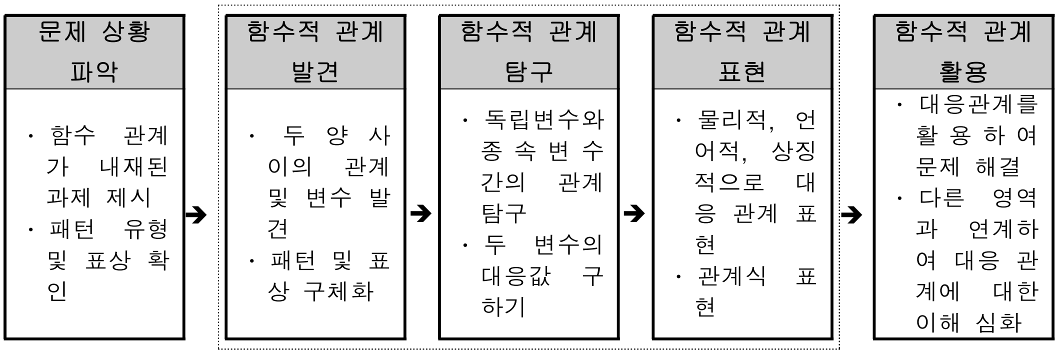
---

4) 실험집단의 학생 수는 22명이고 비교집단은 21명이었으나, 실험집단의 기초학습부진학생 2명과 비교집단의 기초학습부진학생 1명을 제외하여 각각 20명의 학생을 상대로 연구를 진행하였다.



[그림 4] Lian과 Idris(2006)의 대수적 문제의 해결 과정

이에 본 연구에서는 Friedlander과 Hershkowitz(1997)의 패턴 정당화 과정과 Lian과 Idris(2006)의 대수적 문제 해결과정의 이론들을 바탕으로 본 연구의 함수적 사고 기반 수업에서 사용할 매 차시별 수업 모형 고안하였다. 따라서 본 연구에서 적용한 수업 모형은 [그림 5]에 제시된 것처럼 5단계로 구성되어 있으며, 이는 함수적 문제 상황 파악, 함수적 관계 발견, 함수적 관계 탐구, 함수적 관계 표현, 함수적 관계 활용의 절차로 각 차시별 수업 진행시에 이와 같은 단계별 절차를 밟았다.



[그림 5] 본 연구에서 적용한 함수적 사고 기반 수업 모형

본 연구에서는 함수적 사고 기반 수업 활동 주제를 선정하기 위해 현행 교육과정을 분석하였으며, 그 결과를 바탕으로 총 12차시의 함수적 사고 기반 수업 활동 주제를 고안하였다. 본 수업에서 적용한 각각의 차시별 활동 주제 및 내재된 함수 요소, 문제 유형, 표현 양식과 관련 단원을 나타낸 표는 아래의 <표 3>과 같다.

6학년 2학기 2단원 ‘비례식과 비례배분’에서는 첫 번째 활동으로 ‘양팔저울의 평형’활동을 제시하였다. 양팔저울 모형으로 원기둥, 원뿔, 구가 평형이 되는 순간을 찾으면서 원뿔, 구, 원기둥 부피의 비가 ‘1 : 2 : 3’이 됨을 구체적 조작활동을 통해 학습할 수 있도록 구성하였다. 이 활동은 3단원과도 연계되는 부분으로 3단원 ‘원기둥, 원뿔, 구’ 단원에서 원기둥이 부피 학습이 끝난 이후에 2단원의 내용과 연계하여 지도하고자 하였다.

<표 3> 수업의 활동 주제 및 내재된 요소

차시	활동 주제	내재된 함수 내용 요소	문제 유형	표현 양식	단원명
1	양팔저울의 평형	비와 비율, 방정식	물리적	언어, 기호	2. 비례식과 비례배분
2	과자통의 부피	정비례 관계	수치적, 기하적	표, 기호	3. 원기둥, 원뿔, 구
3	봉지밥과 열량	정비례 관계	기하적	그래프, 기호	5. 정비례와 반비례
4	일정한 넓이의 직사각형1	반비례 관계	기하적	그래프, 기호	
5	일정한 넓이의 직사각형2	반비례 관계	기하적	그래프, 기호	
6	테이블에 앉는 사람의 수	일차함수	상황적, 수치적	표, 기호	
7	늘어나는 도형	이차함수	상황적, 기하적	표, 기호	
8	사다리타기	일대일 대응	상황적	언어, 표, 기호	6. 여러 가지 문제
9	가우스의 합	규칙성	상황적, 수치적	언어, 기호	
10	악수 문제	등차수열, 계차수열	상황적, 수치적	언어, 표	
11	스트링아트	규칙성	수치적, 기하적	언어, 그래프	
12	숫자게임	수 사이의 관계	물리적, 수치적	언어	

3단원 '원기둥, 원뿔, 구'에서는 단원에 등장하는 부피와 겉넓이를 구하는 내용을 바탕으로 정비례 관계가 내재된 과자통의 부피 구하기 활동을 제시하였으며 이를 통해 측정 영역과 규칙성 영역의 통합적 학습을 추구하였다.

5단원 '정비례와 반비례'에서는 정비례 관계를 실생활 측면과 연계하여 일상생활에서 쉽게 겪을 수 있는 수학적 상황임을 이해할 수 있도록 수업을 구성하였다. 반비례의 경우 도형 및 측정 영역과 연계하여 넓이가 일정한 여러 가지 직사각형을 찾는 활동을 통해 학생들이 반비례 관계를 조작적으로 이해할 수 있는 활동으로 구성하였다. 더불어 일차함수 관계를 내재적으로 이해할 수 있도록 일정한 모양의 테이블에 앉을 수 있는 사람의 수를 구하는 활동을 통해 '$y=ax+b$'의 관계를 실생활 측면에서 이해할 수 있도록 하였다. '늘어나는 도형'은 일정한 규칙으로 증가하는 도형의 원리를 이해하고, 직접 그려보는 과정에서 도형과 수와 연산 사이의 통합 학습 및 어느 수에나 적용할 수 있는 일반화된 식($y = x \times x$)을 도출할 수 있도록 고안하였다.

6단원 '여러 가지 문제'에서는 가우스의 합, 사다리타기, 악수문제, 스트링아트, 숫자게임의 활동을 통해 학생들이 여러 관점에서 함수적 사고를 발휘할 수 있도록 수업을 고안하였다. '사다리타기'의 경우 실생활에서 겪을 수 있는 상황을 제시하여 사다리타기

속에 내재된 일대일 대응 등의 함수 원리를 이해할 수 있도록 하였고 ‘가우스의 합’은 수학사적 관점을 도입하여 수학자 가우스가 1부터 100까지의 합을 구하는 과정을 학생들이 직접 접해보고 일반화하여 식으로 나타낼 수 있는 활동으로 구성하였다. ‘악수문제’의 경우 집단에서 내가 악수할 수 있는 횟수와 모든 사람이 악수하는 수를 구함으로써 등차수열 및 계차수열의 원리가 내재된 규칙을 파악하고자 하였다. 또한 ‘스트링아트’의 경우 주어진 숫자들 사이의 일정한 관계를 바탕으로 선분을 그려나가는 과정 속에 그려진 선분 속에 곡선을 발견할 수 있도록 하였으며 두 수 사이의 일정한 관계에 따라 그려지는 모양의 아름다움을 느낄 수 있도록 하였다. ‘숫자게임’은 교구 ‘매지믹서’를 활용하여 둘 이상 숫자 사이의 일정한 규칙을 파악하여 함수적 사고를 게임에 참여하는 과정에서 재미있게 발휘할 수 있도록 하였다.

3. 검사 도구

가. 대수적 추론 능력 검사

검사지 구성을 위해 국내외 대수 및 함수적 사고와 관련된 여러 문헌을 검토하였으며, 앞에서 언급한 대수적 추론의 유형 4가지 중 초등 수학에서는 일반화된 산술로서의 대수적 추론과 함수적 사고로서의 대수적 추론을 눈여겨 볼 필요가 있다 (Blanton & Kaput, 2005). 따라서 대수적 추론 능력 검사 도구는 두 가지 대수적 추론 요소를 분석하여 문항을 구성하였다.

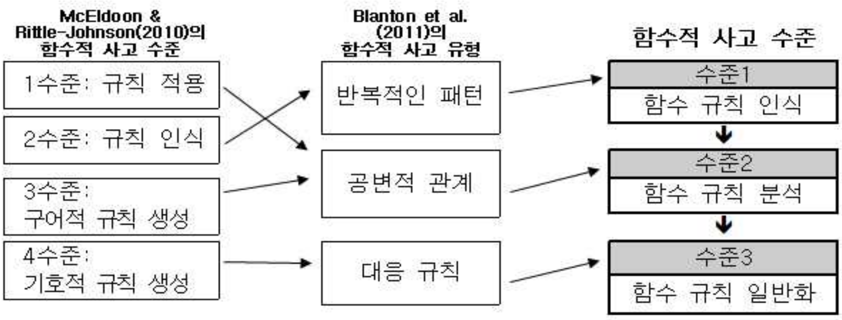
<표 4> 대수적 추론 능력 검사 유형

대수적 추론의 유형		상세 유형	내용	
대수적 추론	일반화된 산술	수 사이의 관계	· 홀수와 짝수의 합 일반화하기 · 덧셈에 대한 항등원, 역원 개념 일반화하기	
		수 연산의 속성	교환법칙	· 덧셈에 대한 교환법칙
				· 곱셈에 대한 교환법칙
			결합법칙	· 덧셈에 대한 결합법칙
				· 곱셈에 대한 결합법칙
			분배법칙	· 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙
		등식을 이용한 양 사이의 관계 표현	· 등호(=)의 개념 이해하기	
		대수적 표현	· 주어진 문제 상황을 대수로 표현하기	
		미지수 해결	· 대수적 문제에서의 미지수 해결하기	
	함수적 사고	양의 기호화 및 연산	· 기호화된 연산을 계산하기 · 연산을 일정한 기호로 약속하기	
		데이터를 그래프화	· 일차함수의 원리가 내재된 규칙을 파악하기 · 일차함수의 원리를 그래프화하기	
		함수적 관계 발견	· $y=ax$ 형태의 규칙 파악하기 · $y=ax+b$ 형태의 규칙 파악하기	
		예상하기	· 조합의 원리가 포함된 문제 상황예상하기 · 수열의 원리가 내재된 수학적 상황 이해하기	
		수치적, 기하학적 패턴 확인	· 일정한 규칙의 패턴 순서 확인하기 · 기하학적 패턴의 원리를 수치화하기	

문항 유형은 Blanton과 Kaput(2005)이 사용한 검사 문항 및 한국교육개발원(1992)의 대수 관련 문항 유형을 참고하여, 연구자가 6학년 수학 교육과정에 맞게 재구성하였다. 검사 문항의 신뢰도는 SPSS 23.0 버전의 크론바흐 알파(cronbach's α)로 측정하였으며, 대수적 추론 능력 사전검사 0.673, 사후검사 0.761로 본 검사의 신뢰도는 적절하다고 판단된다. 사용이 가능하다. 대수적 추론 능력 검사지에서 측정하고자하는 두 가지 추론 유형의 각 요소별 문항 구성 내용은 <표 4>에 제시된 바와 같다.

나. 함수적 사고 수준 검사

본 연구에서는 Blanton et al.(2011)과 McEldoon과 Rittle-Johnson(2010)이 제시한 함수적 사고 유형과 수준을 분석하여 6학년 학생들의 함수적 사고 수준을 분석하기 위한 3단계의 사고 수준 틀을 고안하였으며, 이는 [그림 6]과 같다.

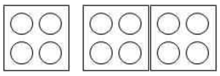


[그림 6] 본 연구에서 사용된 함수적 사고 수준 도출 과정

수준1(함수 규칙 인식)은 주어진 반복적인 패턴과 같은 함수적 관계가 내재된 상황을 인식함으로써 규칙을 인지하는 과정으로 언어적 선택을 통해 변화하는 규칙을 간단히 기술하거나 그림이나 대응표로 완성할 수 있는 경우에 해당한다. 수준2(함수 규칙 분석)는 인지한 규칙을 바탕으로 독립변수와 종속변수 사이의 차이를 구분하고 변수들 간의 공변적(covariation) 관계를 이해하여 구어적으로 설명 및 수치화할 수 있는 단계이다. 수준3(함수 규칙 일반화)은 분석한 규칙들을 기호화하여 다른 상황에도 적용할 수 있는 명확한 기호 규칙을 만들 수 있는 수준이다. 이 수준에서는 변수들 간의 함수적 관계를 대수 기호를 이용하여 표기할 수 있으며, 더욱 복잡한 상황에서도 얼마든지 적용하여 활용할 수 있는 수준에 해당한다.

함수적 사고 수준 검사는 위의 3가지 함수적 사고 수준을 확인하기 위하여 사고 유형별로 문항이 고안되었으며, 그 유형은 최지영, 방정숙(2012)이 제시한 과제 유형별 함수적 관계(덧셈 관계 $y=x+a$, 정비례 관계 $y=ax$, 제곱 관계 $y=ax^2$, 반비례 관계 $xy=a$, 선형 관계 $y=ax+b$)를 바탕으로 검사 내용을 세분화하였다. <표 5>는 본 연구에서 적용한 함수적 사고 수준 검사 문항의 예이다.

<표 5> 검사지 문항 예시 및 예상 답안

함수적 사고 수준		검사지 문항 예시	예상 답안
수준 1	함수 규칙 인식	한 대에 4명의 승객이 탈 수 있는 택시가 있다. 택시의 수가 늘어날 때에 탈 수 있는 승객의 수는 얼마인가요? 택시의 수와 승객의 수 사이의 관계에 대해 설명하시오.	· 4에서 시작해 4씩 커진다. · 택시의 수 1대, 2대, 3대 많아짐에 따라 승객의수는 4, 8, 12, 16, … 명으로 늘어난다.
수준 2	함수 규칙 분석		· 택시의 수가 1씩 늘어날 때, 승객의 수는 4씩 늘어난다. · 승객의 수가 4씩 늘어날 때 택시의 수는 1씩 늘어난다.
수준 3	함수 규칙 일반화	 택시1대 택시2대 … 승객4명 승객8명 …	· '(승객의 수) = (택시의 수) × 4' 의 관계식으로 표현한다. · '△ = □ × 4 ' 의 대응 관계로 나타낸다. · '□ = △ ÷ 4' 의 역수 관계로 나타낸다. · 'y = x × 4' 의 대수식으로 나타낸다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 대수적 추론 능력 분석 결과

가. 대수적 추론 능력 검사의 전체 분석 결과

함수적 사고 기반 수업을 실시한 실험집단과 교과서 중심의 전통적 교수법으로 수학 학습을 한 비교집단의 대수적 추론 능력에서의 차이를 파악하기 위하여 대수적 추론 능력의 사전검사와 사후검사를 실시하였으며, 검사 결과는 SPSS 23.0으로 통계적으로 검증하였다.

실험집단과 비교집단 학생들이 대수적 추론 능력에 있어 수업 투입 전에 동질성 여부를 확인하기 위하여 사전검사 결과에 대한 t-검정을 실시하였으며, 그 결과는 다음 <표 6>과 같다.

<표 6> 사전 대수적 추론 능력 검사 t-검정 결과

	N	평균	표준편차	t	p
실험집단	20	68.00	12.397	-1.212	.233
비교집단	20	73.50	16.067		

유의수준 $p<0.05$

검정 결과 실험집단의 평균은 68.00, 표준편차는 12.397이고, 비교집단의 평균은 73.50, 표준편차는 16.067로 나타났으며, 유의수준 .05에서 p값이 0.233으로 실험집단과 비교집단 사이에 통계적으로 유의미한 차이가 있다고 보기 어렵다. 즉, 사전검사 결과 유의수준 5% 이내에서 두 집단이 대수적 추론 능력에 있어 동질집단이라고 볼 수 있다. 사전검사 결과

두 집단 간에 유의미한 차이가 발생하지 않을 경우에 사후검사에 대해 t-검정을 실시하는 것이 일반적이다.

하지만, 사전검사에 대한 t-검정 결과에서 두 집단이 비록 통계적으로 유의미한 차이가 없다고 하더라도, 두 집단 사이의 출발점 평균 점수(실험집단 68.00, 비교집단 73.50)에서 상당한 정도의 차이가 있는 것이 명백하기 때문에 사전 대수적 추론 능력 검사를 공변인으로 하여 사전검사 결과를 통제한 후 사후 대수적 추론 능력 검사 결과를 종속변인으로 설정한 공분산 분석(analysis of covariance: ANCOVA)을 실시하는 것이 바람직하다고 판단된다. 그 결과, 실험집단의 평균은 원래 사후검사 평균 76.75에서 교정된 사후검사 평균 79.11로 조정되었으며, 비교집단의 평균은 원래 사후검사 평균 70.00에서 교정된 사후검사 평균 67.63으로 조정되었다. 이를 정리하면 <표 7>과 같다.

<표 7> 대수적 추론 능력 사전·사후검사 및 교정된 사후검사 결과

집단	N	사전검사		사후검사		교정된 사후검사	
		평균	표준편차	평균	표준편차	평균	표준편차
실험집단	20	68.00	12.397	76.75	13.791	79.11	2.474
비교집단	20	73.50	16.067	70.00	18.637	67.63	2.474

이후, 대수적 추론 능력에 대한 사전검사 결과를 통제한 상황에서 함수적 사고 기반 수업이 두 집단 간에 사후 대수적 추론 능력 검사 결과에 어떤 차이가 있는지를 공분산 분석을 적용하여 검정하였으며 그 결과는 다음의 <표 8>과 같다.

<표 8> 대수적 추론 능력 사후검사에 대한 공분산 분석

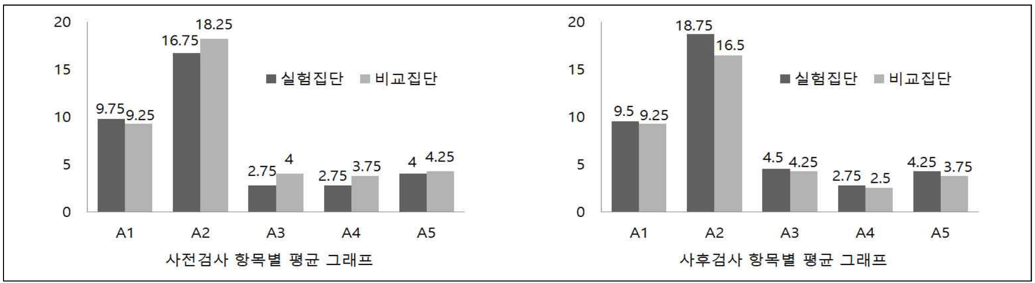
	분산원	제곱합	자유도	평균제곱	F	유의확률
함수적 사고 개발 수업	사전검사 (공변인)	5771.042	1	5771.042	48.063	.000
	집단	1267.377	1	1267.377	10.055	.002
	오차	4442.708	37	110.154		
	합계	10669.375	39			

유의수준 $p<0.05$

공변인으로 설정한 사전검사의 유의확률은 .000으로 두 집단 사이의 사전 대수적 추론 능력 검사 결과는 유의미한 차이가 있음을 확인할 수 있다. 이는 공변인인 사전검사 결과가 사후검사에 영향을 미친다는 것을 의미하므로 사전검사의 평균을 통제한 공분산 분석을 적용한 것이 적합하다는 것을 의미한다. 이어서 공변인인 사전검사의 효과를 통제하고 수업 적용 후의 사후검사를 종속변수로 하여 두 집단 간의 차이를 검증한 결과 유의수준 .05에서 p값이 .002로 두 집단 사이에 유의미한 차이가 있는 것으로 나타났다. 따라서 함수적 사고 기반 수업을 적용한 실험집단이 전통적인 교과서 중심의 수업을 적용한 비교집단보다 사후검사에서 통계적으로 유의미한 차이를 보임에 따라 함수적 사고 기반 수업이 학생들의 대수적 추론 능력 향상에 도움이 된다는 결론을 내릴 수 있다.

나. 대수적 추론 능력 검사의 하위 요소별 분석 결과

일반화된 산술로서의 대수적 추론 능력은 수 사이의 관계(Arithmetic 1, 이하 A1), 수 연산의 속성(Arithmetic 2, 이하 A2), 등식을 이용한 양 사이의 관계 표현(Arithmetic 3, 이하 A3), 대수적 표현(Arithmetic 4, 이하 A4), 미지수 해결(Arithmetic 5, 이하 A5)의 항목으로 구성되었다 (Blanton & Kaput, 2005). 일반화된 산술로서의 대수적 추론 능력을 파악할 수 있는 10개의 문항을 50점 만점으로 점수화하여 실험집단과 비교집단의 검사 결과를 분석하였으며, 항목별 사전·사후 변화 정도는 아래의 [그림 7]과 같다.



[그림 7] 일반화된 산술로서의 대수적 추론 능력 사전·사후 변화 정도

실험집단과 비교집단 사이의 차이를 살펴보면, 사전검사에서 5개 중 4개 영역이 실험집단에 비해 비교집단의 점수가 높았으나, 사후검사에서는 실험집단에서 5개의 하위 영역 모두 비교집단에 비해 월등해 높아졌음을 알 수 있다. 특히, 실험집단에서 수 연산의 속성(A2)이 평균 16.75에서 18.75로 2점이 향상되었으며, 등식을 이용한 양 사이의 관계 표현(A3)이 2.75에서 4.5로 1.75점이 상승하였다. 미지수 해결(A5) 또한 4.00에서 4.25로 0.25가 향상되었으나, 수 사이의 관계(A1)의 경우 0.25점 하락하였다. 대수적 표현(A4)은 실험집단에서 점수에 변화가 없었으며, 수 사이의 관계(A1)와 대수적 표현(A4)을 제외한 나머지 3개의 영역은 모두 점수가 상승하였음을 알 수 있다. 이와 같은 결과는 함수적 사고 기반 수업이 학생들의 일반화된 산술 유형에 긍정적인 영향을 준다는 것을 의미한다.

일반화된 산술로서의 대수적 추론 능력 검사 결과를 통계적으로 분석하기 위하여 사전검사 결과를 공변인으로 두고 공분산 분석(ANCOVA)을 실시하였다. 교정된 사후검사 결과는 <표 9>와 같다. 이어, 일반화된 산술로서의 대수적 추론 능력에 대한 사전검사 결과를 통제한 상황에서 함수적 사고 기반 수업이 두 집단 간 사후검사 결과에 어떤 영향을 미치는지 그 효과를 검정하였으며, 그 결과는 <표 10>과 같다.

<표 9> 일반화된 산술로서의 대수적 추론 유형에 대한 사전·사후검사 결과

집단	N	사전검사		사후검사		교정된 사후검사	
		평균	표준편차	평균	표준편차	평균	표준편차
실험집단	20	36.00	8.207	39.75	6.584	40.61	1.735
비교집단	20	39.50	9.017	36.25	10.371	35.38	1.735

사전검사 결과 실험집단의 평균은 36.00이고 비교집단의 평균은 39.50이었으며, 교정된

사후검사의 평균값은 실험집단이 40.61이고 비교집단이 35.38로 나타났다. 즉, 교정된 사후검사에서 실험집단은 비교집단보다 평균이 5.23만큼 더 높게 나타났다.

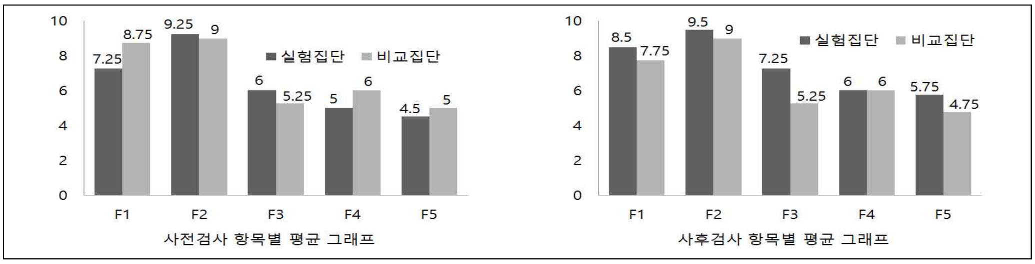
<표 10> 일반화된 산술로서의 대수적 추론 유형에 대한 공분산 분석

실시	분산원	제곱합	자유도	평균제곱	F	유의확률
함수적 사고 기반 수업	사전검사 (공변인)	261.682	1	686.392	11.644	.002
	집단	261.682	1	261.682	4.439	.042
	오차	2181.108	37	58.949		
	합계	2990.000	39			

유의수준 p<0.05

공변인으로 설정한 사전검사의 유의확률은 .002로 두 집단 사이의 사전 대수적 추론 능력 검사 결과는 유의미한 차이가 있음을 확인할 수 있다. 따라서 일반화된 산술로서의 대수적 추론 검사 분석을 위해 사전검사를 공변인으로 통제하고 사후검사를 종속변인으로 설정하여 두 집단 간의 차이를 공분산 분석을 적용하여 분석하였다. 그 결과 유의수준은 .05에서 p값이 .042로 두 집단 사이에 유의미한 차이가 있는 것으로 나타났다. 따라서 함수적 사고 기반 수업이 학생들의 대수적 추론 유형 중 일반화된 산술 능력 향상에 도움이 된다는 것을 알 수 있었다.

또한, 함수적 사고로서의 대수적 추론 능력은 양의 기호화 및 연산(Function 1, 이하 F1), 데이터를 그래프화(Function 2, 이하 F2), 함수적 관계 발견(Function 3, 이하 F3), 예상하기(Function 4, 이하 F4), 수치적 · 기하학적인 패턴 확인(Function 5, 이하 F5)의 항목으로 분석할 수 있다(Blanton & Kaput, 2005). 항목별 실험집단과 비교집단의 사전·사후검사 결과는 다음 [그림 8]과 같다.



[그림 8] 함수적 사고로서의 대수적 추론 능력 사전 · 사후 변화 정도

실험집단과 비교집단 사이의 차이를 살펴보면 사전검사 결과 5개 중 3개 영역에서 비교집단이 실험집단에 비해 평균 점수가 대체로 높았으나, 사후검사에서는 실험집단이 5개의 하위 영역 중 4개의 영역에서 비교집단에 비해 높았음을 알 수 있다. 특히, 실험집단의 경우 양의 기호화 및 연산(F1)이 평균 7.25에서 8.50으로, 함수적 관계 발견(F3)이 6.00에서 7.25로, 수치적 · 기하적 패턴 확인(F5)이 4.50에서 5.75로 각각 1.25점씩 향상되었다. 예상하기(F4)의 경우 5.00에서 6.00으로 1.00이 상승되었으며, 데이터를 그래프화(F2)의 유형은 9.25에서 9.50으로 0.25점 향상되어, 함수적 사고로서의 대수적 추론의 5개 유형 모두 조금

씩 변화가 있었음을 알 수 있다. 이와 같은 결과는 함수적 사고 기반 수업이 학생들의 함수적 사고 유형에 전반적으로 긍정적인 영향을 준다는 것을 의미한다.

함수적 사고로서의 대수적 추론 능력 검사 결과 또한 통계적으로 분석하기 위하여 공분산 분석(ANCOVA)을 적용하였다. 함수적 사고로서의 대수적 추론 능력 검사 결과 아래의 〈표 11〉에 제시된 것처럼 사전검사의 경우 실험집단의 평균은 32.00이고 비교집단의 평균은 34.00이었으며, 교정된 사후검사에 대한 실험집단의 평균은 37.87이고 비교집단의 평균은 32.87로 나타났다.

<표 11> 함수적 사고로서의 대수적 추론 유형에 대한 사전·사후검사 결과

집단	N	사전검사		사후검사		교정된 사후검사	
		평균	표준편차	평균	표준편차	평균	표준편차
실험집단	20	32.00	8.175	37.00	9.787	37.87	1.622
비교집단	20	34.00	8.522	33.75	10.622	32.87	1.622

이어, 함수적 사고로서의 대수적 추론 능력에 대한 사전검사 결과를 통제한 상황에서 함수적 사고 기반 수업이 두 집단 간 사후검사 결과에 어떤 영향을 미치는지 그 효과를 검정하였으며, 그 결과는 〈표 12〉와 같다.

<표 12> 함수적 사고로서의 대수적 추론 유형에 대한 공분산 분석

실시	분산원	제곱합	자유도	평균제곱	F	유의확률
함수적 사고 기반 수업	사전검사 (공변인)	2031.094	1	2031.094	38.885	.000
	집단	246.375	1	246.375	4.717	.036
	오차	1932.656	37	52.234		
	합계	4069.375	39			

유의수준 $p<0.05$

공변인으로 설정한 사전검사의 유의확률은 .000으로 두 집단 사이의 사전 대수적 추론 능력 검사 결과는 유의미한 차이가 있음을 확인할 수 있었다. 따라서 공변인인 사전검사의 효과를 통제하고 수업 적용 후의 사후검사를 종속변수로 하여 두 집단 간의 차이를 검증한 결과 유의수준은 .05에서 p값이 .036으로 두 집단 사이에 유의미한 차이가 있는 것으로 나타났다. 따라서 함수적 사고 기반 수업이 학생들의 대수적 추론 유형 중 함수적 사고 능력 향상에 통계적으로 유의미한 영향이 있다는 것을 알 수 있다.

2. 함수적 사고 수준 검사 결과

본 연구의 두 번째 연구문제인 함수적 사고 기반 수업이 학생들의 함수적 사고 수준에 미치는 영향을 파악하기 위하여 함수적 사고 수준 검사를 수업 실시 전과 후에 실시하였다. 최지영, 방정숙(2012)이 제시한 과제 유형별 함수적 관계와 Blanton et al.(2011)이 제시한 함수적 사고의 3가지 관계 수준을 바탕으로 5가지 함수 유형($y=x+a$, $y=ax$, $xy=a$, $y=ax+b$, $y=x^2$)의 함수적 사고 수준을 측정하였다. 함수 유형에 따른 실험집

단의 사전 함수적 사고 수준 결과는 다음 <표 13>과 같다.

<표 13> 함수 유형에 따른 사전 함수적 사고 수준 (N=20)

함수적 사고 수준			함수 유형				
			덧셈 관계 $y=x+a$	정비례 관계 $y=ax$	반비례 관계 $xy=a$	선형 관계 $y=ax+b$	제곱 관계 $y=x^2$
수준1	함수 규칙 인식	학생수(명)	3	4	12	10	10
		비율(%)	15.0	20.0	60.0	50.0	50.0
수준2	함수 규칙 분석	학생수(명)	7	7	3	6	4
		비율(%)	35.0	35.0	15.0	30.0	20.0
수준3	함수 규칙 일반화	학생수(명)	10	9	5	4	6
		비율(%)	50.0	45.0	25.0	20.0	30.0
전 체		학생수(명)	20	20	20	20	20
		비율(%)	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0

사전검사 결과 함수적 사고 수준1(함수 규칙 인식) 수준에 있는 학생들의 비율을 살펴보면, 반비례 관계 60.0%, 선형 관계와 제곱 관계가 각각 50.0%, 정비례 관계 20.0%, 덧셈 관계 15.0%로 반비례 관계 > 선형 관계, 제곱 관계 > 정비례 관계 > 덧셈 관계 순으로 높게 나타났다. 수준2(함수 규칙 분석)에 도달한 학생의 비율은 덧셈 관계와 정비례 관계가 각각 35.0%, 선형 관계 30.0%, 제곱 관계 20.0%, 반비례 관계 15.0%로 덧셈 관계, 정비례 관계 > 선형 관계 > 제곱 관계 > 반비례 관계 순으로 높게 나타났다. 수준3(함수 규칙 일반화)의 경우 덧셈 관계 50%, 정비례 관계 45.0%, 제곱 관계 30.0%, 반비례 관계 25.0%, 선형 관계 20.0%로 덧셈 관계 > 정비례 관계 > 제곱 관계 > 반비례 관계 > 선형 관계 순으로 높게 나타났다.

덧셈 관계($y=x+a$) 유형이 수준1에서는 15.0%로 가장 낮은 반면 수준3에서는 50.0%로 가장 높은 이유는 나이 차이가 있는 두 명의 사람이 시간이 지남에 따라 몇 살이 되는지를 묻는 문제가 일상생활에서 쉽게 접할 수 있는 상황이기 때문으로 보인다. 또한, 덧셈 관계의 유형은 이전 학년의 규칙성 영역에서 잠재적으로 학습해왔던 내용이며, 이를 통해 두 수 사이의 관계를 확인하고 규칙을 분석 및 일반화하기까지에는 학생들에게 큰 어려움이 없을 것이라 추측할 수 있다.

수준1에서 20.0%인 반면, 수준3에서 45.0%로 높은 비율을 차지한 정비례 관계($y=ax$)의 경우, 다른 함수 유형보다 정비례 관계가 학습자들에게 가장 익숙한 유형임을 알 수 있다. 이는 5학년에서 학습한 '약수와 배수'를 미루어 보았을 때 학생들이 배수와 약수 관계를 더 친근하게 이해할 수 있으며, 돈 계산 문제 등 일상생활에서 자주 사용하는 배수와 연관된 계산 문제를 해결하는 과정에서 자연스레 정비례 관계를 터득해왔음을 유추할 수 있다. 하지만 규칙을 정확히 분석하고 일반화하기에는 아직 무리가 있어 보인다.

반비례 관계($xy=a$)의 경우, 수준1에서는 60.0%로 가장 높은 비율을 차지한 반면 수준3에서는 25.0%의 비율을 차지하였다. 이는 두 수를 곱했을 때 일정한 값이 나오는 반비례 관계를 5학년 때 학습한 '약수와 배수' 중 배수보다는 약수와 연관 지어 이해하는데 어

려움이 있음을 보여준다.

또한, 선형 관계($y = ax + b$), 제곱 관계($y = x^2$)가 초등학교 수학 교과에서 명시적으로 다루는 유형이 아님에도 불구하고, 반비례 관계보다 수준1에서의 비율이 낮다는 것은 초등학생의 수학적 사고 수준에서도 주어진 두 수 사이의 관계를 선형 관계와 제곱 관계의 유형으로 충분히 이해할 수 있음을 보여준다.

다음으로 함수 유형에 따른 실험집단의 사후 함수적 사고 수준에 대한 분석 결과는 아래의 <표 14>와 같다. 사후검사 결과를 보면, 함수적 사고 수준1(함수 규칙 인식)에 있는 학생들의 비율이 선형 관계와 제곱 관계가 각각 30.0%, 반비례 관계 15.0%, 덧셈 관계와 정비례 관계가 각각 0.0%로 선형 관계, 제곱 관계 > 반비례 관계 > 덧셈 관계, 정비례 관계 순으로 높게 나타났다. 수준2(함수 규칙 분석)에 도달한 학생의 비율은 반비례 관계와 선형 관계가 각각 40.0%, 덧셈 관계 35.0%, 정비례 관계 25.0%, 제곱 관계 15.0%로 반비례 관계, 선형 관계 > 덧셈 관계 > 정비례 관계 > 제곱 관계 순으로 높게 나타났다. 수준3(함수 규칙 일반화)의 경우 정비례 관계 75.0%, 덧셈 관계 65.0%, 제곱 관계 55.0%, 반비례 관계 45.0%, 선형 관계 30.0%로 정비례 관계 > 덧셈 관계 > 제곱 관계 > 반비례 관계 > 선형 관계 순으로 높게 나타났다.

<표 14> 함수 유형에 따른 사후 함수적 사고 수준 (N=20)

함수적 사고 수준			함수 유형				
			덧셈 관계 $y = x + a$	정비례 관계 $y = ax$	반비례 관계 $xy = a$	선형 관계 $y = ax + b$	제곱 관계 $y = x^2$
수준1	함수 규칙 인식	학생수(명)	0	0	3	6	6
		비율(%)	0.0	0.0	15.0	30.0	30.0
수준2	함수 규칙 분석	학생수(명)	7	5	8	8	3
		비율(%)	35.0	25.0	40.0	40.0	15.0
수준3	함수 규칙 일반화	학생수(명)	13	15	9	6	11
		비율(%)	65.0	75.0	45.0	30.0	55.0
전 체		학생수(명)	20	20	20	20	20
		비율(%)	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0

사후검사에서 함수적 사고 수준3(함수 규칙 일반화) 단계에 이르는 학생이 가장 많은 유형은 정비례 관계이고 그 다음으로는 덧셈 관계와 제곱 관계로 나타났다. 정비례 관계의 경우 사전검사에서도 사고 수준3에 도달한 학생들이 상당히 높은 비율을 차지하는 유형이었으나, 제곱 관계의 경우 사전검사의 결과에 비해 25.0% 더 높게 나타났음을 알 수 있다. 이는 학생들이 함수적 사고 기반 수업을 통해 제곱 관계의 규칙을 이해하고 적용 및 일반화할 수 있는 수준에 이르렀음을 보여준다. 5가지의 유형 중 수준3(함수 규칙 일반화)에 이르는 학생이 가장 적은 경우는 사전검사에서도 수준3에 도달한 학생이 가장 적었던 선형 관계인 것으로 나타났다.

반면, 수업 실시 이후에도 수준1(함수 규칙 인식) 단계에 머무른 학생이 가장 많은 유형은 선형 관계, 제곱 관계로 각각 6명의 학생 30.0%를 차지한다. 하지만 이들 두 유형에 해

당하는 수준1의 학생 수는 사전검사 결과에 비해 모두 현저히 줄어들었음을 알 수 있다. 수준1(함수 규칙 인식) 단계에 아무도 머무르지 않은 유형은 덧셈 관계와 정비례 관계이다. 이는 본 함수적 사고 기반 수업이 덧셈 관계와 정비례 관계를 표, 그래프, 대수식 등 여러 형태로 학습하도록 다루었기 때문으로 여겨진다.

사전 · 사후검사 결과를 5가지 함수 유형의 사례수를 모두 합한 100명의 표본으로 분석하면 수준1(함수 규칙 인식)에 해당하는 학생이 39명에서 15명으로 감소하였으며, 수준2(함수 규칙 분석)에 해당하는 학생은 27명에서 31명으로, 수준3(함수 규칙 일반화)의 경우 34명에서 54명으로 증가하였다. 또한, 초등 교육과정에 명시적으로 등장하지 않는 선형 관계($y=ax+b$), 제곱 관계($y=x^2$)의 경우, 수준1에 해당하는 학생의 비율이 각각 사전검사 결과 각각 50.0%였으나 사후검사에서는 30.0%로 줄어들어 학생들이 수준2와 수준3으로 향상되었음을 알 수 있다. 이는 초등학생들 또한 두 양 사이에 초점을 둔 여러 유형의 함수적 관계를 충분히 이해하고 표현할 수 있으며, 일반화된 사고로 적용하여 활용할 수 있음을 보여준다.

Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구는 함수적 사고 기반 수업이 초등학교 6학년 학생들의 대수적 추론 능력 및 함수적 사고 수준에 미치는 영향을 알아보는데 주요한 목적이 있다. 본 연구 결과를 바탕으로 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

첫째, 함수적 사고 기반 수업은 학생들의 대수적 추론 능력에 긍정적인 영향을 준다. 함수적 사고 기반 수업을 실시한 결과 비교집단에 비해 실험집단 학생들의 대수적 추론 능력이 높았으며, 대수적 추론 능력을 '일반화된 산술로서의 대수적 추론 능력'과 '함수적 사고로서의 대수적 추론 능력'의 두 하위 요소로 분류하여 통계 분석하였을 때에도 두 집단 간에 유의미한 차이가 나타났다. 또한 대수적 추론 능력의 하위 요소별 사전 · 사후 평균의 향상 정도를 분석해 보아도 실험집단의 경우 10개의 유형 중 8개 유형의 평균이 향상되었다. 이와 같은 분석 결과는 함수적 사고 기반 수업이 대수적 추론 능력의 하위 요소들에도 긍정적인 영향을 주었음을 의미한다.

둘째, 실험집단의 사전 · 사후 함수적 사고 수준 검사 결과, 함수적 사고 기반 수업은 학생들의 함수적 사고 수준 향상에 영향을 주었다. 함수 유형에 따른 학생 개인별 사전 · 사후 수준의 향상 정도를 분석한 결과 5가지 함수 유형의 100개의 사례 중 수준1(함수 규칙 인식)에 해당하는 학생은 사후검사 결과 감소하였으며, 수준2(함수 규칙 분석)와 수준3(함수 규칙 일반화)에 해당되는 학생 수는 증가하였다. 특히 사후검사 결과 교육과정에 명시적으로 등장하지 않는 선형 관계($y=ax+b$), 제곱 관계($y=x^2$)를 일부 초등학생들이 이해할 수 있음을 확인할 수 있었다.

이러한 결론을 바탕으로 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

첫째, 초등학교 수준에서의 함수적 사고를 증진시키기 위하여 다양한 측면에서의 수업 개발이 중요하다. 본 연구는 선행연구를 바탕으로 함수적 사고 요소를 추출하고 교육과정을 분석하여 함수적 사고의 내용 요소, 문제 유형, 표현 양식을 고려하여 개발하였다. 이 과정에서 함수적 사고의 모든 측면을 다루는 데에는 한계가 있었기에 함수적 사고 개발을 위한 수업 내용의 다양화가 필요하다. 또한, 기존 수업에 대한 대안적인 모델 제시가 아닌

기존 소재나 문제를 의미 있게 활용하여 함수적 사고 신장이 가능하도록 체계적인 교수 설계 및 발문에 대한 연구가 필요하다.

둘째, 학생들이 함수적 관계를 이해하는 과정에서 다양한 표현의 기회를 제공해야 한다. 함수적 관계를 발견하고 탐구하는 과정에서 학생들은 그림, 대응표, 나뭇가지 그림, 그래프 등의 여러 표현 양식을 사용하였고, 이들은 서로 함수적 사고로써 복합적으로 영향을 주었다. 예컨대, 반비례 관계의 상황에서 학생들은 일정한 넓이의 직사각형 그림을 그리고 그려진 그림들을 길이의 순서대로 배치하면서 그래프로도 표현할 수 있었다. 표현 양식들의 복합적인 사용을 통해 학생들은 서로의 표현을 이해하고 분석하면서 의미 있는 함수적 사고를 할 수 있게 된다. 이러한 점을 고려할 때에 함수적 사고를 효과적으로 발휘하기 위해서는 먼저 다양한 표현 양식을 익힐 수 있도록 지도하고 여러 함수적 상황에 적용할 수 있는 기회를 제공해야 한다.

더불어 본 연구의 대상인 6학년뿐만 아니라 3, 4, 5학년 수준에 맞는 함수적 사고의 지도 방향을 연구할 필요가 있다. 특히, 3, 4학년은 사칙연산을 모두 완료하는 시기이며, 이 시기의 학생들은 다양한 변화 규칙을 찾고 그 규칙을 수나 식으로 나타내는 데에 무리가 없기 때문에 보다 풍부한 함수적 상황을 제시한다면 함수적 사고 능력을 향상에 도움이 될 것이다. 5학년에서는 약수와 배수 및 분수와 소수의 혼합 계산이 등장하며, 이들은 두 수의 관계를 바탕으로 한 함수적 사고에 기초가 되는 개념이라고 볼 수 있다. 따라서 교육과정에 등장하는 두 수 사이의 관계에 초점을 둔 연산과 함수적 사고를 연계한 지도 방법의 구안이 필요하다. 나아가 저학년 및 고학년을 대상으로 실시한 국내외 초기 대수 및 함수적 사고 지도에 대한 연구들을 비교하여 지도 방향을 모색하는 것 또한 중요하다.

마지막으로, 본 연구는 함수적 사고 기반 수업을 적용한 후 대수적 추론 능력과 함수적 사고 수준의 변화를 확인하였다. 대수적 추론 능력의 경우 비교집단을 선정하여 통계적으로 유의미함을 검증하였으나, 함수적 사고 수준의 변화는 단일집단에서의 향상된 정도를 분석하였기 때문에 본 수업이 사고 수준 향상에 영향이 있다고 단정하는 데는 한계가 있다. 따라서 본 연구에서 제시한 함수적 사고 유형 5가지를 바탕으로 초등학생들의 함수적 사고 향상을 검증할 수 있는 추후 연구가 필요하다. 또한, 5가지 함수 유형의 문항을 더욱 구체화하고 더 많은 표본을 바탕으로 초등학교 6학년 학생들의 함수 유형에 대한 이해도 및 함수적 사고 수준을 조사 연구한다면 앞으로의 함수적 사고 교육의 방향에 커다란 자양분이 될 것이다.

참 고 문 헌

강완, 김상미, 박만구, 백석윤, 오영열 (2009). **초등수학교육론**. 서울: 경문사

박교식 (1993). 초등학교에서의 함수적 사고와 그의 지도에 관한 연구. **인천교육대학교 논문집, 27**(1), 279-295.

우정호, 김성준 (2007). 대수의 사고 요소 분석 및 학습-지도 방안의 탐색. **수학교육학연구, 17**(4), 453-475.

최지영, 방정숙 (2012). 초등학교 2, 4, 6학년 학생들의 함수적 관계 이해 실태 조사. **학교수학, 14**(3), 275-296.

한국교육개발원 (1992). **교육의 본질 추구를 위한 수학 교육 평가 체제 연구 (III)**. 한국교육개발원.

Blanton, M., & Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. In M. Jonsen Hoines & A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Norway: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., & Dougherty, B. J. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Bruner, J. S. (1962). *The process of education*. New York: Vintage Books.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 9*(2), 19-25.

Friedlander, A., & Hershkowitz. R. (1997). Reasoning with algebra. *The Mathematics Teacher, 90*(6), 442-447.

Lian L. H., & Idris N. (2006). Assessing algebraic solving ability of form four students. Retrieved from http://www.mathedujournal.com/dosyalar/a4.pdf.

McEldoon, K. L., & Rittle-Johnson, B. (2010). *Assessing elementary students' functional thinking skills: The cases of function table. The 32nd annual conference of north american chapter of the international group for the psychology of mathematics education*. Columbus, OH.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM, Reston, VA.

RAND Mathematics Study Panel. (2003). *Mathematical proficiency for all students: Toward a strategic research and development program in mathematics education*. Santa Monica, CA: RAND.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-160). New York: Lawrence Erlbaum.

<Abstract>

The Influence of the Functional Thinking Based-Teaching on Algebraic Reasoning and Functional Thinking Level of Sixth Grade Elementary School Students

Choi, Eunmi[5] & Oh, Youngyoul[6]

The purpose of this study is to examine the effects of teaching on functional thinking, one of the algebraic thinking in sixth grade students level. For this study, we developed functional thinking based-teaching through analyzing mathematical curriculum and preceding research, which consisted of 12 classes, and we investigated the effects of teaching through quantitative and qualitative analysis. In the results of this study, functional thinking based-teaching was statistically proven to be more effective in improving algebraic reasoning skills and lower elements which is an algebraic reasoning as generalized arithmetic and functional thinking, compared to traditional textbook-centered lessons. In addition, the functional thinking based-teaching gave a positive impact on the functional thinking level. Thus functional thinking based-teaching provides guidance on the implications for teaching and learning methods and study of the functional thinking in the future, because of the significant impact on the mathematics learning in six grade students.

Key words: algebraic reasoning skills, functional thinking, functional thinking level

논문접수: 2016. 10. 15
논문심사: 2016. 11. 23
게재확정: 2016. 11. 25

5) cemstory@sen.go.kr
6) yyoh@snue.ac.kr