

# Multivariate conditional tail expectations

C. S. Hong<sup>a, 1</sup> · T. W. Kim<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Department of Statistics, Sungkyunkwan University

(Received July 5, 2016; Revised September 19, 2016; Accepted October 27, 2016)

---

## Abstract

Value at Risk (VaR) for market risk management is a favorite method used by financial companies; however, there are some problems that cannot be explained for the amount of loss when a specific investment fails. Conditional Tail Expectation (CTE) is an alternative risk measure defined as the conditional expectation exceeded VaR. Multivariate loss rates are transformed into a univariate distribution in real financial markets in order to obtain CTE for some portfolio as well as to estimate CTE. We propose multivariate CTEs using multivariate quantile vectors. A relationship among multivariate CTEs is also derived by extending univariate CTEs. Multivariate CTEs are obtained from bivariate and trivariate normal distributions; in addition, relationships among multivariate CTEs are also explored. We then discuss the extensibility to high dimension as well as illustrate some examples. Multivariate CTEs (using variance-covariance matrix and multivariate quantile vector) are found to have smaller values than CTEs transformed to univariate. Therefore, it can be concluded that the proposed multivariate CTEs provides smaller estimates that represent less risk than others and that a drastic investment using this CTE is also possible when a diversified investment strategy includes many companies in a portfolio.

Keywords: loss, portfolio, quantile, risk, VaR

---

## 1. 서론

시장위험을 측정하기 위하여 Jorion (2007)은 금리, 주가, 환율 등 기초적 시장가격들에 대해 주어진 신뢰수준 내에서 목표기간 내에 걸쳐 발생할 수 있는 최대손실률을 추정하는 Value at Risk(VaR)를 제안하였다. 손실률의 반대 개념인 이익률 그리고 손실률과 이익률에 초기투자금액을 곱한 손실금액과 이익금액에 대하여는 생략하고, 본 연구에서는 손실률에 대하여만 논의한다. 유의수준  $\alpha$ 에 대응하는 VaR는  $VaR_\alpha$ 로 표기하며, 우측꼬리  $\alpha \in (0, 1)$ 에 대응하는  $\min\{z \mid F_X(z) \geq 1 - \alpha\}$ 로 정의한다 (Sarykalin 등, 2008). 정규분포 가정에서  $1 - \alpha$ 의 신뢰수준에 해당하는 손실률의 임계값은  $z_\alpha = (VaR_\alpha - \mu)/\sigma$ 이며, 여기서  $\mu$ 와  $\sigma$ 는 손실률의 모평균과 모표준편차이다. 이를  $VaR_\alpha$ 에 대해 정리하면  $VaR_\alpha = \mu + z_\alpha\sigma$ 이다 (Andersson 등, 2001; Krokmal 등, 2002; Berkowitz 등, 2011). VaR에 관한 연구는 Neftci (2000), Hong과 Kwon (2010), Hong과 Lee (2011a, 2011b), Seo와 Kim (2010), Heo 등 (2012), Kang 등 (2013), Yeo와 Li (2015) 등을 참조바란다.

Artzner 등 (1999)는 VaR의 한계점에 대하여 언급하고 이를 보완할 수 있는 위험측정방법으로서 Con-

---

<sup>1</sup>Corresponding author: Department of Statistics, Sungkyunkwan University, 25-2, Sungkyunkwan-ro, Jongno-gu, Seoul 03063, Korea. E-mail: [cshong@skku.edu](mailto:cshong@skku.edu)

ditional Tail Expectation(CTE)를 제안하였다. CTE는 Conditional Value at Risk(CVaR) 혹은 Expected Shortfall(ES)와 혼용해서 사용하기도 한다. 위험의 측도로서 VaR는 특정한 투자가 성공하지 못해 발생하는 손실금액에 대하여는 어떠한 예측과 검정을 할 수 없으나, 위험의 대안적인 측도로 CTE는 VaR를 초과하는 손실이 발생할 경우에 손실에 대한 조건부 기대값을 의미하며  $CTE_\alpha$ 로 표기한다 (Rockafellar와 Uryasev, 2000; Andersson 등, 2001; Acerbi와 Tasche, 2002; Krokmal 등, 2002; Topaloglou 등, 2002).

$$CTE_\alpha = \int_{VaR_\alpha}^{\infty} x dF_X^\alpha(x), \quad (1.1)$$

여기서  $F_X^\alpha(x) = \{F_X(x) - (1 - \alpha)\}/\alpha$ ,  $x \geq VaR_\alpha$ 이다. 그리고  $CTE_\alpha^-$ 와  $CTE_\alpha^+$ 는 다음과 같이 정의하고  $VaR_\alpha \leq CTE_\alpha^+ \leq CTE_\alpha \leq CTE_\alpha^-$ 의 관계를 갖는다.

$$CTE_\alpha^- = E[X|X > VaR_\alpha], \quad CTE_\alpha^+ = E[X|X \geq VaR_\alpha].$$

연속형 분포일 때는  $CTE_\alpha^-$ 와  $CTE_\alpha$  그리고  $CTE_\alpha^+$ 가 모두 동일하지만, 이산형 분포일 때 차이가 생긴다. 또한  $CTE_\alpha$ 는 식 (1.2)로 표현가능하다 (자세한 설명은 Sarykalin 등, 2008 참조).

$$CTE_\alpha^+ = \lambda VaR_\alpha + (1 - \lambda)CTE_\alpha, \quad (1.2)$$

여기서  $\lambda = \{F_X(VaR_\alpha) - (1 - \alpha)\}/\alpha$ .

Longin (2000, 2001)는 다차원분포에서의 VaR의 추정에 대하여 제안하였다. 손실률을 따르는 확률변수의 벡터  $\underline{X} = (X_1, \dots, X_k)^T$ 가 다변량 정규분포  $N(\underline{\mu}, \Sigma)$ 를 따를 때, 특정한 포트폴리오에 대한 가중 값 벡터를  $\underline{w} = (w_1, \dots, w_k)^T$ 로 설정하면  $\underline{w}^T \underline{X} \sim N(\underline{w}^T \underline{\mu}, \underline{w}^T \Sigma \underline{w})$ 이므로  $\alpha$ 에 대응하는 다차원 손실률에 대한 VaR을  $VaR_\alpha = \underline{w}^T \underline{\mu} + z_\alpha \sqrt{\underline{w}^T \Sigma \underline{w}}$ 으로 정의하였다. 그리고 CTE(CVaR 또는 ES)를 연구한 많은 논문들은 다변량을 일변량으로 변환하여 추정하였다. 본 연구에서는 Hong 등 (2016)이 제안한 다변량 분위벡터(quantile vector)를 바탕으로 일변량 CTE를 다변량으로 확장하여 다변량 CTE를 추정하는 것을 제안한다. 두 종류의 다차원 CTE를 정의하고 이들의 관계식을 일반적인 다차원으로 확장하여 일차원에서의 관계식과의 차이를 설명한다. 그리고 모의실험과 실증예제를 통하여 다변량으로 확장한 CTE 이론의 활용성에 대하여 살펴보고 특징을 토론한다.

본 논문의 2장에서 다변량 분위벡터를 이용하여 다차원에서의 CTE를 정의하고, CTE들 간의 관계식에 대해 살펴본다. 3장에서는 이변량과 삼변량 정규분포에서 그리고 다양한 분산-공분산행렬에 관한 CTE에 대해 탐색하고 설명한다. 4장에서는 실증예제를 이용하여 기존의 CTE와 다변량 CTE를 구하여 비교 분석한다. 마지막 5장은 본 연구에서 제안한 방법의 장점과 활용성에 대한 결과를 유도한다.

## 2. 다차원에서의 CTE

### 2.1. 다변량 CTE

기존의  $CTE_\alpha$ 는 다차원에서의 위험도 기대값을 일차원으로 추정하였으나 본 연구에서는 다변량 분위벡터를 응용한 다변량  $CTE_\alpha$ 를 제안한다. Hong 등 (2016)이 제안한 다변량  $1 - \alpha$  분위벡터  $\underline{z}_\alpha = (z_{1\alpha}, \dots, z_{k\alpha})^T$ 는 다음 두 조건을 만족해야 한다.

- 분위벡터에 속한 모든 점에 대한 누적분포함수(cumulative distribution function; CDF)는 모두 동일한 값  $p_\alpha$ 를 갖는다.

$$\forall (z_1, \dots, z_k) \in \underline{z}_\alpha, \quad F(z_1, \dots, z_k) = p_\alpha.$$

- $1 - \alpha$  분위벡터의 우상향 영역(right and upper region)  $R^k$ 에 대응하는 확률은  $\alpha$ 이다.

$$P\left[(x_1, \dots, x_k) \in R^k\right] = \int \cdots \int_{(x_1, \dots, x_k) \in R^k} dF(x_1, \dots, x_k) = \alpha,$$

여기서  $F(\cdot, \dots, \cdot)$ 는  $k$ 변량 누적분포함수이다.  $1 - \alpha$  분위벡터  $z_\alpha$ 는 주어진  $p_\alpha \in (0, 1)$ 와  $i = 1, \dots, k$ 에 대하여  $z_{i\alpha} = \min\{x_i | F(x_1, \dots, x_k) \geq p_\alpha, \forall x_j \text{ and } j \neq i\}$ 로 구할 수 있다.

임의의  $\alpha \in (0, 1)$ 와  $1 - \alpha$  분위벡터  $z_\alpha$ 를 이용하여 다차원으로 확장한 것을  $\text{VaR}_\alpha = \mu + \sqrt{\text{diag}(\Sigma)} z_\alpha$ 라고 제안하였다.  $\text{VaR}_\alpha$ 를 통해 CTE를 구하면 벡터 형태의  $\text{CTE}_\alpha$ 라 표현한다. 일변량과 유사하게  $\alpha$ 에 대응하는 정확한  $\text{CTE}_\alpha$ 를 구하기가 쉽지 않으므로 다변량에서 계산이 용이한  $\text{CTE}_\alpha^+$ 와  $\text{CTE}_\alpha^-$ 를 이용하고자 한다. 우선  $\alpha^+$ 와  $\alpha^-$  그리고  $F^{\alpha^+}(x_1, \dots, x_k)$ 와  $F^{\alpha^-}(x_1, \dots, x_k)$ 를 정의한다.

**정의 2.1**  $R^{k+}$ 는  $\text{VaR}_\alpha$ 가 포함된 우상향 공간이고,  $R^{k-}$ 는  $\text{VaR}_\alpha$ 가 포함되지 않은 우상향 공간으로 정의할 때,  $\alpha^+$ 와  $\alpha^-$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$\alpha^+ = P\left[(x_1, \dots, x_k) \in R^{k+}\right], \quad \alpha^- = P\left[(x_1, \dots, x_k) \in R^{k-}\right].$$

$R^{k+}$ 와  $R^{k-}$ 에 대응하는,  $F^{\alpha^+}(x_1, \dots, x_k)$ 와  $F^{\alpha^-}(x_1, \dots, x_k)$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$F^{\alpha^+}(x_1, \dots, x_k) = \frac{F(x_1, \dots, x_k) - (1 - \alpha^+)}{\alpha^+}, \quad (x_1, \dots, x_k) \in R^{k+},$$

$$F^{\alpha^-}(x_1, \dots, x_k) = \frac{F(x_1, \dots, x_k) - (1 - \alpha^-)}{\alpha^-}, \quad (x_1, \dots, x_k) \in R^{k-}.$$

$F^{\alpha^+}(x_1, \dots, x_k)$ 는  $\text{VaR}_\alpha$ 를 포함한 공간  $R^{k+}$ 에 대해서 조건부 누적분포함수이다. 그러므로  $\text{CTE}_\alpha^+$ 은 각 변량들의  $\text{VaR}_\alpha$ 를 포함한 값부터 그 이후의 값들의 기대값이고,  $\text{CTE}_\alpha^-$ 은  $\text{VaR}_\alpha$ 를 포함하지 않은 그 이후의 값들의 기대값이다.

**정의 2.2**  $\text{CTE}_\alpha^+ = (\text{CTE}_{1,\alpha}^+, \dots, \text{CTE}_{k,\alpha}^+)^T$ 와  $\text{CTE}_\alpha^- = (\text{CTE}_{1,\alpha}^-, \dots, \text{CTE}_{k,\alpha}^-)^T$ 는 다음과 같이 정의한다. 모든  $j = 1, \dots, k$ 에 대하여,

$$\text{CTE}_{j,\alpha}^+ = \int \cdots \int_{(x_1, \dots, x_k) \in R^{k+}} x_j dF^{\alpha^+}(x_1, \dots, x_k),$$

$$\text{CTE}_{j,\alpha}^- = \int \cdots \int_{(x_1, \dots, x_k) \in R^{k-}} x_j dF^{\alpha^-}(x_1, \dots, x_k).$$

확률변수  $X$ 와  $Y$ 인 이변량에서는  $\alpha^+ = P[(x, y) \in R^{2+}]$ 와  $\alpha^- = P[(x, y) \in R^{2-}]$ 에 대하여,  $\text{CTE}_\alpha^+ = (\text{CTE}_{1,\alpha}^+, \text{CTE}_{2,\alpha}^+)^T$ 와  $\text{CTE}_\alpha^- = (\text{CTE}_{1,\alpha}^-, \text{CTE}_{2,\alpha}^-)^T$ 는 다음과 같이 설명한다.

$$\text{CTE}_{1,\alpha}^+ = \iint_{(x,y) \in R^{2+}} x dF^{\alpha^+}(x, y), \quad \text{CTE}_{2,\alpha}^+ = \iint_{(x,y) \in R^{2+}} y dF^{\alpha^+}(x, y),$$

$$\text{CTE}_{1,\alpha}^- = \iint_{(x,y) \in R^{2-}} x dF^{\alpha^-}(x, y), \quad \text{CTE}_{2,\alpha}^- = \iint_{(x,y) \in R^{2-}} y dF^{\alpha^-}(x, y).$$

### 2.2. 다변량에서의 CTE 관계식

일변량 CTE 관계식 (1.2)를 확장하여 정리 2.1과 같은 다변량에서의 CTE 관계식을 유도한다. 식 (1.2)에서는  $\text{CTE}_\alpha^+$ 와  $\text{VaR}_\alpha$ ,  $\text{CTE}_\alpha^-$ 사이의 관계이고  $\lambda = \{F_X(\text{VaR}_\alpha) - (1 - \alpha)\} / \alpha$ 이지만, 다변량 CTE 관계식에서는  $\text{CTE}_\alpha^+$ 를  $\text{CTE}_\alpha^-$  그리고  $E(\text{VaR}_\alpha)$ 로 구성되어 있으며,  $\lambda$ 를  $(\alpha^+ - \alpha^-) / \alpha^+$ 로 정의한 것이 차이점이다.  $\text{CTE}_\alpha^+$ 와  $\text{CTE}_\alpha^-$ 는 이산형에서 구별되므로, 다음부터는 이산형 분포를 가정하여  $\int$  대신  $\sum$ 로 표기한다.

## 정리 2.1

$$\underline{\text{CTE}}_{\alpha}^{+} = \lambda E(\text{VaR}_{\alpha}) + (1 - \lambda) \underline{\text{CTE}}_{\alpha}^{-},$$

여기서  $\lambda = (\alpha^{+} - \alpha^{-})/\alpha^{+}$ 이다.

증명: 모든  $j = 1, \dots, k$ 에 대하여  $\text{CTE}_{j,\alpha}^{+} = \lambda \times E(\text{VaR}_{j,\alpha}) + (1 - \lambda) \times \text{CTE}_{j,\alpha}^{-}$ 이며,

$$\begin{aligned} \text{CTE}_{j,\alpha}^{+} &= \frac{\sum \cdots \sum_{(x_1, \dots, x_k) \in R^{k+}} x_j f(x_1, \dots, x_k)}{\sum \cdots \sum_{(x_1, \dots, x_k) \in R^{k+}} f(x_1, \dots, x_k)} = \frac{\sum \cdots \sum_{(x_1, \dots, x_k) \in R^{k+}} x_j f(x_1, \dots, x_k)}{\alpha^{+}}, \\ \text{CTE}_{j,\alpha}^{-} &= \frac{\sum \cdots \sum_{(x_1, \dots, x_k) \in R^{k-}} x_j f(x_1, \dots, x_k)}{\sum \cdots \sum_{(x_1, \dots, x_k) \in R^{k-}} f(x_1, \dots, x_k)} = \frac{\sum \cdots \sum_{(x_1, \dots, x_k) \in R^{k-}} x_j f(x_1, \dots, x_k)}{\alpha^{-}}, \\ E(\text{VaR}_{j,\alpha}) &= \frac{\sum \cdots \sum_{(x_1, \dots, x_k) \in R^{k+} - R^{k-}} x_j f(x_1, \dots, x_k)}{\sum \cdots \sum_{(x_1, \dots, x_k) \in R^{k+} - R^{k-}} f(x_1, \dots, x_k)}, \quad \lambda = \frac{\alpha^{+} - \alpha^{-}}{\alpha^{+}} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= \lambda E(\text{VaR}_{j,\alpha}) + (1 - \lambda) \text{CTE}_{j,\alpha}^{-} \\ &= \frac{\alpha^{+} - \alpha^{-}}{\alpha^{+}} \times \frac{\sum \cdots \sum_{(x_1, \dots, x_k) \in R^{k+} - R^{k-}} x_j f(x_1, \dots, x_k)}{\alpha^{+} - \alpha^{-}} + \frac{\alpha^{-}}{\alpha^{+}} \times \frac{\sum \cdots \sum_{(x_1, \dots, x_k) \in R^{k-}} x_j f(x_1, \dots, x_k)}{\alpha^{-}} \\ &= \frac{\sum \cdots \sum_{(x_1, \dots, x_k) \in R^{k+} - R^{k-}} x_j f(x_1, \dots, x_k)}{\alpha^{+}} + \frac{\sum \cdots \sum_{(x_1, \dots, x_k) \in R^{k-}} x_j f(x_1, \dots, x_k)}{\alpha^{+}} \\ &= \frac{\sum \cdots \sum_{(x_1, \dots, x_k) \in R^{k+}} x_j f(x_1, \dots, x_k)}{\alpha^{+}} = \text{LHS} \end{aligned}$$

이다. □

정리 2.1에서의 관계식을 일변량에서 살펴보면,  $\alpha^{-} = \sum_{x \in R^{-}} f(x)$ ,  $\alpha^{+} = \sum_{x \in R^{+}} f(x)$ 이며  $R^{-} = \{x \mid x < \text{VaR}_{\alpha}\}$ ,  $R^{+} = \{x \mid x \geq \text{VaR}_{\alpha}\}$ 로 표현된다.  $\text{CTE}_{\alpha}^{+}$ ,  $\text{CTE}_{\alpha}^{-}$  그리고  $E(\text{VaR}_{\alpha})$ 는 각각  $\text{CTE}_{\alpha}^{+} = \sum_{x \in R^{+}} xf(x)/\alpha^{+}$ ,  $\text{CTE}_{\alpha}^{-} = \sum_{x \in R^{-}} xf(x)/\alpha^{-}$ ,  $E(\text{VaR}_{\alpha}) = \sum_{x \in R^{+} - R^{-}} xf(x)/(\alpha^{+} - \alpha^{-})$ 이므로

$$\text{RHS} = \frac{\alpha^{+} - \alpha^{-}}{\alpha^{+}} \times \frac{\sum_{x \in R^{+} - R^{-}} xf(x)}{\alpha^{+} - \alpha^{-}} + \left(1 - \frac{\alpha^{+} - \alpha^{-}}{\alpha^{+}}\right) \frac{\sum_{x \in R^{-}} xf(x)}{\alpha^{-}} = \sum_{x \in R^{+}} \frac{xf(x)}{\alpha^{+}} = \text{LHS}$$

일변량에서는  $E(\text{VaR}_{\alpha}) = \sum_{x \in R^{+} - R^{-}} xf(x)/(\alpha^{+} - \alpha^{-}) = \text{VaR}_{\alpha} \times (\alpha^{+} - \alpha^{-})/(\alpha^{+} - \alpha^{-}) = \text{VaR}_{\alpha}$ 이다. 일변량의 CTE 관계식에서는  $\text{VaR}_{\alpha}$ 가 사용됐지만, 다변량에서 정의된 CTE 관계식에서는  $E(\text{VaR}_{\alpha})$ 를 이용하여 식이 유도된다.

### 3. 다변량 정규분포에서의 CTE

#### 3.1. 이변량 정규분포에서의 CTE

이변량 정규분포  $\text{VaR}(X) = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ 로부터 본 연구에서 정의한 다변량 CTE를  $\rho$ 값에 따라서 구해본다. 연속형 정규분포에서  $\alpha$ 에 대한 정확한 분위벡터는 존재하는 경우가 매우 드물기 때문에  $\alpha^{+}$ 와  $\alpha^{-}$ 를 각각 0.055와 0.045로 크게 설정하여 계산하였다. 그러면  $\alpha^{+}$ 와  $\alpha^{-}$ 에 대응하는 영역이  $R^{k+}$ 와  $R^{k-}$ 의 차이도 커지며  $\lambda$ 도 따라서 큰 값을 갖는다.  $\rho$ 는 -0.6부터 0.6까지 0.3 단위로 나누어 구현한다.  $\underline{\text{CTE}}_{\alpha}^{+}$ ,  $\underline{\text{CTE}}_{\alpha}^{-}$  그리고  $E(\text{VaR}_{\alpha})$ 를 각각 계산하였으며, 이들의 관계식이 성립함을 확인한다.

**Table 3.1.**  $\underline{\text{CTE}}_{\alpha}^{+}, \underline{\text{CTE}}_{\alpha}^{-}, E(\text{VaR}_{\alpha})$  when  $\rho = 0$

$\underline{\text{CTE}}_{\alpha}^{+}$	(1.367169, 1.367169)
$\underline{\text{CTE}}_{\alpha}^{-}$	(1.427909, 1.427909)
$E(\text{VaR}_{\alpha})$	(1.110232, 1.110232)

**Table 3.2.**  $\lambda, \underline{\text{CTE}}_{\alpha}^{+}, \underline{\text{CTE}}_{\alpha}^{-}, E(\text{VaR}_{\alpha})$  with  $\rho$

	$\lambda$	$\underline{\text{CTE}}_{\alpha}^{+}$	$\underline{\text{CTE}}_{\alpha}^{-}$	$E(\text{VaR}_{\alpha})$
$\rho = 0.9$	0.1821	(1.9580, 1.9580)	(2.0393, 2.0393)	(1.5931, 1.5931)
$\rho = 0.6$	0.1782	(1.7742, 1.7742)	(1.8463, 1.8463)	(1.4418, 1.4418)
$\rho = 0.3$	0.1777	(1.5818, 1.5818)	(1.6462, 1.6462)	(1.2842, 1.2842)
$\rho = 0.0$	0.1912	(1.3672, 1.3672)	(1.4279, 1.4279)	(1.1102, 1.1102)
$\rho = -0.3$	0.1781	(1.1303, 1.1303)	(1.1772, 1.1772)	(0.9143, 0.9143)
$\rho = -0.6$	0.1770	(0.8424, 0.8424)	(0.8771, 0.8771)	(0.6810, 0.6810)
$\rho = -0.9$	0.1855	(0.4128, 0.4128)	(0.4313, 0.4313)	(0.3319, 0.3319)

먼저  $\rho = 0$  일 때를 살펴보면 Table 3.1과 같다.  $\alpha^{+} = 0.055, \alpha^{-} = 0.045$  일 때  $\lambda$ 는 0.1912이고, 이를 통해서  $\underline{\text{CTE}}_{\alpha}^{+}$ 는  $E(\text{VaR}_{\alpha})$ 와  $\underline{\text{CTE}}_{\alpha}^{-}$ 를 0.19:0.81의 가중값을 주어서 구할 수 있다. 즉 두 변량의 값이 같은 직선 위에서 0.81:0.19 비율의 내분점으로 나타난다. 또한 94.5%의 위험도( $\alpha^{+} = 0.055$ )의 기대값은 1.3672이며, 95.5%의 위험도( $\alpha^{-} = 0.045$ )의 기대값은 1.4279이다. 이를 통해서 95%의 위험도 기대값은 1.3672와 1.4279 사이의 값이 된다. 이때  $\underline{\text{CTE}}_{\alpha}^{+}, \underline{\text{CTE}}_{\alpha}^{-}, E(\text{VaR}_{\alpha})$ 는 모두 두 변량의 값이 같은 직선 위에 있음을 파악할 수 있다.

또한  $E(\text{VaR}_{j,\alpha}) < \underline{\text{CTE}}_{j,\alpha}^{+} < \underline{\text{CTE}}_{j,\alpha}^{-}$ 의 관계를 따르며, 다변량 CTE들 관계식이 성립하는데 첫 번째 변수에 대하여는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{CTE}_{1,\alpha}^{+} &= \lambda \times E(\text{VaR}_{1,\alpha}) + (1 - \lambda) \times \text{CTE}_{1,\alpha}^{-}, \\ 1.367169 &= 0.1912021 \times 1.110232 + (1 - 0.1912021) \times 1.427909. \end{aligned}$$

추가적으로  $\rho$ 값을 0.3 단위로  $-0.9$ 부터  $0.9$ 까지 변환하며 계산해 보면, 전체적으로  $\lambda$ 는 0.17-0.19로  $\rho$ 값에 따라 크게 변하지 않으며,  $\rho$ 값이 커짐에 따라  $R^{2+}$ 와  $R^{2-}$ 의 범위가 점점 작아진다. 또한 각  $\rho$ 에 따라 두 변량의  $\underline{\text{CTE}}_{\alpha}^{+}, \underline{\text{CTE}}_{\alpha}^{-}, E(\text{VaR}_{\alpha})$  값들이 항상 같음을 파악할 수 있었다. 결과를 정리하면 Table 3.2와 같다.

Table 3.2에서 두 변량에 따른 결과값이 항상 같기 때문에 변수  $X$ 에 대해서만 Figure 3.1에 표현하였다. 이를 살펴보면  $\rho$  값이 커짐에 따라  $E(\text{VaR}_{x,\alpha}), \text{CTE}_{x,\alpha}^{+}, \text{CTE}_{x,\alpha}^{-}$ 들이 커지며, 같은  $\rho$ 에서 세 측도 간의 차이 또한 커진다. 특히  $E(\text{VaR}_{x,\alpha})$ 와  $\text{CTE}_{x,\alpha}^{+}$ 간의 차이가 커지는데, 이는 가중값을 나타내는  $\lambda$ 의 변화는 미미하지만,  $\text{CTE}_{x,\alpha}^{+}, \text{CTE}_{x,\alpha}^{-}, E(\text{VaR}_{x,\alpha})$ 들이 커지기 때문이다.

**3.2. 삼변량 정규분포에서의 CTE**

삼변량 정규분포의 다음과 같은 분산-공분산행렬에서  $k = 0.8, 1.0, 1.2$  그리고  $\rho$ 는  $-0.6$ 부터  $0.6$ 까지 0.3 단위로 나누어 살펴본다.

$$\text{VaR}(\underline{X}) = \begin{pmatrix} k^2 & \rho k & \rho^2 k^2 \\ \rho k & 1 & \rho k \\ \rho^2 k^2 & \rho k & k^2 \end{pmatrix},$$

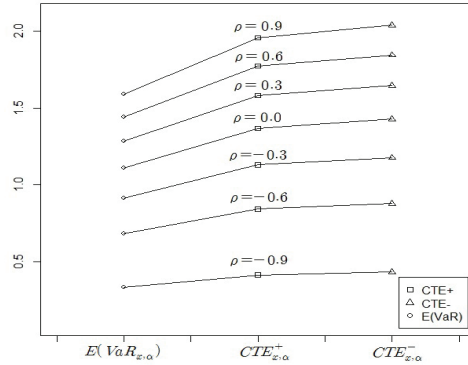


Figure 3.1.  $CTE_{x,\alpha}^+$ ,  $CTE_{x,\alpha}^-$ ,  $E(VaR_{x,\alpha})$  with  $\rho$ .

Table 3.3.  $\lambda$ ,  $CTE_{\alpha}^+$ ,  $CTE_{\alpha}^-$ ,  $E(VaR_{\alpha})$  when  $k = 1.0$

	$\lambda$	$CTE_{\alpha}^+$	$CTE_{\alpha}^-$	$E(VaR_{\alpha})$
$\rho = 0.6$	0.0731	(1.6033, 1.7150, 1.6037)	(1.6293, 1.7445, 1.6293)	(1.2744, 1.3395, 1.2785)
$\rho = 0.3$	0.0841	(1.3329, 1.4223, 1.3329)	(1.3580, 1.4492, 1.3580)	(1.0589, 1.1286, 1.0589)
$\rho = 0.0$	0.0759	(1.1139, 1.1139, 1.1139)	(1.1312, 1.1312, 1.1312)	(0.9023, 0.9023, 0.9023)
$\rho = -0.3$	0.0760	(0.9171, 0.8095, 0.9174)	(0.9308, 0.8246, 0.9308)	(0.7512, 0.6267, 0.7549)
$\rho = -0.6$	0.0768	(0.7010, 0.5276, 0.7003)	(0.7143, 0.5339, 0.7144)	(0.5415, 0.4518, 0.5306)

Table 3.4.  $\lambda$ ,  $CTE_{\alpha}^+$ ,  $CTE_{\alpha}^-$ ,  $E(VaR_{\alpha})$  when  $k = 0.8$

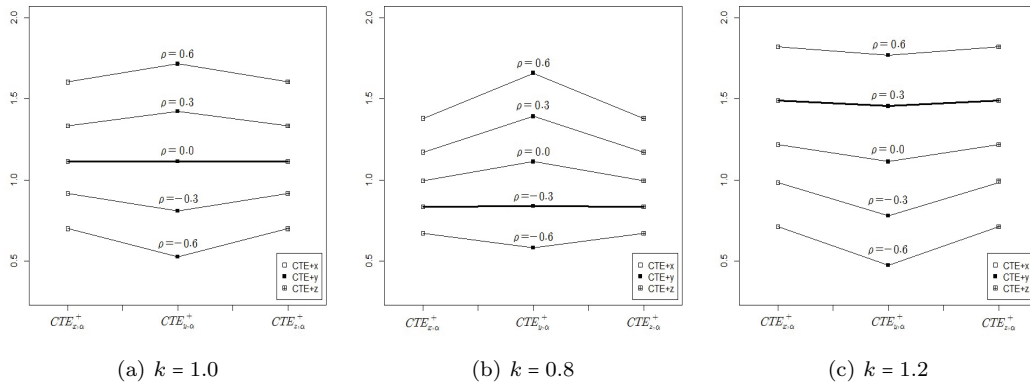
	$\lambda$	$CTE_{\alpha}^+$	$CTE_{\alpha}^-$	$E(VaR_{\alpha})$
$\rho = 0.6$	0.0742	(1.3797, 1.6577, 1.3797)	(1.4016, 1.6801, 1.4017)	(1.1062, 1.3789, 1.1115)
$\rho = 0.3$	0.0799	(1.1712, 1.3918, 1.1712)	(1.1905, 1.4159, 1.1905)	(0.9490, 1.1133, 0.9490)
$\rho = 0.0$	0.0799	(0.9956, 1.1125, 0.9956)	(1.0133, 1.1306, 1.0133)	(0.7922, 0.9905, 0.7922)
$\rho = -0.3$	0.0852	(0.8367, 0.8401, 0.8367)	(0.8528, 0.8563, 0.8524)	(0.6642, 0.6663, 0.6680)
$\rho = -0.6$	0.0779	(0.6725, 0.5842, 0.6725)	(0.6836, 0.5943, 0.6833)	(0.5407, 0.4649, 0.5445)

여기서  $\alpha^+ = 0.052$ ,  $\alpha^- = 0.048$ 로 설정하여  $CTE_{\alpha}^+$ ,  $CTE_{\alpha}^-$ ,  $E(VaR_{\alpha})$ 를 계산하고, 이들의 관계식을 확인해 보았다.

$k = 1.0$ 이고,  $\rho = 0$ 일 때, 이전의 이변량 정규분포에서의 CTE와 같이 세 변량의 결과값들이 동일하다.  $E(VaR_{\alpha}) < CTE_{\alpha}^+ < CTE_{\alpha}^-$ 의 관계가 성립하며, 가중평균의 의미를 갖는  $\lambda$ 는 0.0759로,  $CTE_{\alpha}^+$ 를  $E(VaR_{\alpha})$ 와  $CTE_{\alpha}^-$ 에 0.08:0.92의 가중값을 주어 구할 수 있다. 즉 세 변량은 같은 직선 위의 0.92:0.08의 내분점으로 나타남을 의미한다. 94.8%의 위험도( $\alpha^+ = 0.052$ )의 기대값은 1.1139이며, 95.2%의 위험도( $\alpha^- = 0.048$ )의 기대값은 1.1312이다. 따라서 95%의 위험도 기대값은 각각 1.1139에서 1.1312 사이의 값이다.  $\rho$ 의 값에 따라 결과를 Table 3.3에 정리하였다.  $\rho = 0.3$ 일 때는  $CTE_{\alpha}^+$ ,  $CTE_{\alpha}^-$ ,  $E(VaR_{\alpha})$ 들이 두 변량값만 같으며,  $\rho = 0.6$ 일 때는 크진 않지만 세 변량값 모두 차이가 보인다.  $\rho = -0.3$ 부터 차이가 조금씩 더 커지게 된다. Figure 3.2(a)는  $k = 1.0$ 일 때,  $\rho$ 에 따른  $CTE_{x,\alpha}^+$ ,  $CTE_{y,\alpha}^+$ ,  $CTE_{z,\alpha}^+$  값들을 나타낸 그림인데,  $\rho$ 가 커질수록 세 변량값들이 커지게 되며,  $\rho$ 가 0일 때는  $CTE_{x,\alpha}^+ = CT E_{y,\alpha}^+ = CT E_{z,\alpha}^+$  이지만,  $\rho$ 가 0보다 작은 경우에는  $CT E_{y,\alpha}^+ \leq CT E_{x,\alpha}^+ \leq CT E_{z,\alpha}^+$ 이며,  $\rho$ 가 0보다 큰 경우에는  $CT E_{x,\alpha}^+ \leq CT E_{z,\alpha}^+ \leq CT E_{y,\alpha}^+$ 이다. 또한  $\rho = 0$ 을 기준으로 커지거나 작아질수록  $CT E_{x,\alpha}^+$ ,  $CT E_{z,\alpha}^+$ 와  $CT E_{y,\alpha}^+$ 의 차이가 커진다.

**Table 3.5.**  $\lambda$ ,  $\underline{CTE}_\alpha^+$ ,  $\underline{CTE}_\alpha^-$ ,  $E(\text{VaR}_\alpha)$  when  $k = 1.2$

	$\lambda$	$\underline{CTE}_\alpha^+$	$\underline{CTE}_\alpha^-$	$E(\text{VaR}_\alpha)$
$\rho = 0.6$	0.0782	(1.8199, 1.7681, 1.8203)	(1.8498, 1.7949, 1.8498)	(1.4676, 1.4520, 1.4721)
$\rho = 0.3$	0.0757	(1.4894, 1.4550, 1.4894)	(1.5131, 1.4765, 1.5131)	(1.2003, 1.1925, 1.2003)
$\rho = 0.0$	0.0808	(1.2176, 1.1133, 1.2176)	(1.2396, 1.1321, 1.2396)	(0.9672, 0.8993, 0.9672)
$\rho = -0.3$	0.0775	(0.9838, 0.7807, 0.9838)	(0.9995, 0.7947, 0.9995)	(0.7965, 0.6156, 0.7967)
$\rho = -0.6$	0.0705	(0.7137, 0.4750, 0.7137)	(0.7257, 0.4805, 0.7258)	(0.5561, 0.4023, 0.5586)



**Figure 3.2.**  $\underline{CTE}_\alpha^+$  with  $\rho$ .

$k = 0.8$ 의  $\rho = 0$ 일 때,  $E(\text{VaR}_\alpha) < \underline{CTE}_\alpha^+ < \underline{CTE}_\alpha^-$ 이며,  $\lambda$ 는 0.0799로,  $\underline{CTE}_\alpha^+$ 를  $E(\text{VaR}_\alpha)$ 와  $\underline{CTE}_\alpha^-$ 에 0.08 : 0.92의 가중값을 통해 구해진다.  $\rho$ 의 값에 따라 계산 결과를 정리하면 Table 3.4와 같다.  $\underline{CTE}_\alpha^+$ ,  $\underline{CTE}_\alpha^-$ ,  $E(\text{VaR}_\alpha)$ 는  $\rho = 0$ 과 0.3에서 두 변량값만 같아진다.  $\rho = 0.6$ 일 때  $\underline{CTE}_\alpha^+$ 는 두 변량이 같은 값을 보이지만,  $E(\text{VaR}_\alpha)$ 와  $\underline{CTE}_\alpha^-$ 는 차이가 발생한다. 그리고  $\rho = -0.3, -0.6$ 일 때는 세 변량값 모두 차이를 보인다. Figure 3.2(b)는  $k = 0.8$ 일 때,  $\rho$ 에 따른  $\underline{CTE}_{x,\alpha}^+, \underline{CTE}_{y,\alpha}^+, \underline{CTE}_{z,\alpha}^+$  값들을 나타낸 그림인데,  $k = 1.0$ 과 마찬가지로  $\rho$ 가 커짐에 따라 세 변량값 모두 커지며,  $\rho$ 가  $-0.3$ 일 때는  $\underline{CTE}_{x,\alpha}^+ = \underline{CTE}_{y,\alpha}^+ = \underline{CTE}_{z,\alpha}^+$ 이지만,  $\rho$ 가  $-0.3$ 보다 작은 경우에는  $\underline{CTE}_{y,\alpha}^+ < \underline{CTE}_{x,\alpha}^+ \leq \underline{CTE}_{z,\alpha}^+$ 이며,  $\rho$ 가  $-0.3$ 보다 큰 경우에는  $\underline{CTE}_{x,\alpha}^+ < \underline{CTE}_{z,\alpha}^+ < \underline{CTE}_{y,\alpha}^+$ 이다.  $k = 1.0$ 과 다르게  $\rho = -0.3$ 을 기준으로 커지거나 작아질수록  $\underline{CTE}_{x,\alpha}^+, \underline{CTE}_{z,\alpha}^+$ 와  $\underline{CTE}_{y,\alpha}^+$ 의 차이가 커진다

$k = 1.2$ 이며  $\rho = 0$ 일 때,  $E(\text{VaR}_\alpha) < \underline{CTE}_\alpha^+ < \underline{CTE}_\alpha^-$ 이며,  $\lambda$ 는 0.0808로,  $\underline{CTE}_\alpha^+$ 를  $E(\text{VaR}_\alpha)$ 와  $\underline{CTE}_\alpha^-$ 에 0.08 : 0.92의 가중값을 통해 구해진다.  $\rho$ 의 값에 따라 결과를 Table 3.5에 정리하였다.  $\rho = 0$ 과 0.3일 때, 두 변량값이 같으며,  $\rho = 0.6$ 일 때는  $\underline{CTE}_\alpha^-$ 만 두 변량의이 같지만,  $E(\text{VaR}_\alpha)$ 와  $\underline{CTE}_\alpha^+$ 는 차이가 발생한다.  $\rho = -0.3, -0.6$ 일 때는 세 변량값 모두 차이를 보인다. Figure 3.2(c)는  $k = 0.8$ 일 때,  $\rho$ 에 따른  $\underline{CTE}_{x,\alpha}^+, \underline{CTE}_{y,\alpha}^+, \underline{CTE}_{z,\alpha}^+$ 들을 나타낸 그림인데,  $k = 1.0, 0.8$ 과 마찬가지로  $\rho$ 가 커짐에 따라 세 변량값 모두 커지지만, 이전과는 다르게 항상  $\underline{CTE}_{y,\alpha}^+ < \underline{CTE}_{x,\alpha}^+ \leq \underline{CTE}_{z,\alpha}^+$ 이다.  $\rho = 0.3$ 일 때, 차이가 가장 적으며  $\rho = 0.3$ 을 기준으로 커지거나 작아질수록 차이가 커진다.

이변량, 삼변량 정규분포에서의 CTE의 모의실험을 살펴보았는데 이를 기반으로 다변량 정규분포로 확장이 가능하다. 이변량 정규분포에서는 이변량 분위벡터가 이차원 좌표평면 위에서 곡선(curve) 형태를 띄며 나타났고, 삼변량 정규분포에서는 삼차원 좌표공간 위에서 곡면(surface) 형태를 띄며 나타났음을 알 수 있다. 이를 통해서 고차원의 분위벡터는 고차원 좌표공간 위에서 곡면 이상의 고차원적 도형의 형태로 확장 가능하다.  $\alpha$ 가 정확히 0.05인 분위벡터를 구하는 것은 어렵기 때문에 이변량, 삼변량 a.모의

**Table 4.1.**  $\underline{CTE}_\alpha^+$ ,  $\underline{CTE}_\alpha^-$ ,  $E(\text{VaR}_\alpha)$  of Samsung Electronics and Hyundai Car

$\underline{CTE}_\alpha^+$	(0.06497899, 0.06540305)
$\underline{CTE}_\alpha^-$	(0.06597049, 0.06639638)
$E(\text{VaR}_\alpha)$	(0.05243899, 0.05283989)

**Table 4.2.** Comparison of loss rate(%) by univariate and bivariate

	Univariate 94.8%	Bivariate 94.8%	Univariate 95.2%	Bivariate 95.2%
Samsung Electronics	7.84	6.50	7.95	6.60
Hyundai Car	7.88	6.54	8.01	6.64

실험과 마찬가지로  $\alpha^+$ 와  $\alpha^-$ 를 0.05 근처의 값으로 설정하여 분위벡터를 구하여  $R^{k+}$ 와  $R^{k-}$ 를 설정한다.  $R^{k+}$ 에서  $\underline{CTE}_\alpha^+$ 를  $R^{k-}$ 에서  $\underline{CTE}_\alpha^-$ 를 구하고  $R^{k+} - R^{k-}$ 에서  $E(\text{VaR}_\alpha)$ 를 구하고,  $\alpha^+$ 와  $\alpha^-$  그리고  $\lambda$ 를 계산한다. 마지막으로  $\underline{CTE}_\alpha^+$ 와  $\underline{CTE}_\alpha^-$ ,  $E(\text{VaR}_\alpha)$ 사이의 관계식을 유도한다.

## 4. 실증예제와 비교

### 4.1. 이변량 예제

3절에서 논의한 이변량, 삼변량 정규분포에 대한 CTE 연구를 실제 사례에 적용한다. 자료는 2002년도 기업들의 주식포트폴리오의 손실률에 관한 자료이다 (Park과 Jung, 2002). 우선 삼성전자와 현대자동차의 손실률 자료는 Park과 Jung (2002)의 가정과 동일하게 이변량 정규분포를 따른다고 가정한다. 이때 두 주식의 분산-공분산행렬이 매우 작은 값을 갖기 때문에 계산의 편의를 위해 각각의 변량에  $10^{3/2}$ 배를 하여 삼성전자와 현대차의 분산-공분산행렬을 다음과 같이 변환한 후,

$$\text{VaR} \begin{pmatrix} \text{Samsung Electronics} \\ \text{Hyundai Car} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.487 & 0.682 \\ 0.682 & 1.487 \end{pmatrix},$$

$\underline{CTE}_\alpha^+$ ,  $\underline{CTE}_\alpha^-$ ,  $E(\text{VaR}_\alpha)$ 를 계산하고  $10^{-3/2}$ 배를 함으로써 기존의 단위로 환원하는 방법을 택했다. 상관계수는 0.455이며, 이때  $\alpha^+ = 0.052$ ,  $\alpha^- = 0.048$ 에 따라  $\lambda$ 는 0.0733이고,  $\underline{CTE}_\alpha^+$ 는  $E(\text{VaR}_\alpha)$ 와  $\underline{CTE}_\alpha^-$ 를 0.07:0.93의 가중값을 주어서 Table 4.1에 구하였다.

94.8%의 위험도( $\alpha^+ = 0.052$ )로 삼성전자의 손실률 기대값은 6.50%, 현대차의 손실률 기대값은 6.54%이고, 95.2%의 위험도( $\alpha^- = 0.048$ )로 삼성전자의 손실률 기대값은 6.60%, 현대차의 손실률 기대값은 6.64%이다. 따라서 95%의 위험도로 삼성전자는 6.50%에서 6.60%의 손실률이 예상되며, 현대차는 6.54%에서 6.64%의 손실률이 예상된다. 기존의 일변량에서 정의된 CTE의 계산 결과는 Table 4.2에서와 같이 94.8%의 위험도( $\alpha^+ = 0.052$ )로 삼성전자는 7.84%, 현대차는 7.88%의 손실률이 기대되며, 95.2%의 위험도( $\alpha^- = 0.048$ )로 삼성전자는 7.95%, 현대차는 8.01%의 손실률이 기대된다. 기존의 CTE를 이용하면, 이변량 CTE를 통해 구한 계산 결과보다 큰 값을 얻는다. 일변량으로 추정된 삼성전자와 현대차 각각의 CTE보다 이변량 CTE 벡터 각각의 값이 크므로, 두 기업을 동시에 고려하는 투자 전략을 설정하여 포트폴리오를 구성함으로써 적극적인 투자가 가능할 수 있는 축소된 위험정도의 기대값을 제시해준다.

### 4.2. 삼변량 예제

삼변량 실증예제로 4.1절에서 사용한 자료 (Park과 Jung, 2002) 중에서 SK텔레콤, 포스코 그리고



**Table 4.3.**  $\underline{CTE}_{\alpha}^{+}$ ,  $\underline{CTE}_{\alpha}^{-}$ ,  $E(\text{VaR}_{\alpha})$  of SK Telecom, POSCO and KT

$\underline{CTE}_{\alpha}^{+}$	(0.05195977, 0.04680776, 0.04548988)
$\underline{CTE}_{\alpha}^{-}$	(0.05270555, 0.04765420, 0.04621879)
$E(\text{VaR}_{\alpha})$	(0.04290235, 0.03652781, 0.03663729)

**Table 4.4.** Comparison of loss rate(%) by univariate and trivariate

	Univariate 94.8%	Trivariate 94.8%	Univariate 95.2%	Trivariate 95.2%
SK Telecom	6.50	5.20	6.58	5.27
POSCO	5.99	4.68	6.07	4.77
KT	5.63	4.55	5.55	4.62

KT의 주식의 CTE에 대하여 계산해본다. SK텔레콤, 포스코, 그리고 KT의 손실률 자료도 4.1절과 유사하게 삼변량 정규분포를 따른다고 가정한다. 4.1절에서와 같은 방법을 통해 변환된 SK텔레콤, 포스코 그리고 KT의 분산-공분산행렬은 다음과 같으며 SK텔레콤과 포스코, 포스코와 KT, 그리고 SK텔레콤과 KT의 상관계수는 각각 0.418, 0.501, 그리고 0.603이다. 이때  $\alpha^{+} = 0.052$ ,  $\alpha^{-} = 0.048$ 에 따라  $\lambda$ 는 0.0761이고, 이를 통해서  $\underline{CTE}_{\alpha}^{+}$ 는  $E(\text{VaR}_{\alpha})$ 와  $\underline{CTE}_{\alpha}^{-}$ 를 0.08:0.92의 가중값을 주어서 구하고 Table 4.3에 정리하였다.

$$\text{VaR} \begin{pmatrix} \text{SK Telecom} \\ \text{POSCO} \\ \text{KT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.006 & 0.387 & 0.542 \\ 0.387 & 0.854 & 0.397 \\ 0.542 & 0.397 & 0.735 \end{pmatrix}.$$

94.8%의 위험도( $\alpha^{+} = 0.052$ )로 SK텔레콤, 포스코, KT의 손실률 기대값은 각각 5.20%, 4.68%, 4.55%로 해석할 수 있고, 95.2%의 위험도( $\alpha^{-} = 0.048$ )로 5.27%, 4.77%, 4.62%임을 파악할 수 있다. 따라서 95%의 위험도로 SK텔레콤의 손실률은 5.20%에서 5.27%, 포스코의 손실률은 4.68%에서 4.77%, KT의 손실률은 4.55%에서 4.62%의 손실률이 예상된다. 일변량에서 정의된 CTE는 Table 4.4에서와 같이 94.8%의 위험도( $\alpha^{+} = 0.052$ )로 SK텔레콤은 6.50%, 포스코는 5.99%, KT는 5.63%의 손실률이 기대되며, 95.2%의 위험도( $\alpha^{-} = 0.048$ )로 SK텔레콤은 6.58%, 포스코는 6.07%, KT는 5.55%의 손실률이 기대된다. SK텔레콤, 포스코 그리고 KT에 대응하는 삼변량 CTE 벡터 각각의 값이 일변량으로 추정된 각각의 CTE보다 작은 값으로 나타나므로, 세 기업을 동시에 고려하는 투자 전략을 설정하여 포트폴리오를 구성함으로써 적극적인 투자가 가능할 수 있는 적은 위험정도의 기대값을 제공한다. 또한 4.1절과 4.2절에서 얻은 CTE들의 관계식도 성립함을 확인할 수 있다.

## 5. 결론

시장위험 관리수단으로서의 VaR는 개념 이해의 용이성, 비선형적 움직임을 갖는 자산의 경우에 보다 정확한 위험 측정이 가능한 측면 등으로 인해 금융기관들이 가장 선호하는 기법 중의 하나이지만, 투자의 실패가 발생한 경우의 손실금액에 대하여는 어떠한 예측과 검정이 가능하지 않는다는 한계점이 있다. VaR를 초과하는 부분에 대한 조건부 기대값으로 정의되는 CTE는 VaR가 고려하지 못하는 신뢰수준을 벗어난 극단값까지도 고려하며 CTE가 위험측정 도구가 갖추어야 할 조건들을 충족시키고 있으므로 최근 연구는 VaR가 갖는 한계를 보완하는 적절한 대안적인 위험측정 도구로 CTE를 평가하고 있다.

현재사회에서는 특정한 한 기업(일변량 분포)의 CTE를 추정하기보다는 그 기업이 포함된 여러 기업들 내지는 국내 전체의 산업(다변량 분포)에 대하여 CTE를 추정할 필요가 있다. 기존의 CTE는 손실률

을 따르는 다변량 변수를 일변량 분포로 변환하여 VaR을 추정하고 CTE를 구하였지만, 본 연구에서는 Hong 등 (2016)이 정의한 다차원 분위벡터를 바탕으로 다차원 공간에서 정의되는 다변량 CTE를 제안하였다. 또한 CTE들의 관계식을 확장하여 다변량 CTE들의 관계를 설명하였다. 다양한 분산공분산 행렬을 갖는 다변량의 정규분포로부터 다변량 CTE들과 CTE들의 관계식을 구현하면서 다변량 분포로의 확장 가능성을 설명하였다.

이변량과 삼변량의 실증예제를 통해 본 연구에서 제안한 이론을 분석하고 확인하였으며, 기존의 CTE와 비교하였다. 기존의 다변량 자료에 대한 CTE는 가중값을 이용하여 일변량으로 변환하여 추정하였으나, 본 연구에서 제안한 다변량 CTE는 변수들의 상관관계 정도가 포함된 다변량 분위벡터를 사용하였기 때문에 보다 작은 CTE 추정값을 갖는다는 것을 발견하였다. 이런 현상은 Hong 등 (2016)이 제안한 대안적인 VaR(AVaR)보다 일변량으로 변화하여 추정한 VaR이 작은 값을 갖는 것과 일치한다. 그러므로 다변량 분위벡터를 바탕으로 본 연구에서 제안한 다변량 CTE의 추정량은 기존 방법을 사용한 CTE보다 작은 값을 갖기 때문에 위험성을 과소 추정하는 경향이 발생한다. 그러므로 포트폴리오를 구성하는 여러 기업을 동시에 고려하는 분산 투자를 고려할 때, 본 연구에서 제안한 방법을 사용하면 위험 정도를 적게 추정하고 따라서 긍정적이고 적극적인 투자 전략을 세울 수 있는 장점이 있다.

본 연구는 다변량 정규분포 하에서만 연구하였는데 현실 실제자료는 좌우 대칭에서 많이 벗어난 분포의 형태를 따른다 (Zangari, 1996; Li, 1999; Hong과 Kwon, 2010). 또한 본 연구에서는 다차원 변수로 구성된 전체 포트폴리오의 통합적인 다변량 CTE 벡터를 추정하였는데 실제로는 개별주식들의 특정한 가중값으로 이루어진 포트폴리오에 대한 CTE 추정의 필요성이 있다. 따라서 정규분포가 아닌 다변량 분포를 고려하고, 나아가 여러 기업에 대한 분산 투자 전략을 설정하기 위하여 특정한 포트폴리오의 구성이 설정된 경우에 대한 CTE 추정에 관한 연구는 향후 연구과제로 남기기로 한다.

## References

- Acerbi, C. and Tasche, D. (2002). Expected shortfall: a natural coherent alternative to VaR, *Economic Notes*, **31**, 379–388.
- Andersson, F., Mausser, H., Rosen, D., and Uryasev, S. (2001). Credit risk optimization with condition value-at-risk, *Mathematical Programming*, **89**, 273–291.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M., and Heath, D. (1999). Coherent measures of risk, *Mathematical Finance*, **9**, 203–228.
- Berkowitz, J., Christoffersen, P., and Pelletier, D. (2011). Evaluating value-at-risk models with desk-level data, *Management Science*, **57**, 2213–2227.
- Heo, S. J., Yeo, S. C., and Kang, T. H. (2012). Performance analysis of economic VaR estimation using risk neutral probability distributions, *Korean Journal of Applied Statistics*, **25**, 757–773.
- Hong, C. S., Han, S. J., and Lee, G. P. (2016). Vector at risk and alternative value at risk, *Korean Journal of Applied Statistics*, **29**, 689–697.
- Hong, C. S. and Kwon, T. W. (2010). Distribution fitting for the rate of return and value at risk, *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **21**, 219–229.
- Hong, C. S. and Lee, J. H. (2011a). VaR estimation of multivariate distribution using copula functions, *Korean Journal of Applied Statistics*, **24**, 523–533.
- Hong, C. S. and Lee, W. Y. (2011b). VaR estimation with multiple copula functions, *Korean Journal of Applied Statistics*, **24**, 809–820.
- Jorion, P. (2007). *Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk*, McGraw-Hill, New York.
- Kang, M., Kim, J., Song, J., and Song, S. (2013). Value at risk with peaks over threshold: comparison study of parameter estimation, *Korean Journal of Applied Statistics*, **26**, 483–494.
- Krokhmal, P., Palmquist, J., and Uryasev, S. (2002). Portfolio optimization with conditional value-at-risk

- objective and constraints, *Journal of Risk*, **4**, 43–68.
- Li, D. X. (1999). Value at risk based on the volatility skewness and kurtosis, *Working paper*, RiskMetrics Group, New York.
- Longin, F. M. (2000). From value at risk to stress testing: the extreme value approach, *Journal of Banking & Finance*, **24**, 1097–1130.
- Longin, F. M. (2001). Beyond the VaR, *Journal of Derivatives*, **8**, 36–48.
- Neftci, S. N. (2000). Value at risk calculations extreme events, and tail estimation, *Journal of Derivatives*, **7**, 23–37.
- Park, J. S. and Jung, M. S. (2002). Market risk management strategy for VaR, *Postal Information Review*, **50**, 81–104.
- Rockafellar, R. T. and Uryasev, S. (2000). Optimization of conditional value-at-risk, *Journal of Risk*, **2**, 21–41.
- Sarykalin, S., Serraino, G., and Uryasev, S. (2008). Value-at-risk vs. conditional value-at-risk in risk management and optimization, *Tutorials in Operations Research*, 270–294.
- Seo, S. H. and Kim, S. G. (2010). Estimation of VaR using extra losses, and back-testing: case study, *Korean Journal of Applied Statistics*, **23**, 219–234.
- Topaloglou, N., Vladimirov, H. and Zenios, S. A. (2002). CVaR models with selective hedging for international asset allocation, *Journal of Banking & Finance*, **26**, 1535–1561.
- Yeo, S. C. and Li, Z. (2015). Performance analysis of volatility models for estimating portfolio value at risk, *Korean Journal of Applied Statistics*, **28**, 541–599.
- Zangari, P. (1996). An improved methodology for measuring VaR, *RiskMetrics Monitor*, 2nd quarter, 7–25.

# 다변량 조건부 꼬리 기대값

홍종선<sup>a,1</sup> · 김태우<sup>a</sup>

<sup>a</sup>성균관대학교 통계학과

(2016년 7월 5일 접수, 2016년 9월 19일 수정, 2016년 10월 27일 채택)

---

## 요약

시장위험 관리를 위한 Value at Risk(VaR)는 금융기관들이 선호하는 기법이지만, 투자가 실패한 경우에 손실금액에 대하여는 설명할 수 없다는 문제점이 있다. VaR의 한계를 보완하는 대안적인 위험측정도구인 Conditional Tail Expectation(CTE)은 VaR를 초과하는 조건부 기대값으로 정의된다. 포트폴리오에 대한 CTE를 추정하는 실제금융시장에서는, 일반적으로는 다변량 손실률을 일변량 분포로 변환하여 VaR을 추정하고 CTE를 구하지만, 본 연구에서는 다차원 분위벡터를 이용하여 다변량 CTE들을 제안한다. 그리고 일변량 CTE들의 관계를 확장하여 다변량 CTE들의 관계식을 유도하였다. 다양한 분산-공분산행렬을 갖는 이변량과 삼변량의 정규분포로부터 다변량 CTE들을 구하고 CTE들의 관계식을 구현하면서 고차원 분포로의 확장 가능성을 설명하였다. 이변량과 삼변량의 실증 예제를 통해 제안한 이론을 탐색하고, 기존의 CTE와 비교하였다. 다변량 변수들의 분산-공분산행렬과 다변량 분위벡터를 사용한 다변량 CTE가 일변량으로 변환하여 구한 CTE보다 작은 값을 갖는 것을 발견하였다. 그러므로 본 연구에서 제안한 다변량 CTE는 보다 적은 위험성을 나타내는 추정량이며, 포트폴리오를 구성하는 여러 기업을 동시에 고려하는 분산 투자 전략을 세우는 경우에 이런 다변량 CTE를 사용하는 적극적인 투자가 가능하다는 장점이 있다.

주요용어: 분위수, 손실, 포트폴리오, 위험, VaR

---

<sup>1</sup>교신저자: (03063) 서울시 중로구 성균관로 25-2, 성균관대학교 통계학과. E-mail: cshong@skku.edu