Journal of The Korea Society of Computer and Information
Vol. 21 No. 6, pp. 77-81, June 2016
www.ksci.re.kr
http://dx.doi.org/10.9708/jksci.2016.21.6.077

Augmenting Path Algorithm for Routing Telephone Calls Problem

Sang-Un Lee*

Abstract

This paper deals with the optimization problem that decides the routing of connection between multi-source and multi-sink. For this problem, there is only in used the mathematical approach as linear programming (LP) software package and has been unknown the polynomial time algorithm. In this paper we suggest the heuristic algorithm with $O(mn^2)$ time complexity to solve the optimal solution for this problem. This paper suggests the simple method that assigns the possible call flow quantity to augmenting path of (s_i,t_i) city pair satisfied with demand of (s_i,t_i). The proposed algorithm can be get the same optimal solution as LP for experimental data.

▸ Keywords : Routing, Multiple-source, Multiple-sink, Multi-commodity flow, Flow network, Augmenting path

I. Introduction

m개 도시 $C_i,(i=1,2,\cdots,m)$ 를 커버하는 유선전화 회사의 전화망에서 두 도시(정점) (u,v) 간에는 전화회선 간선 용량을 $c\{i,j\}$ 를 갖고 있다. 이 경우, 다수의 s(multi-source)에서 다수의 t(multi-sink)로의 전화 요청 건수를 최대로 충족시킬 수 있도록 회선을 연결하는 문제를 전화통화 경로설정 문제(Routing Telephone Calls Problem, RTCP)라 한다[1,2].

RTCP는 다중상품 흐름 문제(multi-commodity flow problem, MCFP)로 볼 수 있다[3-5]. MCFP는 NP-완전(NP-complete)으로 분류되어 최적 해를 구하는 다항시간 알고리즘이 알려져 있지 않고 있다[6]. 따라서 MCFP와 관련하여 Barnhart et al.[7]은 열 생성법(column generation method, CGM)을, Karakostas[8]은 동적 그래프 알고리즘(dynamic graph algorithm, DGA)를 적용한 빠른 근사법을 제안하였다.

RTCP와 관련하여 Dudziński et al.[9]은 전화 회선의 총 길이를 최소화시키기 위해 셀 어레이의 배선을 배치하는 2-레벨 접근법을, Gans와 Zhou[10]은 서비스 수준을 충족시키기 위한 전화회선 연결 방법을 제안하였다. RTCP를 MCFP로 취급하여 Guéret et al.[1]은 선형계획법(linear programming, LP) 소프트웨어 패키지를 활용하였으며, Edvall[2]은 CPLEX를 적용한 MATLAB 프로그램을 활용하였다.

이와 같이 NP-완전인 RTCP와 관련하여 지금까지는 LP와 CPLEX와 같은 수학적 접근법을 적용하고 있는 실정이다.

본 논문에서는 RTCP의 최적 해를 망 흐름 문제(network flow problem)의 증대경로법(augmenting path method, APM)을 응용하여 $O(mn^2)$ 의 다항시간으로 얻을 수 있는 휴리스틱 알고리즘을 제안한다.

2장에서는 RTCP 개념에 대해 연구 사례를 중심으로 고찰해 본다. 3장에서는 $O(mn^2)$ 수행 복잡도로 RTCP의 최적 해를 구할 수 있는 증대경로 알고리즘을 제안한다. 4장에서는 제안된 알고리즘을 실험 데이터에 적용하여 알고리즘 적합성을 평가해 본다.

II. Routing Telephone Cells Problem

MCFP는 다른 원천과 다른 목적지들 노도간의 다중 상품(흐름 요구량)을 가진 망 흐름 문제(network flow problem)이다. 그래프 이론에서, 흐름 망(flow network)은 수송 망(transportation network)라고도 하며, 간선이 용량을 가지고 있고, 각 간선은 흐름의 방향을 갖는 방향 그래프(digraph)이다. 간선상의 흐름량 $f(u,v)$ 은 간선의 용량 $c(u,v)$ 을 초과할

• First Author: Sang-Un Lee , Corresponding Author: Sang-Un Lee
*Sang-Un Lee (sulee@gwnu.ac.kr), Dept. of Multimedia Engineering, Gangneung-Wonju National University
• Received: 2016. 01. 11, Revised: 2016. 02. 12, Accepted: 2016. 03. 08.

수 없다. 이 방향 그래프를 OR(operations research) 분야에서는 망으로 부르며, 정점을 노드로, 간선을 호로 부른다. 하나의 노드로 유입되는 양은 원천과 목적지 노드를 제외하고는 유출되는 양과 동일해야 하는 제약조건을 갖고 있다.

$(u,v)\in E$ 는 $c(u,v)$ 를 갖고 있는 주어진 흐름망 $G(V,E)$ 에서 k개의 상품 $K_1,K_2,\cdots,K_k$ 는 i번째 상품이 s_i에서 d_i의 요구량을 갖는 t_i로 배송되어야 한다. 최대 다중상품 흐름 문제는 다음의 3가지 제약조건을 충족시키는 흐름 경로를 찾아 식 (1)의 총 흐름양을 최대가 되도록 한다.

- 용량제약조건 : $\sum_{i=1}^{k} f_i(u,v) \le c(u,v)$
- 흐름보존법칙 : $\sum_{w\in V} f_i(u,w)=0$, when $u \ne s_i,t_i$
  $\forall_{v,u} f_i(u,v) = -f_i(v,u)$
- 요구량 충족 : $\sum_{w\in V} f_i(s_i,w) = \sum_{w\in V} f_i(w,t_i) = d_i$

$$z = \max \sum_{i=1}^{k} f_i(s_i,w) \qquad (1)$$

그림 1은 Guéret et al.[1]과 Edvall[2]에서 인용된 RTCP로 사설 전화기 회사가 5개의 도시 간에 활용하고 있는 전화망을 보여주고 있다. 각 도시간의 회선(간선)위의 숫자는 용량을 의미한다. 표 1은 두 도시 간에 전화회선 요구량을 제시하고 있다.

만약 Nantes에 있는 A라는 사람이 Nice에 있는 B에게 전화를 걸 경우, 전화회사는 A의 디지털화된 음성인 이진 흐름을 Nantes로부터 Nice로 포화상태가 아닌 회선으로 경로를 설정해야 한다. 그러나 대화는 단지 Nice로부터 Nantes로 B가 A에게 응답하는 흐름이 있을 경우에만 가능하다. 디지털 전화망에서 이진 흐름은 모두 동일한 처리량 표준(throughput standard)인 64kbps를 가진다. 관련된 용량(associated capacity)을 채널(channel)이라 하며, 응답 채널은 요청한 채널과 동일한 회선(간선)을 사용한다. 전화 통화를 위해 필요한 연결된 쌍 채널을 회로(circuit)라 한다. 즉, Nantes에서 Nice로 10명이 전화를 걸고, 동시에 Nice에서 Nantes로 20명이 전화를 걸면 총 30 채널이 사용된다. 전화회사는 현재의 통신망 용량으로 표 1의 전화통화 요구량을 만족시킬 수 있는가? 만약 불만족시킬 경우 최대한으로 만족시키는 통화량을 구하는 문제가 전화통화 경로설정 문제(RTCP)이다.

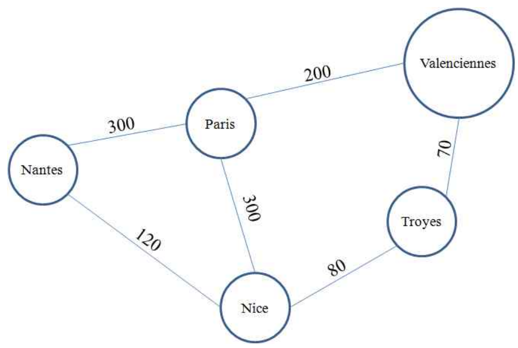


Fig. 1. Network structure of the company

Table 1. Demand of circuits

City-to-city (City pair)	Circuits
Nantes-Nice	100
Nantes-Troyes	80
Nantes-Valenciennes	75
Nice-Valenciennes	100
Paris-Troyes	70

그림 1과 표 1의 데이터에 대해 Guéret et al.[1]은 선형계획법 (LP) 소프트웨어 패키지를 활용하였으며, Edvall[2]은 MATLAB을 이용하여 CPLEX를 구현하여 표 2와 같이 해를 얻었다. 이 결과는 425명의 통화 요청에 대해 Nantes-Troyes의 45명 전화요청을 제외한 380명의 전화요청만을 충족시켰다.

Table 2. Optimal routing result of LP and CPLEX

LP			
City pair	Demand	Routed	Path
Nantes-Nice	100	100	Nantes-Paris-Nice
Nantes-Troyes	80	35	Nantes-Nice-Paris-Valenciennes-Troyes
Nantes-Valenciennes	75	75	Nantes-Paris-Valenciennes
Nice-Valenciennes	100	20 80	Nice-Paris-Valenciennes Nice-Troyes-Valenciennes
Paris-Troyes	70	70	Paris-Valenciennes-Troyes
계	425	380	

CPLEX			
City pair	Demand	Routed	Path
Nantes-Nice	100	100	Nantes-Nice
Nantes-Troyes	80	80	Nantes-Paris-Nice-Troyes
Nantes-Valenciennes	75	75	Nantes-Paris-Valenciennes
Nice-Valenciennes	100	100	Nice-Paris-Valenciennes
Paris-Troyes	70	25	Paris-Valenciennes-Troyes
계	425	380	

이와 같이 본 문제와 관련하여 수학적 접근법은 활용되고 있지만 다항시간으로 최적 해를 구하는 알고리즘이 제안되지 않고 있는 실정이다.

최근들어 무선통신망의 채널할당 문제에 대해서는 Lee[11]이, 부분적 생존 가능성 문제의 최적화에 대해서는 Lee[12]가 연구하였으며, 광통신망의 파장 배정과 경로설정 방법에 대해서는 Lee[13]이 연구하였다. 그러나 유선 통신망의 전화통화 경로설정 문제의 최적화에 대해서는 연구가 진행되지 않고 있다.

3장에서는, 본 문제와 관련하여 다항시간으로 최적 해를 구할 수 있는 휴리스틱 알고리즘을 제안한다.

III. Augmenting Path Algorithm

증대경로란 원천에서 목적지까지의 경로가 존재하고, 이 경로상의 모든 간선들의 여유량(residual) $r(u,v)$가 $r(u,v)=c\ u,v)-f(u,v)>0$ 인 경우 이들 경로를 통해 추가적으로 흐름을 보낼 수 있다. 즉, 여유량을 가진 경로에 추가적으로 흐름을 보낼 수 있기 때문에 이 경로를 증대경로라 한다.

망의 최대 흐름을 계산하기 위해 증대경로를 찾는 대표적인 알고리즘으로는 Ford-Fulkerson 알고리즘[14]과 Edmonds-Karp 알고리즘[15]이 있다. Ford-Fulkerson 알고리즘[14]의 수행 복잡도는 $O(mn^2)$, Edmonds-Karp 알고리즘[15]의 수행 복잡도는 $O(m^2n)$ 이다.

Ford-Fulkerson과 Edmonds-Karp 알고리즘[14,15]은 단일원천-단일 목적지의 방향 그래프에 대해 최대 흐름양을 결정하는 방법으로, 최적 해를 얻지 못할 수도 있는 단점을 갖고 있다[16].

다중 도시들 간의 전화회선 연결은 하나의 회선을 양방향으로 활용하기 때문에 무방향 그래프로 볼 수 있다. 따라서 본 장에서는 Ford-Fulkerson 알고리즘[14]을 다중 원천-다중 목적지의 무방향 그래프로 변환시켜 RTCP의 증대경로를 찾아 전화 회선을 배정하는 $O(mn^2)$ 수행 복잡도를 갖는 방법을 제안한다. 이 방법을 증대경로 알고리즘(augmenting path algorithm, APA)이라 하며 다음과 같이 수행된다.

for $i=1$ to k /* k 쌍의 전화 통화 회선 요구 */

(1) 주어진 망에서 임의의 $d_i(s_i,t_i)$를 선택하여 s_i에서 t_i로의 증대경로 $r_i(u,v)=c_i(u,v)-f_i(u,v)>0$를 찾는다.

(1-1) 만약 증대경로가 존재하면 $_{\min}r_i(u,v)$인 병목 간선에 대해 $f_i(u,v)={}_{\min}\{d_i, {}_{\min}r_i(u,v)\}$로 결정하고, 경로상의 모든 간선들에 대해 $c_i(u,v)/f_i(u,v)$ 를 표기한다.

(1-2) 증대경로가 존재하지 않으면 알고리즘을 종료한다.

(2) $r_i(u,v)=0$ 인 간선은 증대경로에서 제외시킨다.

end

제안된 APA는 $O(mn^2)$ 수행 복잡도로 최적 해를 얻을 수 있어 실무에 즉시 활용 가능한 장점을 갖고 있다.

IV. Applications and Evaluation

본 장에서는 Guéret et al.[1]과 Edvall[2]에서 인용된 그림 1과 표 1의 실험 데이터에 대해 APA를 적용하여 본다. 제안된 APA를 수행하는 과정은 그림 2에 제시되어 있다. 여기서는 이해가 쉽도록 용량/사용회선수를 표시하였다.

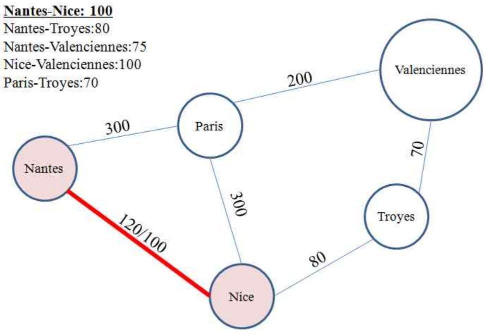
그림 2에서 APA는 다음과 같이 5단계로 수행되었다. (a)의 첫 번째 단계에서는, d_i(Nantes, Nice)=100에 대해 r_i(Nantes, Nice)= 120인 Nantes- Nice 증대경로를 찾아 f_i(Nantes, Nice)=100을 배정하였다.

(b)의 두 번째 단계에서는, d_i(Nantes, Troyes)=80에 대해 Nantes-Nice-Troyes 증대경로를 찾아, r_i(Nantes, Nice)=20으로 f_i(Nantes, Nice)=20을, r_i(Nice, Troyes)=80으로 f_i(Nice, Troyes) =20을 배정하였다. 다시 남은 d_i(Nantes, Troyes)=60에 대해 두 번째 증대경로인 Nantes-Paris-Nice-Troyes를 찾아 r_i(Nantes, Paris)= 300에 대해 f_i(Nantes, Paris)=60을, r_i(Paris, Nice)=300에 대해 f_i(Paris, Nice)=60을, r_i(Nice, Troyes)=60에 대해 f_i(Nice, Troyes)=60을 배정하였다. 이 결과 r_i(Nantes, Nice)=0과 r_i(Nice, Troyes)=0이 되어 2개 간선은 증대경로에서 제외된다.

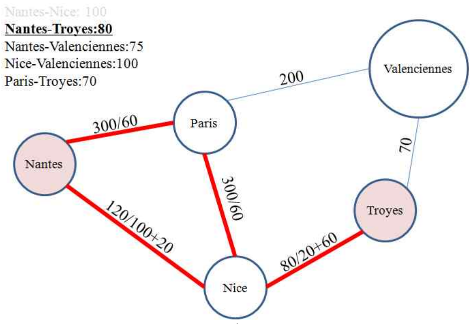
(c)의 세 번째 단계에서는, d_i(Nantes, Valenciennes)=75에 대해 Nantes-Paris-Valenciennes 증대경로를 찾아 r_i(Nantes, Paris)=240에 f_i(Nantes, Paris)=75를, r_i(Paris, Valenciennes)= 200에 f_i(Paris, Valenciennes)=75를 배정하였다.

(d)의 네 번째 단계에서는, d_i(Nice, Valenciennes)=100에 대해 Nice-Paris-Valenciennes 증대경로를 찾아 r_i(Nice, Paris)=240에 f_i(Nice, Paris)=100을, r_i(Paris, Valenciennes)=125에 f_i(Paris, Valenciennes)=100을 배정하였다.

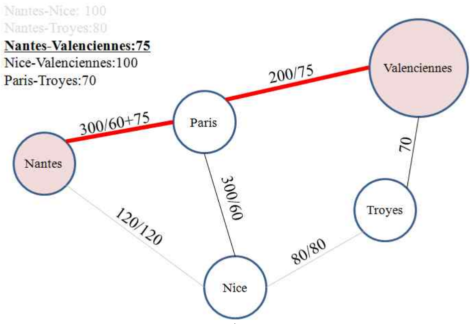
(e)의 마지막 다섯 번째 단계에서는, d_i(Paris, Troyes)=70에 대해 Paris-Valenciennes-Troyes 증대경로를 찾아 r_i(Paris, Valenciennes)= 25에 f_i(Paris, Valenciennes)=25를, r_i(Valenciennes, Troyes)= 70에 f_i(Valenciennes, Troyes)=25를 배정하였다. 이로 인해 r_i(Paris, Valenciennes)=0이 되어 (Paris, Troyes)에 대한 더 이상의 증대경로가 존재하지 않아 d_i(Paris, Troyes)=45는 배정되지 못하였다.



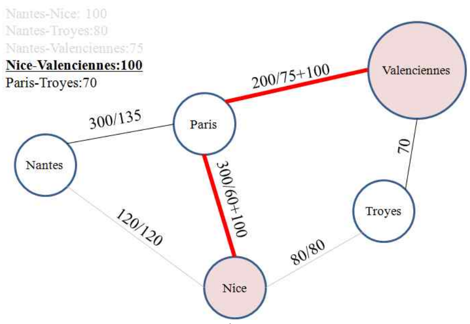
(a) 1st Step



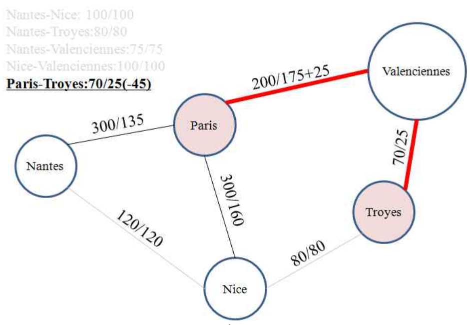
(b) 2nd Step



(c) 3rd Step



(d) 4th Step



(e) 5th Step

Fig. 2. Process of achievement for APA

제안된 APA로 찾은 증대경로에 대해 요구량 대 배정량의 결과는 표 3에 제시되어 있다.

Table 3. Optimal routing result of APA

APA			
City pair	Demand	Routed	Path
Nantes-Nice	100	100	Nantes-Nice
Nantes-Troyes	80	60 20	Nantes-Paris-Nice-Troyes Nantes-Nice-Troyes
Nantes -Valenciennes	75	75	Nantes-Paris-Valenciennes
Nice -Valenciennes	100	100	Nice-Paris-Valenciennes
Paris-Troyes	70	25	Paris-Valenciennes-Troyes
계	425	380	

제안된 APA를 LP와 CPLEX의 성능과 비교한 결과는 표 4에 제시하였다. LP중 하나인 Ellipsoid 알고리즘의 수행 복잡도는 $O(m^4)$로 알려져 있다[17]. 제안된 APA는 LP의 $O(m^4)$ 수행 복잡도를 $O(mn^2)$으로 감소시켰음에도 불구하고 동일한 해를 얻었음을 알 수 있다.

Table 4. Compare with algorithm performance

알고리즘	수행 복잡도	요구량	회선 연결량	미 충족량
LP & CPLEX	$O(m^4)$	425	380	45
APA	$O(mn^2)$		380	45

제안된 APA는 LP와 같은 수학적 전문지식 없이 시각적으로나 프로그램으로도 증대경로를 찾을 수 있어 현업에 종사하는 실무자에게 큰 도움을 줄 것이다.

V. Conclusions

본 논문은 선형계획법과 같은 소프트웨어 패키지를 활용하지 않고는 다항시간으로 최적 해를 얻는 알고리즘이 알려져 있지 않은 다중원천-다중 목적지 전화회선 연결 문제에 대해 $O(m^2n)$ 수행 복잡도로 풀 수 있는 알고리즘을 제안하였다.

제안된 알고리즘은 단지 주어진 망에서 s_i로부터 t_i로의 증대경로를 찾아 병목(최소 여유 량) 간선에 대해 여유 량과 요구 량 중에서 최소치를 배정하는 방법을 적용하였다.

제안된 알고리즘은 $O(m^2n)$ 수행 복잡도로 $O(m^4)$ 수행 복잡도의 선형계획법 소프트웨어 패키지를 활용하는 경우와 동일한 해를 얻었다.

단지, 제안된 알고리즘은 증대경로를 찾는 과정이 $O(mn^2)$ 복잡도로 아직까지는 복잡함을 알 수 있다. 따라서 추후 증대경로를 보다 간단히 찾을 수 있는 방법을 연구할 예정이다.

결론적으로, 제안된 알고리즘은 간단하게 최적 해를 구할 수 있는 관계로, 유선전화망 연결을 담당하는 실무자에게 실제로 큰 도움을 줄 수 있을 것이다.

REFERENCES

[1] C. Guéret, X. Prins, and M. Sevaux, "Applications of Optimization with Xpress-MP: 12.3 Routing Telephone Calls," Dash Optimization Ltd., pp. 179-182, Feb. 2005.

[2] M. Edvall, "Publicity Campaign," Tomlab Optimization Inc, http://tomsym.com/examples/tomsym_routingcalls.html, Apr. 2009.

[3] M. Gondran and M. Minous, "Graphes et Algorithmes (2nd Ed.)," Eyrolles, 1990.

[4] R. K. Ahuja, T. L. Magnanti, and J. B. Orlin, "Network Flows: Theory, Algorithms and Applications," Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.

[5] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, and C. Stein, "Introduction to Algorithms (2nd ed.)," MIT Press and McGraw-Hill. pp. 788–789. 2001.

[6] S. Even, A. Itai, and A. Shamir, "On the Complexity of Timetable and Multi-commodity Flow Problems," SIAM Journal on Computing, Vol. 5, No. 4, pp. 691-703, 1976.

[7] C. Barnhart, C. A. Hane, E. L. Johnson, and G. Sigismondi, "A Column Generation and Partitioning Approach for Multi-commodity Flow Problems," Telecommunication Systems, Vol. 3, No. 3, pp. 239–258, Oct. 1995.

[8] G. Karakostas, "Faster Approximation Schemes for Fractional Multi-commodity Flow Problems," Proceedings of the 13th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, pp. 166–173, 2002.

[9] K. Dudziński, M. Libura, J. Majchrzak, and J. Sikorski, "Solution of Placement and Routing Problems in Telephone Exchange Unit Designs," Operations Research Spektrum, Vol. 10, No. 4, pp. 213-220, Dec. 1988.

[10] N. Gans and Y. P. Zhou, "A Call-Routing Problem with Service-Level Constraints," Journal of Operations Research, Vol. 51, No. 2, pp. 255-271, Mar. 2003.

[11] S. U. Lee, "An Optimization Rule for Channel Assignment Problem (CAP)," Journal of KSCI, Vol. 18, No. 6, pp. 37-45, Jun. 2013.

[12] S. U. Lee, "Minimum Network Connection Cost Algorithm for Partially Survivable Networks Problem of Cellular Telecommunication Systems," Journal of KSCI, Vol. 21, No. 1, pp. 59-64, Jan. 2016.

[13] S. U. Lee, "Independent Set Bin Packing Algorithm for Routing and Wavelength Assignment (RWA) Problem," Journal of KSCI, Vol. 20, No. 1, pp. 111-118, Jan. 2015.

[14] L. R. Ford and D. R. Fulkerson, "Maximal flow Through a Network," Canadian Journal of Mathematics, Vol. 8, No. 1, pp. 399-404, Jan. 1956.

[15] J. Edmonds, and R. M. Karp, "Theoretical Improvements in Algorithmic Efficiency for Network Flow Problems," Journal of the ACM, Vol. 19, No. 2, pp. 248-264, Apr. 1972.

[16] Z. Uri, "The Smallest Networks on which the Ford-Fulkerson Maximum Flow Procedure may fail to Terminate," Theoretical Computer Science, Vol. 148, No. 1, pp. 165–170, Aug. 1995.

[17] D. Alevras and M. W. Padberg, "Linear Optimization and Extensions: Problems and Extensions," Universitext, Springer-Verlag, 2001.

Authors

Sang Un Lee received the B. Sc. degree in avionics from the Korea Aerospace University in 1997. He received the M. Sc. and Ph. D. degrees in Computer Science from Gyeongsang National University, Korea, in 1997 and 2001, respectively. He is currently Professor with the Department of Multimedia Science, Gangneung-Wonju National University, Korea. He is interested in software quality assurance and reliability modeling, software engineering, software project management, neural networks, and algorithm.