

## 면외 워핑함수를 고려한 보 구조물의 기계 및 열응력 해석

정 용 민<sup>1</sup> · 김 준 식<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>금오공과대학교 기계시스템공학과

### A Thermal Stress Analysis of Beams with Out-of-Plane Warping

Yong-Min Jeong<sup>1</sup> and Jun-Sik Kim<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>Department of Mechanical System Engineering, Kumoh Nat'l Inst. of Tech., Gumi, 39177, Korea

#### Abstract

In this paper, a methodology, which is able to predict the thermal stresses accurately yet efficiently, is presented for beam structures via Saint-Venant's principle. In general, higher-order beam theories have been known to be effective for the prediction of thermal stresses. In contrast to this, we propose the method to predict the thermal stresses of beam structures by post-processing the classical beam theory via Saint-Venant's principle. The approach includes an out-of-plane warping displacement to account for the through-the-thickness thermal deformation. With this, one can accurately recover the thermal stresses as compared to the elasticity solutions. In fact, they are identical for the beams made of isotropic materials. The effect of out-of-plane warping is also investigated, it turns out that the effect is negligible in mechanical stress analysis but not in thermal stress analysis.

**Keywords** : *saint-venant's principle, out-of-plane warping, thermal stress improvement*

#### 1. 서 론

보 구조물은 다양한 형태의 구조물들의 하중을 지지하는데 사용되는 기초 부재이다. 구조물의 안정성을 위해 두꺼운 부재를 많이 사용하는 만큼 전단변형에 의한 영향, 기타 환경적인 요인들에 의한 영향들을 적절히 고려하여 설계해야 한다.

주변 환경에 따른 온도의 변화는 구조물에 영향을 주게 되고, 열응력, 열변형률 및 변형을 유발한다. 이러한 것들이 구조물의 내구성에 악영향을 주게 되며, 더 나아가 충격 또는 피로파괴를 촉진시킬 수 있다. 이를 최소화하기 위해 현장에서는 교량의 경우 팽창 조인트를 사용하거나 기차선로의 경우 약간의 간극을 주어 자유롭게 팽창과 수축을 하도록 함으로써 열영향을 줄이고 있고, 다양한 분야에서 구조물의 안정성 설계가 이루어지고 있다.

오랫동안 보 구조물의 거동을 예측하기 위해 등방성 보 구조물의 경우 고전 보이론(Euler-Bernoulli; EB)이 그리고 복합재료와 같은 일반적인 이방성 보에 대해서는 전단변형의

영향을 고려한 보에 관한 일차전단변형이론(Rankine-Timoshenko; RT)등이 사용되어 왔다(Dym *et al.*, 1982). 한편 이방성 재료에 대한 정확도 제고를 위해 고차이론들이 개발되어 왔다(Cho, 1994; Kim *et al.*, 2011). 일반적으로 고차이론들이 구조물의 열응력 예측에 유용하다고 알려져 있지만, 자유도가 높아 계산비용이 증가한다는 단점이 있다.

고차이론들이 갖고 있는 계산의 복잡성 그리고 고전 이론들의 부정확성을 극복하기 위하여, 최근 고전 보이론의 해를 생브낭의 원리를 통해 후처리함으로써 응력 및 변위를 개선할 수 있는 방법(Kim *et al.*, 2011; Kim, 2012)이 개발되었다. 이들은 개발된 방법을 적용하여 응력해석을 수행하였고, 얻어진 결과는 정성적으로 탄성해와 잘 일치하는 것을 보여 주었다. Han 등(2012)은 일차전단변형이론에 면외 변위 자유도를 추가하여 복합재료 적층평판의 열응력을 수행하였고, 탄성해와 비교할 만한 결과를 얻었다.

본 논문에서는 고전적 이론의 경우 열응력 문제에 대해 예측의 정확도가 떨어지는 단점을 Kim 등(2011)이 응력

\* Corresponding author:

Tel: +82-54-478-7397; E-mail: junsik.kim@kumoh.ac.kr

Received March 2 2016; Revised April 25 2016;

Accepted April 26 2016

©2016 by Computational Structural Engineering Institute of Korea

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

해석에 적용하였던 방법론을 개선하여 극복하고자 한다. 횡방향 변위장에 면의 워핑함수를 추가적으로 고려함으로써 기계 및 열하중 환경에서 응력을 보다 정확히 예측할 수 있는 방법을 소개하고, 결과를 탄성해와 비교함으로써 그 정확도를 검증한다.

## 2. 정식화

이 장에서는 생브낭의 원리를 소개하고, 기계 및 열하중 조건에서 고전 보이론의 변위장에 면의 워핑함수 및 변위 섭동항을 포함하도록 가정하고, 생브낭의 원리를 이용해 후처리함으로써 기계 및 열응력을 개선하는 방법에 대해 기술하고자 한다.

### 2.1 생브낭의 원리

생브낭은 1855년 원통형 또는 각기둥형의 1차원 보 구조물에 대해 이 원리를 발표하였다. 이 원리는 합응력 등가의 원리로 그 정의는 “정적 등가하중이 작용하는 시스템에서 최대 치수 이상 떨어진 점의 응력상태는 동일하다(Fung, 1965; Timoshenko *et al.*, 1951; Barber, 1992).”이며, 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$N_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} dz = \int_{-h/2}^{h/2} \tilde{\sigma}_{11} dz \quad (1a)$$

$$M_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} z dz = \int_{-h/2}^{h/2} \tilde{\sigma}_{11} z dz \quad (1b)$$

식 (1a), (1b)와 같이 합응력들로 문제를 기술할 수 있으며, 동일한 시스템에 대해 서로 다른 응력분포  $\sigma_{11}$ ,  $\tilde{\sigma}_{11}$ 가 작용할 때 각각이 생성하는 축력( $N$ )과 모멘트합력( $M$ )은 반드시 같아야 한다는 것이다. 여기서, 응력상태  $\tilde{\sigma}_{11}$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\tilde{\sigma}_{11} = \sigma_{11} + \sigma'_{11} \quad (2)$$

여기서, 응력상태  $\sigma'_{11}$ 은 자가평형상태(self-equilibrating state)를 만족하는 응력상태이며, 이는 물체 내부에서 사라지는 것을 말한다. 본 논문에서는 변위 섭동항이 이와 같은 의미를 가진다. 즉,  $\sigma'_{11}$ 이 생성하는 합응력들은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$N'_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma'_{11} dz = 0 \quad (3a)$$

$$M'_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma'_{11} z dz = 0 \quad (3b)$$

### 2.2 고전 보 이론

고전 보 이론의 변위장은 다음과 같이 주어진다.

$$u_1(x, z) = v_1(x) - v_{3,1}(x) \quad (4a)$$

$$u_3(x) = v_3(x) \quad (4b)$$

위 변위장으로 부터 열변형률을 고려한 변형률-변위 관계식에 대입하여 면내 수직응력  $\sigma_{11}$ 을 계산하고, 2차원 응력평형 방정식에 대입하여 두께방향으로 적분함으로써 횡방향 전단 응력  $\sigma_{13}$ 를 계산할 수 있으며, 각각 다음과 같이 계산된다.

$$\sigma_{11} = E(v_{1,1} - v_{3,11}z - \alpha T) \quad (5)$$

$$\sigma_{13} = \frac{1}{2} E(v_{3,111} + \alpha T_{1,1}) \left( z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \quad (6)$$

여기서,  $T$ 는 임의의 온도장  $T(x, z) = T_0(x) + zT_1(x)$ 이며,  $T_0(x) = \overline{T_0} \sin(\pi x/l)$ ,  $T_1(x) = \overline{T_1} \sin(\pi x/l)$ 이다.  $\alpha$ 는 열 팽창 계수 그리고  $E$ 는 영의 계수이다.

마찬가지로 식 (6)의 횡방향 전단응력  $\sigma_{13}$ 를 응력평형 방정식에 대입하고 두께방향으로 적분함으로써 다음과 같이 횡방향 수직응력  $\sigma_{33}$ 를 계산할 수 있다.

$$\sigma_{33} = -\frac{E}{2} (v_{3,1111} + \alpha T_{1,11}) \left( \frac{1}{3} z^3 - \frac{h^2}{4} z - \frac{h^3}{12} \right) \quad (7)$$

### 2.3 고전 보 이론의 개선

횡방향 변위장  $\tilde{u}_3$ 를 다음과 같이 변위 섭동항  $w_3$ 와 두께방향에 따른 워핑함수  $W_3$ 를 포함하도록 가정하였다.

$$\tilde{u}_3(x, z) = v_3(x) + w_3(x) + W_3^M(x, z) + W_3^T(x, z) \quad (8)$$

면의 워핑함수  $W_3^M$ 과  $W_3^T$ 는 등방성에 관한 2차원 응력-변형률 관계식에서 횡방향 수직응력  $\sigma_{33}$ 가 0이 된다는 평면 응력조건으로부터 계산할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & \nu E & 0 \\ 1-\nu^2 & 1-\nu^2 & \\ \nu E & E & \\ 1-\nu^2 & 1-\nu^2 & \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$\varepsilon_{33} = -\nu \varepsilon_{11} \quad (10)$$

식 (10)을 두께방향으로 적분하고 면외 변위섭동항  $w_3$ 를 포함하도록 가정하면, 식 (8)과 같은 새로운 횡방향 변위장  $\tilde{u}_3$ 를 계산할 수 있으며, 면외 워핑함수  $W_3^M$ ,  $W_3^T$ 는 각각 다음과 같이 얻어진다.

$$W_3^M(x, z) = -\nu \left( v_{1,1} z - v_{3,11} \frac{1}{2} z^2 \right) \quad (11a)$$

$$W_3^T(x, z) = \int_z (1+\nu) \alpha T(x, z) dz \quad (11b)$$

면외 워핑함수들은 두께방향에 대한 함수이며, 포아송 효과를 포함하고 있는 것을 알 수 있다. 열 면외 워핑함수의 경우 포아송 효과가 0인 경우에도 존재하는 반면 기계 워핑함수는 0이 됨을 알 수 있다.

이제 개선된 면내 변위장을 식 (6)에 주어진 횡방향 전단 응력을 사용하여 계산할 수 있다.

$$\sigma_{13} = G(\tilde{u}_{1,3} + \tilde{u}_{3,1}) \quad (12)$$

여기서, 가정된 면외 변위장  $\tilde{u}_3$ 는 식 (8)에 주어져 있으며, 식 (12)에 대입하고 두께방향으로 적분함으로써 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1 = & v_1 + w_1 - (v_{3,1} + w_{3,1})z - \alpha \left( T_{0,1} \frac{1}{2} z^2 + T_{1,1} \frac{1}{6} z^3 \right) \\ & - \nu (v_{3,11} + \alpha T_{1,1}) \frac{1}{6} z^3 \\ & + \frac{E}{2G} (v_{3,11} + \alpha T_{1,1}) \left( \frac{1}{3} z^3 - \frac{h^2}{4} z \right) \end{aligned} \quad (13)$$

식 (13)을 미분하여 변형률을 개선하고, 구성방정식을 이용하면 개선된 면내 수직응력을 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{11} = & E(v_{1,1} + w_{1,1}) - E(v_{3,11} + w_{3,11})z \\ & - E\alpha \left( T_{0,11} \frac{1}{2} z^2 + T_{1,11} \frac{1}{6} z^3 \right) - E\nu (v_{3,111} + \alpha T_{1,11}) \frac{1}{6} z^3 \\ & + \frac{E^2}{2G} (v_{3,111} + \alpha T_{1,11}) \left( \frac{1}{3} z^3 - \frac{h^2}{4} z \right) \end{aligned} \quad (14)$$

변위 섭동항들은 2.1절에서 기술한 생브낭의 원리를 적용하면 다음과 같이 계산된다.

$$w_{1,1} = \frac{h^2}{24} \alpha T_{0,11} \rightarrow w_1 = \frac{h^2}{24} \alpha T_{0,1} + c_1^{(1)} \quad (15a)$$

$$\begin{aligned} w_{3,11} = & -\frac{h^2}{10} v_{3,111} \left( \frac{E}{G} + \frac{\nu}{4} \right) - \frac{h^2}{10} \alpha T_{1,11} \left( \frac{E}{G} + \frac{1+\nu}{4} \right) \\ w_{3,1} = & -\frac{h^2}{10} v_{3,11} \left( \frac{E}{G} + \frac{\nu}{4} \right) - \frac{h^2}{10} \alpha T_{1,1} \left( \frac{E}{G} + \frac{1+\nu}{4} \right) + c_1^{(3)} \\ w_3 = & -\frac{h^2}{10} v_{3,11} \left( \frac{E}{G} + \frac{\nu}{4} \right) - \frac{h^2}{10} \alpha T_1 \left( \frac{E}{G} + \frac{1+\nu}{4} \right) \\ & + c_1^{(3)} x + c_2^{(3)} \end{aligned} \quad (15b)$$

위 변위섭동항의 적분상수들은 보의 경계조건으로부터 계산할 수 있으며, 면외 워핑함수  $W_3$ 를 고려함으로써 기존 연구에서는 없었던 포아송 효과가 개선됨을 알 수 있다. 식 (14)의 개선된 면내 수직응력을 응력 평형방정식에 대입하여 적분함으로써 횡방향 응력성분들을 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{13} = & -E w_{1,11} \left( z + \frac{h}{2} \right) + \frac{E}{2} (v_{3,111} + w_{3,111} + \alpha T_{1,11}) \\ & \left( z^2 - \frac{h^2}{4} \right) + \frac{\nu E}{24} (v_3^{(5)} + \alpha T_{1,111}) \left( z^4 - \frac{h^4}{16} \right) \\ & + E\alpha \left\{ \frac{1}{6} T_{0,111} \left( z^3 + \frac{h^3}{8} \right) + \frac{1}{24} T_{1,111} \left( z^4 - \frac{h^4}{16} \right) \right\} \\ & + E\alpha \left\{ T_{0,1} \left( z + \frac{h}{2} \right) + \frac{1}{2} T_{1,1} \left( z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \right\} \\ & - \frac{E^2}{8G} (v_3^{(5)} + \alpha T_{1,111}) \left( \frac{z^4}{3} - \frac{h^2 z^2}{2} + \frac{5h^4}{48} \right) \quad (16) \\ \tilde{\sigma}_{33} = & \frac{E}{2} w_{1,111} \left( z^2 + hz + \frac{h^2}{4} \right) \\ & - \frac{E}{2} (v_3^{(4)} + w_3^{(4)} + \alpha T_{1,11}) \left( \frac{1}{3} z^3 - \frac{h^2}{4} z - \frac{h^3}{12} \right) \\ & - \frac{\nu E}{24} (v_3^{(6)} + \alpha T_1^{(4)}) \left( \frac{1}{5} z^5 - \frac{h^4}{16} z - \frac{h^5}{40} \right) \\ & - \frac{E\alpha}{24} \left\{ T_0^{(4)} \left( z^4 + \frac{h^3 z}{2} + \frac{3h^4}{16} \right) + T_1^{(4)} \left( \frac{1}{5} z^5 - \frac{h^4 z}{16} - \frac{h^5}{40} \right) \right\} \\ & - \frac{E\alpha}{2} \left\{ T_{0,11} \left( z^2 + hz + \frac{h^2}{4} \right) + T_{1,11} \left( \frac{1}{3} z^3 - \frac{h^2 z}{4} - \frac{h^3}{12} \right) \right\} \\ & - \frac{E^2}{24G} (v_3^{(6)} + \alpha T_1^{(4)}) \left( \frac{z^5}{5} - \frac{h^2 z^3}{2} + \frac{5h^4 z}{16} + \frac{h^5}{10} \right) \quad (17) \end{aligned}$$

### 3. 수치예제

이 장에서는 다양한 경계조건을 가지는 보 구조물에 대해 탄성해와 2장에서 기술한 방법의 결과를 비교하였다.

#### 3.1 전단력을 받는 외팔보

외팔보 예제(Fig. 1)에 대해 티모셴코가 기술한 변위경계 조건(Timoshenko *et al.*, 1951)과 평균 변위경계조건

(Kim *et al.*, 2011)은 각각 다음과 같이 주어진다.

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial z}\right) = 0 \quad \text{at } x = z = 0 \quad (18a)$$

$$\left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\right) = 0 \quad \text{at } x = z = 0 \quad (18b)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} u_3(0, z) dz = \int_{-h/2}^{h/2} z u_1(0, z) dz = 0 \quad (19)$$

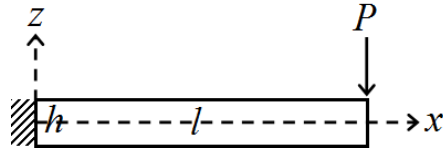


Fig. 1 Geometry of cantilever beam loaded at the end

각각의 경계조건들에 대해 탄성해는 다음과 같이 계산된다.

$$u_3^{TE}(x, 0) = v_3^{EB}(x) \quad (20a)$$

$$u_3^{TE}(x, 0) = v_3^{EB}(x) + \frac{3}{2} \frac{Px}{GA} \quad (20b)$$

$$u_3^{TE}(x, 0) = v_3^{EB}(x) + \frac{6}{5} \frac{Px}{GA} + \frac{\nu P(3x - 5l)}{10EA} \quad (20c)$$

여기서,  $a$ 는 식 (18a)의 경계조건,  $b$ 는 식 (18b)의 경계조건 그리고  $c$ 는 식 (19)의 경계조건을 적용하여 얻은 결과이다. 고전 보이론의 횡방향 처짐은 다음과 같이 얻는다.

$$v_3^{EB}(x) = \frac{Px^2}{2EI} - \frac{Px^3}{6EI} \quad (21)$$

식 (21)를 식 (15)에 대입하고, 기술한 변위경계조건 (18)~(19)를 적용하면 각각의 경우에 대해 고전 보이론의 개선된 해를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\tilde{u}_3^{EB}(x, 0) = v_3^{EB}(x) \quad (22a)$$

$$\tilde{u}_3^{EB}(x, 0) = v_3^{EB}(x) + \frac{3}{2} \frac{Px}{GA} \quad (22b)$$

$$\tilde{u}_3^{EB}(x, 0) = v_3^{EB}(x) + \frac{6}{5} \frac{Px}{GA} + \frac{\nu P(3x - 5l)}{10EA} \quad (22c)$$

고전 보이론으로부터 개선된 횡방향 처짐이 각각의 변위 경계조건에 대해 해석적으로 정확히 일치함을 알 수 있으며, 참고문헌(Kim *et al.*, 2011)에서는 없었던 미세한 포아송 효과가 면의 워핑함수를 고려함으로써 나타남을 알 수 있다. 이 결과는 수학적으로 강력한 점근해석기법(Kim *et al.*, 2011)의 해석결과와 일치한다.

### 3.2 분포하중 하의 단순지지보

단순지지보(Fig. 2)에 참고문헌(Timoshenko *et al.*, 1951)으로부터 다음과 같이 탄성해를 얻는다.

$$u_3^{TE}(l/2, 0) = \frac{5}{384} \left(\frac{ql^4}{EI}\right) + \frac{3}{20} \frac{ql^2}{GA} - \nu \frac{3}{320} \left(\frac{ql^4}{EI}\right) \left(\frac{h}{l}\right)^2 \quad (23)$$

$$\sigma_{11}^{TE}(x, z) = \frac{q}{2I} x(l-x)z + \frac{q}{I} \left(\frac{1}{3}z^3 - \frac{h^2}{20}z\right) \quad (24)$$

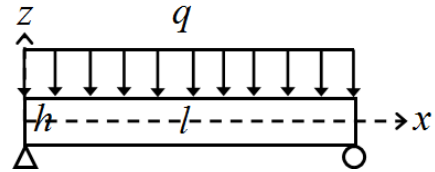


Fig. 2 Geometry of simply-supported beam under uniform pressure

이 예제에 대한 고전 보이론의 횡방향 처짐은 다음과 같다.

$$v_3^{EB} = \frac{q}{24EI} (x^4 - 2lx^3 + l^3x) \quad (25)$$

식 (25)의 횡방향 처짐을 식 (15)에 대입하고 단순지지보의 경계조건인 보의 양단에서 처짐, 모멘트가 0이 된다는 조건을 적용하면 면의 변위섭동항은 다음과 같이 계산된다.

$$w_3 = \frac{6}{5} \frac{q}{2GA} x(l-x) + \frac{\nu q h^2}{80EI} x(l-x) \quad (26)$$

여기서, 식 (26)의 밑줄 친 부분이 면의 워핑함수를 고려함으로써 나타난 포아송 효과이다. 개선된 횡방향 처짐과 면내 수직응력은 식 (25), (26)을 각각 식 (8), (14)에 대입하여 계산할 수 있다.

$$\tilde{u}_3(l/2, 0) = u_3^{TE}(l/2, 0) + \nu \frac{4}{320} \left(\frac{ql^4}{EI}\right) \left(\frac{h}{l}\right)^2 \quad (27)$$

$$\tilde{\sigma}_{11} = \frac{q}{2I} x(l-x)z + \frac{q}{I} \left(1 + \frac{\nu}{2}\right) \left(\frac{1}{3}z^3 - \frac{h^2}{20}z\right) \quad (28)$$

한편, 면의 워핑함수를 고려하지 않은 기존의 방법(Kim *et al.*, 2011)에 대해 횡방향 처짐 및 면내 수직응력은 각각 다음과 같다.

$$\tilde{u}_3(l/2, 0) = u_3^{TE}(l/2, 0) + \nu \frac{3}{320} \left(\frac{ql^4}{EI}\right) \left(\frac{h}{l}\right)^2 \quad (29)$$

$$\tilde{\sigma}_{11} = \frac{q}{2I}x(l-x)z + \frac{q}{I}(1+\nu)\left(\frac{1}{3}z^3 - \frac{h^2}{20}z\right) \quad (30)$$

횡방향 처짐과 면내 수직응력의 수치비교를 위해  $E/G=25$ ,  $\nu=0.25$ ,  $l/h=4$ 로 각각 가정하였으며, 결과는 무차원화하여 도시하였다. Fig. 3에 외팔보의 고정단에서의 응력 분포를 도시하였다. 그림에서 Improved IW는 기존의 방법 (Kim *et al.*, 2011), Improved OW는 면외 워핑함수를 고려한 현재의 방법에 대한 결과이다. Fig. 3에서 보듯이 면외 워핑함수의 도입으로 면내응력을 개선할 수 있음을 알 수 있다. 반면 횡방향 처짐의 경우 포아송 효과만을 개선하기 때문에 큰 효과가 없었다. 면외 워핑함수의 효과의 중요성을 강조하기 위하여 다음절에서는 열하중하의 보에 대한 수치예제를 다룬다.

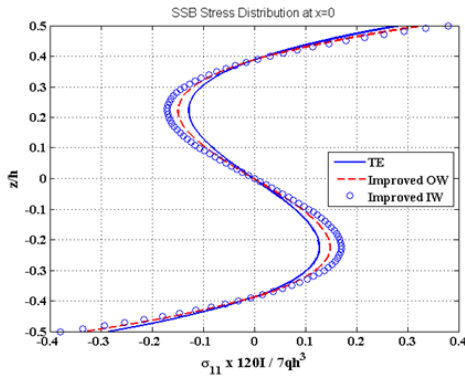


Fig. 3 Comparison of normalized in-plane normal stress

### 3.3 정현파 온도구배를 갖는 단순지지보

열 변형 및 응력해석을 위하여 정현파 형태의 온도구배를 갖는 단순지지보에 대한 예제를 채택하였다(Fig. 4). 이 특정 온도장에 대해서는 탄성해를 구할 수 있기 때문이다.  $T_0$ 의 경우 두께방향으로 일정한 온도분포를 가지며,  $T_1$ 의 경우 선형의 분포를 가진다. 이 예제에서는 기계하중의 면외 워핑함수인  $W_3^M$ 는 고려하지 않고, 열하중에 관한  $W_3^T$ 만을 고려하여 횡방향 응력성분들을 중점적으로 다루었다. 탄성해 결과와 비교를 위하여 적용한 보의 형상과 재질상수는 Table 1과 같다.

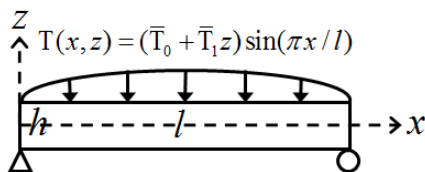


Fig. 4 Geometry of simply-supported beam under sinusoidal thermal loading

Table 1 Dimensions and material properties of Beam

$\bar{T}_0(\bar{T}_1)$	$E$	$\alpha$	$l$	$h$
100×274.15	$10^{10}$	$9 \times 10^{-6}$	10	1

본 예제에 대한 고전 보이론의 횡방향 처짐은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$v_3^{EB}(x) = \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \alpha \bar{T}_1 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \quad (31)$$

식 (31)을 식 (15)에 대입하여 변위 섭동항을 계산하고, 면내응력 식 (14), 횡방향 전단응력 (16), 그리고 횡방향 수직응력 (17)에 대입하면 응력성분들을 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\tilde{\sigma}_{11} = -\frac{E\alpha}{2} \left[ T_{0,11} \left( z^2 - \frac{h^2}{12} \right) + T_{1,11} \left( z^3 - \frac{h^2}{20} z \right) \right] \quad (32a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{13} = & \frac{E\alpha}{6} T_{0,111} \left( z^3 - \frac{h^2}{4} z \right) \\ & + \frac{E\alpha}{8} T_{1,111} \left( \frac{1}{3} z^4 - \frac{h^2}{10} z^2 + \frac{h^4}{240} \right) \end{aligned} \quad (32b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{33} = & -\frac{E\alpha}{24} T_0^{(4)} \left( z^4 - \frac{h^2}{2} z^2 + \frac{h^4}{16} \right) \\ & - \frac{E\alpha}{120} T_1^{(4)} \left( z^5 - \frac{h^2}{2} z^3 + \frac{h^4}{16} z \right) \end{aligned} \quad (32c)$$

먼저 두께방향으로 일정한 하중이 작용하는 경우에 대해 횡방향 전단응력과 수직응력을 Fig. 5와 Fig. 6에 각각 도시하였다. 균일 열하중이기 때문에 전단응력에 의한 합응력 즉 전단력은 0인 반면에 횡방향 수직응력에 의한 합응력은 0이 아님을 알 수 있다. 따라서 이 경우에는 일차전단변형 이론에 의해 예측할 수 없지만, 본 연구에서 제안한 방법에 의해서는 고전 보 이론의 해만을 이용하여 탄성해와 정확하게

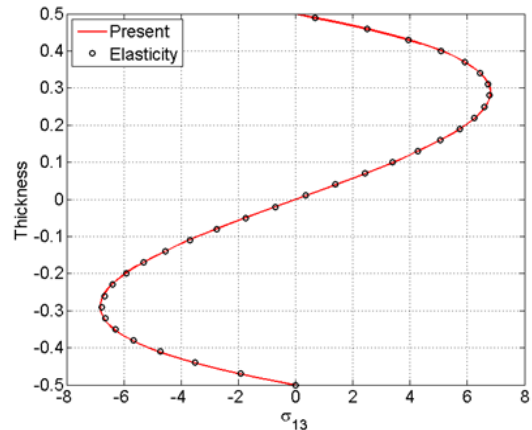


Fig. 5 Transverse shear stress distribution under  $T_0$  thermal loading

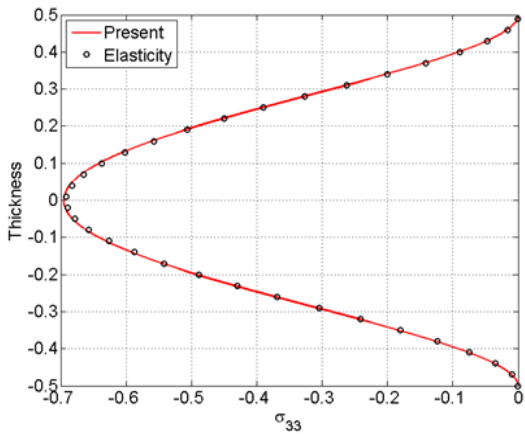


Fig. 6 Transverse normal stress distribution under  $T_0$  thermal loading

일치하는 결과를 얻을 수 있다.

두께방향으로 선형분포 열하중이 작용하는 경우에 대해 횡방향 전단응력과 수직응력을 Fig. 7와 Fig. 8에 각각 도시하였다. 이 경우에는 굽힘 변형이 발생하고  $T_0$  하중에 비해 상대적으로 쉽게 예측할 수 있다. 그러나 여전히 전단력이

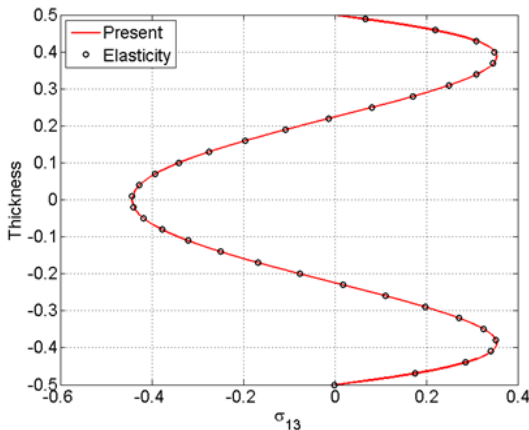


Fig. 7 Transverse shear stress distribution under  $T_1$  thermal loading

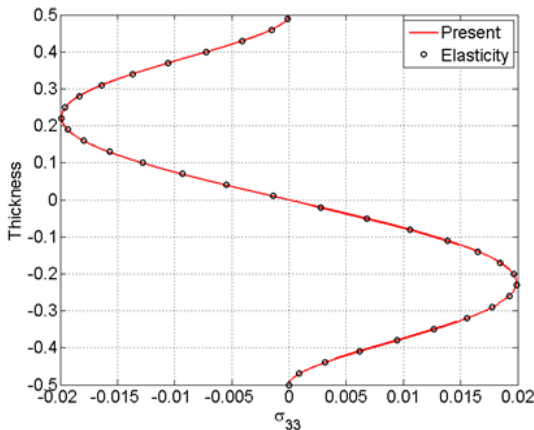


Fig. 8 Transverse normal stress distribution under  $T_1$  thermal loading

0이기 때문에 전단변형에 영향을 받지 않는다. 고전 보 이론에 의한 전단응력은 0임에도 불구하고 본 연구에서 제안한 방법은 두께방향으로의 응력분포를 정확하게 예측할 수 있다. 첫 번째 결과와는 다르게 Fig. 8에서 보듯이 횡방향 수직합응력도 0임을 알 수 있고, 열 응력해석이 상대적으로 어려운 이유를 보여주고 있다.

#### 4. 결 론

본 연구에서는 기존의 응력 및 변위 개선 방법(Kim *et al.*, 2011)에 면의 워핑함수를 추가적으로 고려하여 후처리함으로써 기계 및 열응력 예측을 보다 정확히 할 수 있는 방법을 제안하였다. 면의 워핑함수는 기계하중 환경에서 기존의 방법보다 포아송 효과를 추가적으로 얻을 수 있었고, 열하중 환경에서는 횡방향 응력성분들을 예측하는데 중요한 역할을 함을 확인하였다. 정식화 및 수치예제를 통해 얻은 결론들을 다음과 같이 정리할 수 있다.

- 외팔보의 경우 티모센코가 기술한 변위경계조건 및 평균 변위경계조건에 대하여 정확히 일치하는 해석해를 얻을 수 있었다.
- 기계하중의 경우 면의 워핑함수를 고려함으로써 미세한 포아송 효과를 정확하게 표현할 수 있었다. 외팔보의 경우 횡방향 수직응력이 0이기 때문에 효과가 크지 않지만, 단순지지보의 경우 수직응력의 존재로 응력개선에 면의 워핑함수의 영향을 상대적으로 큼을 알 수 있었다.
- 열하중의 경우 고전 보 이론의 평형방정식을 이용하는 경우에도 횡방향 응력들을 계산할 수 없지만, 면의 워핑함수의 도입을 통해 탄성해와 일치하는 정확한 응력 분포를 계산할 수 있었다.
- 일반적으로 고차이론들이 열응력 예측에 유용하지만, 본 논문에서 소개한 방법은 비교적 계산이 간단하고 탄성해와 비교하였을 때 높은 정확도를 보임을 알 수 있었다.

본 논문에서 소개한 면의 워핑함수를 포함한 응력개선 방법은 다양한 경계조건에 대해 열응력을 예측하는데 유용하고, 계산이 비교적 간단하기 때문에 큰 장점이 있을 것으로 사료된다. 본 방법론을 적용하면, 상용 CAE 소프트웨어에서 해석 결과를 후처리함으로써 기계/열 응력분포를 개선할 수 있을 것으로 기대된다.

#### References

Barber, J.R. (1991) *Elasticity 2<sup>nd</sup> Edition*, Kluwer

Academic Publishers, New York.

- Cho, M.** (1994) Review on Higher Order Laminated Composite Plate Modelings, *J. KSME*, 34(7), pp.517~526.
- Dym, C.L., Shames, I.H.** (1982) *Solid Mechanics : A Variational Approach*, McGraw-Hill, New York.
- Fung, Y.C.** (1965) *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice-Hall, INC., New Jersey.
- Han, J.W., Kim, J.-S., Cho, M.** (2012) Efficient Thermal Stress Analysis of Laminated Composite Plates using Enhanced First-order Shear Deformation Theory, *J. Comput. Struct. Eng. Inst. Korea*, 25(6), pp.505~512.
- Kim, J.-S.** (2012) Application of Saint-Venant's Principle to Anisotropic Beams, *Trans. Korean Soc. Mech. Eng. A*, 36(4), pp.451~455.
- Kim, J.-S., Cho, M.** (2007) An Accurate and Efficient Analysis of Composite Plates Based on Enhanced First-order Shear Deformation Theory, *J. Comput. Struct. Eng. Inst. Korea*, 19(4), pp.407~418.
- Kim, J.-S., Cho, M.** (2011) A Novel Methodology of Improving Stress Prediction via Saint-Venant's Principle, *J. Comput. Struct. Eng. Inst. Korea*, 24(2), pp.149~156.
- Kim, J.-S., Han, J.W., Cho, M.** (2011) On the Modification of a Classical Higher-order Shear Deformation Theory to Improve the Stress Prediction of Laminated Composite Plates, *J. Comput. Struct. Eng. Inst. Korea*, 24(3), pp.249~257.
- Kim, J.-S., Wang, K.W.** (2011) On the asymptotic boundary conditions of an anisotropic beam via virtual work principle, 48(16-17), pp. 2422~2431.
- Timoshenko, S.P., Goodier, J.N.** (1951) *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, New York.

## 요 지

본 논문에서는 기존에 개발된 쉐브낭의 원리를 이용한 응력개선방법에 부가적인 면외 워핑함수를 도입하여 후처리함으로써 기계 및 열응력을 개선할 수 있는 방법을 소개하였다. 열응력 예측이 중요한 문제로 다루어지고 있으며, 이에 따라 수많은 보이론들이 개발되어왔다. 일반적으로 고차이론들이 열응력 예측에 유용하다고 알려져 있지만, 자유도가 많아 계산과정이 복잡하다는 단점이 존재한다. 이러한 단점들을 보완하기 위해, 본 연구에서는 계산이 비교적 간단한 고전 보이론의 변위장에 면외 워핑함수를 부가적으로 도입하고 합응력 등가를 통해 후처리함으로써 보 구조물의 열응력을 정확하게 예측할 수 있는 방법을 제시하였다. 그리고 다양한 경계조건을 가지는 수치예제들을 통해 탄성해와 비교함으로써 그 정확도를 검증하고, 면외 워핑함수가 응력개선에 미치는 영향에 대해 분석하였다.

**핵심용어** : 쉐브낭의 원리, 면외 워핑함수, 기계 및 열응력 개선