Journal of the Korean Data & Information Science Society
2016, **27**(3), 711–724

http://dx.doi.org/10.7465/jkdi.2016.27.3.711
한국데이터정보과학회지

다중 동적 Competing Risks 모형을 갖는 이변량 신뢰성 모형에 관한 연구[†]

김주영[1] · 차지환[2]

[12]이화여자대학교 통계학과

접수 2016년 4월 19일, 수정 2016년 5월 9일, 게재확정 2016년 5월 17일

요 약

다양하게 변화하는 복잡한 생존환경 하에서는 여러 요인이 동시에 사람이나 시스템의 수명에 영향을 줄 수 있다. 본 연구에서는 여러 요인이 동시에 수명에 영향을 주면서, 영향력의 크기가 상황에 따라 동적으로 변화하는 신뢰성 모형에 관한 연구를 수행한다. 수명에 영향을 주는 요인으로, 자연적 고장과 더불어, 하나의 개체의 사망이나 고장으로 인한 잔여 개체에 대한 스트레스 증가, 외부 충격, 그리고 생존 환경 스트레스 수준을 동시에 고려한다. 이들 요인들을 모두 포함하는 두 가지 모델을 고려하고, 이변량 수명 분포를 유도한다. 또한 이들 두 모형을 서로 비교하며, 이들 모형으로부터 얻어지는 최대값의 분포와 최소값의 분포를 비교하고자 한다. 제안된 두 가지 신뢰성 모형에서의 최대값 분포와 최소값 분포의 비교를 위하여 확률적 순서화에 관한 개념을 소개하며, 이에 기초하여 최대값 분포와 최소값 분포에 대한 확률적 비교를 수행한다.

주요용어: 결합분포, 이변량 분포, 조건부 고장률함수, 최대값과 최소값분포, 포아송 충격과정

1. 서 론

이변량 분포는 신뢰성, 생존분석, 큐잉분석, 생명보험 등의 분야에서 상호 의존적인 관측값들을 모델링하는데 있어서 매우 중요하다 (Iyer와 Manjunath, 2004; Lee, 2014). 특히, 수명분포 모델링에 있어서, 살아있는 개체나 시스템내의 부품의 수명은 많은 경우 상호 의존적이라 할 수 있다. 예를 들면 부부 수명 사이에는 매우 높은 상관관계가 존재한다고 알려져 있으며 (Carriere, 2000), 특히 부부의 사별이 생존자의 사망 위험률을 높이는 것으로 알려져 있다 (Jagger와 Sutton, 1991). 이러한 여러 가지 이유로, 지금까지 많은 이변량 분포들이 연구되어 왔다.

이변량 분포의 초기 연구에서는 주로 지수분포를 이변량 분포로 확장하려는 시도가 진행되었다. 예를 들면 Gumbel (1960)등을 초기 연구의 예로 들 수 있다. 그 후, Freund (1961)는 절대연속인 이변량 지수 분포를 제안하였다. Marshall과 Oklin (1967) 또한 이변량 지수 분포를 제안하였으나, 이들이 제안한 분포는 절대 연속이 아니다. 또 다른 다양한 시도들이 Downton (1970), Hawkes (1972), Block과 Basu (1974), Shaked (1984), Sarkar (1987)과 Hayakawa (1994) 등에 의하여 시도되었다. 또

† 이 논문은 2015년도 정부 (교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임 (2009-0093827).
1 (120-750) 서울특별시 서대문구 대현동 11-1, 이화여자대학교 통계학과, 대학원생.
2 교신저자: (120-750) 서울특별시 서대문구 대현동 11-1, 이화여자대학교 통계학과, 교수.
E-mail: jhcha@ewha.ac.kr

한 지수 분포 이외의 분포에 대한 이변량 분포로의 다양한 확장이 연구되어 왔다 (Lee, 1979; Sarhan과 Balakrishnan, 2007; Balakrishnan과 Lai, 2009).

Freund (1961) 모델에서는 동적 (dynamic) 고장 요인을 고려한 초기 연구를 수행하였는데, 지수 분포를 따르는 시스템 내의 두 부품을 고려하고, 하나의 부품이 고장 났을 때 나머지 부품의 고장률이 증가하는 모형을 가정하고 이변량 지수분포를 유도하였다. 이러한 모델을 확장하여, 최근 Lee와 Cha (2014)는 부품의 수명 분포가 임의의 분포를 따르는 경우로 모델을 일반화한 이변량 분포에 관한 연구를 수행 하였다.

하지만, 개체의 생존환경이나 시스템의 가동 환경이 일반적으로 매우 복잡하고, 여러 요인이 동시에 수명에 영향을 줄 수 있으며, 이러한 경우 영향을 주는 모든 요인들을 고려한 수명분포 모델링이 필요하다. 이에 본 연구에서는 여러 요인이 동시에 수명에 영향을 주면서, 영향력의 크기가 상황에 따라 동적으로 변화하는 이변량 분포에 관한 연구를 수행한다. 본 연구에서는 수명에 영향을 주는 요인으로, 자연적 고장과 더불어, (i)하나의 개체의 사망이나 부품의 고장으로 인한 잔여 개체나 부품의 고장 가능성 증가 (ii)외부 충격 (iii)생존환경 스트레스 수준을 고려한다. 이들 요인들을 모두 포함하는 두 가지 이변량 분포 모형을 고려하고, 이변량 수명분포를 유도한다. 또한 얻어진 두 모형을 서로 비교하며, 이로부터 얻어지는 최대값 (maximum)과 최소값 (minimum)의 분포를 비교하고자 한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제 2절에서는 첫 번째 이변량 모형에 관한 연구를 수행한다. 제 3절에서는 2절에서 얻어진 결과를 이용하여 두 번째 이변량 모형에 대한 결과를 유도한다. 제 4절에서는 이들 두 모형에 대한 비교 연구를 수행하며, 마지막으로 제 5절에서는 연구의 결론을 제시한다.

2. 모형 I

설명의 편의를 위하여 두 부품으로 구성된 시스템을 고려하자. 이들 두 부품의 수명에 영향을 주는 요인들을 모두 열거하면 다음과 같다.

(i) 정적인 (static) 환경 하에서의 자연적 고장
(ii) 각각의 부품에 독립적으로 작용하는 충격 (shock)에 의한 고장
(iii) 두 부품에 공통적으로 작용하는 충격 (shock)에 의한 고장

또한 추가적인 모델에 대한 가정으로서

(a1) 시스템은 스트레스 환경 수준이 확률적으로 다른 여러 환경 하에서 가동된다고 하자.
(a2) 하나의 부품이 고장 나면 이는 남아있는 부품의 스트레스 혹은 부하 (load)를 증가시켜서 결과적으로 남아있는 부품의 수명을 단축시킨다고 가정하자.

이제 이러한 요인들을 모두 포함하는 이변량 수명분포를 보다 명확히 기술하고자 한다. 우선, 시스템이 가동되는 스트레스 환경의 수준을 연속형 확률변수 Z로 표현하고, 이의 확률밀도함수 (pdf)를 $\pi(z)$라 하자. $Z = 1$인 기저환경 수준에서 정의되는 (i) "정적인 환경 하에서의 자연적 고장"은 각 부품 1, 부품 2에 따라 고장률 함수 $\lambda_1(t)$와 $\lambda_2(t)$로 표현되며, 일반적으로 환경수준이 $Z = z$로 주어지는 경우 각 부품 1, 부품 2의 고장률 함수는 각각

$$z\lambda_1(t)\text{과 } z\lambda_2(t) \tag{2.1}$$

로 주어진다고 가정한다. 모델 (2.1)에 제시되어 있는 모형은 신뢰성이론이나 생존분석에서 널리 이용되는 비례위험모형 (proportional hazards model)에 해당한다 (Lee과 Kim, 2013). 외부 충격과정 (shock process)는 스트레스 환경의 수준 Z와 무관하다고 가정하며, 부품 1에만 영향을 주는 (즉, 발생

하면 부품1을 고장 나게 하는) 충격은 강도 (intensity) β_1을 갖는 Poisson과정, 부품 2에만 영향을 주는 (즉, 발생하면 부품2를 고장 나게 하는) 충격은 강도 β_2를 갖는 Poisson과정, 두 부품에 공통적으로 작용하는 (즉, 발생하면 부품1과 부품2를 모두 고장 나게 하는) 충격은 강도 β_{12}를 갖는 Poisson과정을 따른다고 가정하며, 각 Poisson과정끼리는 서로 독립이라 가정하자. 여기서 중요한 점은 두 부품에 공통적으로 작용하는 충격이 발생하면 두 부품이 동일시점에서 한꺼번에 고장 나게 된다. 또한 공통적인 충격에 의하지 않은 어떤 부품의 고장이 발생한 이후에도 이러한 공통적인 충격과정은 여전히 존재한다고 가정한다.

위에서 설명한 가정 (a2) "하나의 부품이 고장 나면 남아있는 부품의 스트레스 혹은 로드 (load)를 증가시켜서 그 부품의 수명을 단축시킨다고 가정하자"를 어떻게 확률적으로 구현할 지는 추후 상세히 기술하기로 하고, 일단 가정 (a2)가 없다고 했을 때 나머지 모든 요인들을 고려한 수명분포를 명확히 나타내도록 하자. 가정 (a2)가 없다고 했을 때 위의 모든 요인들을 고려했을 때의 부품 1과 부품 2의 수명을 기저 수명 (baseline lifetime)이라 정의하고, 이를 확률변수 X_1^*와 X_2^*로 나타내자. 그러면, 두 부품이 환경 수준을 공유하고 또한 공통적으로 작용하는 충격이 존재하므로 X_1^*와 X_2^*는 서로 독립이 아니다. 이 경우 우선 $Z=z$로 주어진 경우 X_1^*와 X_2^*각각의 조건부 고장률함수를 나타내면

$$z\lambda_1(t)+\beta_1+\beta_{12},\ z\lambda_2(t)+\beta_2+\beta_{12}$$

로 각각 나타난다.

이제 추가적으로 가정 (a2)를 어떻게 확률적으로 구현할 지 상세히 기술하기로 하자. 이를 위하여 우선 공변량과정 (covariate process)에 의해 정의되는 조건부 고장률함수와 조건부 생존함수에 대하여 간략히 설명하도록 하자. 어떤 하나의 시스템이 랜덤하게 변화하는 환경 하에서 작동한다고 가정하고, 그러한 랜덤하게 변화하는 환경을 공변량 확률과정 $\{Z(t), t\geq 0\}$으로 나타내자. 그리고 그러한 시스템의 수명을 T라고 하자. 예를 들어 공변량 확률과정 $\{Z(t), t\geq 0\}$는 시간에 따라 랜덤하게 변화하는 외부 온도, 전기적이고 기계적인 부하 (load) 또는 랜덤하게 변화하는 외부 스트레스 등을 나타낼 수 있다. 그러면 다음과 같이 조건부 고장률함수가 정의될 수 있다 (Kalbfleisch와 Prentice, 1980).

$$r(t|z(s), 0\leq s\leq t)\equiv\lim_{\triangle t\to 0}\frac{P(t<T\leq t+\triangle t|Z(s)=z(s),\ 0\leq s\leq t,\ T>t)}{\triangle t}.$$

이러한 조건부 고장률 함수는 공변량 과정 $\{Z(t), t\geq 0\}$가 정해진 다음에 결정되게 되며, 고정되지 않은 공변량 과정 하에서는 이 또한 명백히 하나의 확률과정이 됨을 알 수 있다. 따라서 이를 종종 '고장률 과정 (failure rate process)'(또는 random failure rate)이라고 한다. 보다 자세한 사항은 Kebir (1991), Aven과 Jensen (1999), Finkelstein과 Cha (2013)을 참조하기 바란다. 그러면 이러한 조건부 고장률에 기초하여 조건부 생존 함수를 다음과 같이 나타난다.

$$P(T>t|Z(s)=z(s), 0\leq s\leq t)=\exp\left(-\int_0^t r(w|z(s),\ 0\leq s\leq w)dw\right). \tag{2.2}$$

Cha와 Mi(2007, 2011)에서는 위에서 기술한 조건부 고장률 함수를 신뢰성 모델링에 적용하여 다양한 Shock모델이나 다른 확률 모형에 관한 연구를 수행하였다.

이제 본 논문에서의 연구 모형으로 돌아와서, 가정 (a2)에 대한 확률모형을 제시하고자 한다. 가정 (a2)에 의하여 하나의 부품이 고장 나면 남아있는 부품의 스트레스 혹은 로드 (load)를 증가시켜서 그 부품의 수명을 단축시킨다고 가정한다. 이러한 가정을 추가적으로 도입 했을 때의 부품 1과 부품 2의 수명을 X_1와 X_2로 나타내자. 이 경우에는 어떤 부품의 수명에 영향을 주는 공변량 과정이 다른 부품의 상태를 나타내는 확률과정이라 할 수 있다. 따라서 임의의 시점에서 각 부품의 상태를 나타내는 지시변

수를 다음과 같이 정의하자. 부품 1 (부품 2)가 t시점에 작동하고 있으면 $\Psi_1(t)=1$ ($\Psi_2(t)=1$)로 정의하고 반면에 부품 1 (부품 2)가 t시점에 고장 상태에 있으면 $\Psi_1(t)=0$ ($\Psi_2(t)=0$)로 정의한다. 편의상 $i=1$이면 $\bar{i}=2$, $i=2$이면 $\bar{i}=1$로 정의하자. 그러면 가정 (a2)에 대한 확률모형으로 다음 모형을 도입한다.

$$\begin{aligned}
r_i(t|\Psi_{\bar{i}}(s)&=1, 0\le s\le t; Z=z)\\
&\equiv \lim_{\triangle t\to 0} P(t<X_i\le t+\triangle t|\Psi_{\bar{i}}(s)=1,\ 0\le s\le t,\ X_i>t,\ Z=z)\\
&= z\lambda_i(t)+\beta_i+\beta_{12},\ i=1,2,\ z>0,
\end{aligned}\tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}
r_i(t|\Psi_{\bar{i}}(s)&=1, 0\le s\le u; \Psi_{\bar{i}}(s)=0, u\le s\le t; Z=z)\\
&\equiv \lim_{\triangle t\to 0} P(t<X_i\le t+\triangle t|\Psi_{\bar{i}}(s)=1, 0\le s\le u; \Psi_{\bar{i}}(s)=0,\ u\le s\le t,\ X_i>t, Z=z)\\
&= \alpha_i(u,t-u)z\lambda_i(t)+\beta_i+\beta_{12}, t\ge u\ ,\ i=1,2,\ z>0,\ \alpha_i(s,w)\ge 1,\ s,w\ge 0.
\end{aligned}\tag{2.4}$$

여기서, 중요한 조건이 모든 $s,w\ge 0$에 대하여, $\alpha_i(s,w)\ge 1$이다. 따라서 식 (2.4)를 해석해보면, 하나의 부품이 이전에 고장 난 경우 그렇지 않은 경우인 식 (2.3)에 비하여 정적인 환경 하에서의 자연적 고장 가능성이 증가한다고 할 수 있다. 위 식 (2.4)에서 최초 고장 부품의 상태변화시점에 대한 효과는 변수 "s"에 의해 모형화 될 수 있고, 이러한 상태변화시점으로부터 경과된 시간에 대한 효과는 변수 "w"로 모형화 될 수 있다. 예를 들어, 만약 최초 부품 고장 후 시간이 증가함에 따라 증가한 스트레스의 효과가 점점 커지게 되면 $\alpha_i(s,w)$는 w에 대하여 증가해야 하고 점점 작 아지게 되면 $\alpha_i(s,w)$는 w에 대하여 감소해야 한다. 이와 비슷하게 최초 부품의 고장 시점이 점점 늦을수록 증가된 스트레스의 효과가 점점 심하게 되면 $\alpha_i(s,w)$는 s에 대하여 증가해야 하고 반대로 점점 약해지면 $\alpha_i(s,w)$는 s에 대하여 감소해야 한다. 명백히, 모든 $s,w\ge 0$에 대하여 식 (2.4)에서 $\alpha_i(s,w)=1$인 경우는 X_1와 X_2가 각각 X_1^*와 X_2^*인 경우에 해당한다.

위의 식 (2.3), 식 (2.4)의 의미를 보다 엄밀히 해석해보자. 이를 위하여 다음과 같은 Failure Rate Order의 개념을 소개한다.

정의 2.1 (The Failure Rate Order) 음이 아닌 확률변수 Z_1와 Z_2가 절대연속인 분포함수를 가지며, 고장률 함수를 각각 $r_1(t)$와 $r_2(t)$로 가질 때, 다음을 만족하면 Failure Rate Order의 의미에서 Z_1가 Z_2보다 작다고 한다. ($Z_1\le_{fr} Z_2$라 표기한다.)

$$\text{모든 } t\in(0,\infty)\text{에 대하여, } r_1(t)\ge r_2(t).$$

식 (2.3)과 식 (2.4)의 X_1와 X_2에 관한 모형은 다음과 같이 Failure Rate Order의 개념에 기초하여 X_1^*와 X_2^*와의 비교를 통한 보다 엄밀한 해석을 할 수 있다.

$$\begin{aligned}
(X_i^*|\Psi_{\bar{i}}(s)&=1,\ 0\le s<u,\ \Psi_{\bar{i}}(s)=0,\ s\ge u,\ X_i^*>u,\ Z=z)\\
&\ge_{fr} (X_i|\Psi_{\bar{i}}(s)=1,\ 0\le s<u,\ \Psi_{\bar{i}}(s)=0,\ s\ge u,\ X_i>u,\ Z=z),\ \text{for all } u>0.
\end{aligned}$$

X_i^*의 조건부 생존함수는

$$\begin{aligned}
P(X_i^*>t|\Psi_{\bar{i}}(s)&=1,\ 0\le s<u, \Psi_{\bar{i}}(s)=0,\ s\ge u, X_i^*>u, Z=z)\\
&= P(X_i^*>t|X_i^*>u)=\exp\left(-\int_0^{t-u}(z\lambda_i(u+w)+\beta_i+\beta_{12})dw\right),\ i=1,2,
\end{aligned}$$

로 주어지는 반면에, 식 (2.3)과 식 (2.4)의 모형을 가정하면, 식 (2.2)에 의하여 X_i는 다음과 같은 조건부 생존함수를 가진다.

$$\begin{aligned}&P(X_i > t|\Psi_{\tilde{i}}(s) = 1,\ 0 \le s < u,\ \Psi_{\tilde{i}}(s) = 0, s \ge u, X_i > u, Z = z)\\&\qquad = \exp\left(-\int_0^{t-u} (\alpha_i(u,w) z\lambda_i(u+w) + \beta_i + \beta_{12}) dw\right),\ i = 1, 2.\end{aligned}$$

다음의 정리에서는 가정된 모형에 기초하여 X_1와 X_2의 결합분포를 제시하고자 한다. 이를 위하여 X_1와 X_2의 결합 생존함수와 결합 확률밀도함수를 각각 $S(x_1, x_2)$와 $f(x_1, x_2)$로 나타내고 X_1와 X_2각각에 대한 주변 생존함수와 확률밀도함수 $S_{X_1}(x_1)$, $f_{X_1}(x_1)$와 $S_{X_2}(x_2)$, $f_{X_2}(x_2)$를 구해보고자 한다.

정리 2.1 X_1와 X_2의 결합생존함수 $S(x_1, x_2)$는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}S(x_1, x_2) = \int_0^\infty \Bigg[&\int_{x_1}^{x_2} \{z\lambda_1(u) + \beta_1\} \exp\left(- \int_0^{x_2-u} (\alpha_2(u,w) z\lambda_2(u+w) + \beta_2 + \beta_{12}) dw\right)\\&\times \exp\left(- \int_0^u (z\lambda_1(w) + z\lambda_2(w) + \beta_1 + \beta_2 + \beta_{12}) dw\right) du\\&+ \exp\left(- \int_0^{x_2} (z\lambda_1(w) + z\lambda_2(w) + \beta_1 + \beta_2 + \beta_{12}) dw\right)\Bigg] \pi(z) dz,\ \text{for } 0 < x_1 < x_2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S(x_1, x_2) = \int_0^\infty \Bigg[&\int_{x_2}^{x_1} \{z\lambda_2(u) + \beta_2\} \exp\left(- \int_0^{x_1-u} (\alpha_1(u,w) z\lambda_1(u+w) + \beta_1 + \beta_{12}) dw\right)\\&\times \exp\left(- \int_0^u (z\lambda_1(w) + z\lambda_2(w) + \beta_1 + \beta_2 + \beta_{12}) dw\right) du\\&+ \exp\left(- \int_0^{x_1} (z\lambda_1(w) + z\lambda_2(w) + \beta_1 + \beta_2 + \beta_{12}) dw\right)\Bigg] \pi(z) dz,\ \text{for } 0 < x_2 \le x_1.\end{aligned}$$

증명: $S(x_1, x_2)$는

$$P(X_1 > x_1, X_2 > x_2) = \int_0^\infty P(X_1 > x_1, X_2 > x_2|Z = z)\pi(z) dz,$$

이고

$$\begin{aligned}P(X_1 > x_1, X_2 > x_2|Z = z) &= P(X_1 > x_1, X_2 > x_2|X_1^* < X_2^*, Z = z)P(X_1^* < X_2^*|Z = z)\\&+P(X_1 > x_1, X_2 > x_2|X_1^* > X_2^*, Z = z)P(X_1^* > X_2^*|Z = z)\\&+P(X_1 > x_1, X_2 > x_2|X_1^* = X_2^*, Z = z)P(X_1^* = X_2^*|Z = z). \quad (2.5)\end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned}&P(X_1 > x_1, X_2 > x_2|X_1^* < X_2^*,\ Z = z)\\&\quad = \int_0^\infty P(X_1 > x_1,\ X_2 > x_2|X_1^* < X_2^*,\ X_1^* = u,\ Z = z) f_{X_1^*|X_1^* < X_2^*,\ Z=z}(u) du. \quad (2.6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&P(X_1 > x_1, X_2 > x_2|X_1^* > X_2^*,\ Z = z)\\&\quad = \int_0^\infty P(X_1 > x_1,\ X_2 > x_2|X_1^* > X_2^*, X_2^* = u,\ Z = z) f_{X_2^*|X_1^* > X_2^*,\ Z=z}(u) du. \quad (2.7)\end{aligned}$$

$$P(X_1 > x_1, X_2 > x_2 | X_1^* = X_2^*,\ Z = z)$$
$$= \int_0^\infty P(X_1 > x_1, X_2 > x_2 | X_1^* = X_2^* = u,\ Z = z) f_{X_2^* | X_1^* = X_2^*,\ Z = z}(u) du. \qquad (2.8)$$

(Case1) $0 < x_1 < x_2$라고 가정하자. $u < x_1$나 $x_2 \leq u$인 u에 대하여 부품 1이 처음으로 u시점에서 고장 난다는 조건 하에 조건부 결합 생존함수는 다음과 같이 명백하게 주어진다.

$$P(X_1 > x_1, X_2 > x_2 | X_1^* < X_2^*,\ X_1^* = u,\ Z = z) = \begin{cases} 0, & u < x_1, \\ 1, & x_2 \leq u, \end{cases}$$

반면에, $x_1 \leq u < x_2$인 u에 대하여, 식 (2.3)과 식 (2.4)에서의 조건부 고장률함수에 대한 가정에 의하여 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} P(X_1 > x_1, X_2 > x_2 | X_1^* < X_2^*, X_1^* = u, Z = z) &= P(X_2 > x_2 | X_1^* < X_2^*, X_1^* = u, Z = z) \\ &= P(X_2 > x_2 | \Psi_1(s) = 1, 0 \leq s < u, \Psi_1(s) = 0, s \geq u, X_2 > u, Z = z) \\ &= \exp\left(- \int_0^{x_2 - u} (\alpha_2(u, w) z \lambda_2(u + w) + \beta_2 + \beta_{12}) dw \right),\ x_1 \leq u < x_2. \end{aligned}$$

또한 $Z = z$가 주어지고 $X_1^* < X_2^*$가 주어진 경우
$f_{X_1^* | X_1^* < X_2^*, Z = z}(u)$

$$= \frac{\{z\lambda_1(u) + \beta_1\} \exp\left(- \int_0^u (z\lambda_1(w) + z\lambda_2(w) + \beta_1 + \beta_2 + \beta_{12}) dw\right)}{P(X_1^* < X_2^*,\ Z = z)} \pi(z).$$

반면에, 부품 2가 u시점에서 먼저 고장 난다는 조건 하에, 조건부 결합 생존 함수는

$$P(X_1 > x_1, X_2 > x_2 | X_1^* > X_2^*, X_2^* = u,\ Z = z) = \begin{cases} 0, & u < x_2, \\ 1, & u \geq x_2, \end{cases}$$

이고
$f_{X_2^* | X_1^* > X_2^*, Z = z}(u)$

$$= \frac{\{z\lambda_2(u) + \beta_2\} \exp\left(- \int_0^u (z\lambda_1(w) + z\lambda_2(w) + \beta_1 + \beta_2 + \beta_{12}) dw\right)}{P(X_1^* > X_2^*, Z = z)} \pi(z).$$

한편, 부품 1과 부품 2가 u시점에서 동시에 고장 난다는 조건하에서는 조건부 결합 생존함수는

$$P(X_1 > x_1, X_2 > x_2 | X_1^* = X_2^*, X_1^* = u, Z = z) = \begin{cases} 0, u < x_2, \\ 1, x_2 \leq u, \end{cases}$$

이고
$f_{X_2^* | X_1^* = X_2^*, Z = z}(u)$

$$= \frac{\{\beta_{12}\} \exp\left(- \int_0^u (z\lambda_1(t) + z\lambda_2(t) + \beta_1 + \beta_2 + \beta_{12}) dw\right)}{P(X_1^* = X_2^*,\ Z = z)} \pi(z).$$

이제 위에서 얻어진 식에 기초하여 식 (2.5)∼식 (2.8)을 결합하면 다음과 같이 결합생존함수를 얻을 수 있다.

$$S(x_1,x_2)=\int_0^\infty\Bigg[\int_{x_1}^{x_2}\{z\lambda_1(u)+\beta_1\}\exp\Bigg(-\int_0^{x_2-u}(\alpha_2(u,w)z\lambda_2(u+w)+\beta_2+\beta_{12})dw\Bigg)$$
$$\times\exp\Bigg(-\int_0^{u}(z\lambda_1(w)+z\lambda_2(w)+\beta_1+\beta_2+\beta_{12})dw\Bigg)du$$
$$+\exp\Bigg(-\int_0^{x_2}(z\lambda_1(w)+z\lambda_2(w)+\beta_1+\beta_2+\beta_{12})dw\Bigg)\Bigg]\pi(z)dz,\ \text{for } 0<x_1<x_2.$$

(Case 2) $0<x_2\le x_1$라 가정하자. (X_1,X_1^*)와 (X_2,X_2^*)의 역할이 서로 대칭적이기 때문에 다음을 얻을 수 있다.

$$S(x_1,x_2)=\int_0^\infty\Bigg[\int_{x_2}^{x_1}\{z\lambda_2(u)+\beta_2\}\exp\Bigg(-\int_0^{x_1-u}(\alpha_1(u,w)z\lambda_1(u+w)+\beta_1+\beta_{12})dw\Bigg)$$
$$\times\exp\Bigg(-\int_0^{u}(z\lambda_1(w)+z\lambda_2(w)+\beta_1+\beta_2+\beta_{12})dw\Bigg)du$$
$$+\exp\Bigg(-\int_0^{x_1}(z\lambda_1(w)+z\lambda_2(w)+\beta_1+\beta_2+\beta_{12})dw\Bigg)\Bigg]\pi(z)dz,\ \text{for } 0<x_2\le x_1.$$

□

앞서 얻어진 결합분포의 중요한 특징은 절대연속이 아니라는 사실이다. 공통적인 충격에 의하여 두 부품이 동시에 고장 날 수 있으므로 $x_1=x_2$영역에서의 확률측도값이 0이 아니다. 따라서 결합확률밀도함수를 나타낼 때 이 영역에 대한 밀도함수를 별도로 나타낼 필요가 있다. X_1와 X_2에 대응하는 결합확률밀도함수는 다음과 같이 주어진다.

보조정리 2.1 X_1와 X_2의 결합확률밀도함수는 다음과 같다.

$$f(x_1,x_2)=\int_0^\infty\Bigg[\{z\lambda_1(x_1)+\beta_1\}\{\alpha_2(x_1,x_2-x_1)z\lambda_2(x_2)+\beta_2+\beta_{12}\}$$
$$\times\exp\Bigg(-\int_0^{x_2-x_1}(\alpha_2(x_1,w)z\lambda_2(x_1+w)+\beta_2+\beta_{12})dw\Bigg)$$
$$\times\exp\Bigg(-\int_0^{x_1}(z\lambda_1(w)+z\lambda_2(w)+\beta_1+\beta_2+\beta_{12})dw\Bigg)\Bigg]\pi(z)dz,\ \text{for } 0<x_1<x_2.$$

$$f(x_1,x_2)=\int_0^\infty\Bigg[\{z\lambda_2(x_2)+\beta_2\}\{\alpha_1(x_2,x_1-x_2)z\lambda_1(x_1)+\beta_1+\beta_{12}\}$$
$$\times\exp\Bigg(-\int_0^{x_1-x_2}(\alpha_1(x_2,w)z\lambda_1(x_2+w)+\beta_1+\beta_{12})dw\Bigg)$$
$$\times\exp\Bigg(-\int_0^{x_2}(z\lambda_1(w)+z\lambda_2(w)+\beta_1+\beta_2+\beta_{12})dw\Bigg)\Bigg]\pi(z)dz,\ \text{for } 0<x_2<x_1.$$

$$f(x,x)=\int_0^\infty\left[\{\beta_{12}\}\exp\left(-\int_0^x(z\lambda_1(w)+z\lambda_2(w)+\beta_1+\beta_2+\beta_{12})dw\right)\right]\pi(z)dz.$$

증명: $x_1 < x_2$혹은 $x_1 > x_2$에서의 결합확률밀도함수 $f(x_1, x_2)$는

$$f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} S(x_1, x_2)$$

의 관계식에 의하여 얻어질 수 있다. 또한 $x_1 = x_2 = x$영역에서의 결합확률밀도함수는 동시고장 외 나머지 원인에 의한 고장은 x시점까지 발생하지 않아야하며, x시점에서 공통적인 충격에 의해서만 동시고장이 순간적으로 발생할 확률을 구하면 되므로, 주어진 식과 같이 얻어진다. □

$S(x_1, x_2)$에서 $x_1 \equiv 0$또는 $x_2 \equiv 0$으로 두면, 주변분포들을 얻을 수 있다. 주변분포들의 생존함수들 $S_{X_1}(x_1), S_{X_2}(x_2)$과 확률밀도함수들 $f_{X_1}(x_1), f_{X_2}(x_2)$은 다음의 보조정리에서 주어진다.

보조정리 2.2 X_1와 X_2의 주변분포함수들은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} S_{X_1}(x_1) = \int_0^\infty \Bigg[& \int_0^{x_1} \{z\lambda_2(u) + \beta_2\} \exp(-\int_0^{x_1-u} (\alpha_1(u,w) z\lambda_1(u+w) + \beta_1 + \beta_{12}) dw \Big) \\ & \times \exp\Big(-\int_0^u (z\lambda_1(w) + z\lambda_2(w) + \beta_1 + \beta_2 + \beta_{12}) dw \Big) du \\ & + \exp\Big(-\int_0^{x_1} (z\lambda_1(w) + z\lambda_2(w) + \beta_1 + \beta_2 + \beta_{12}) dw \Big) \Bigg] \pi(z) dz. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{X_2}(x_2) = \int_0^\infty \Bigg[& \int_0^{x_2} \{z\lambda_1(u) + \beta_1\} \exp\Big(-\int_0^{x_2-u} (\alpha_2(u,w) z\lambda_2(u+w) + \beta_2 + \beta_{12}) dw \Big) \\ & \times \exp\Big(-\int_0^u (z\lambda_1(w) + z\lambda_2(w) + \beta_1 + \beta_2 + \beta_{12}) dw \Big) du \\ & + \exp\Big(-\int_0^{x_2} (z\lambda_1(w) + z\lambda_2(w) + \beta_1 + \beta_2 + \beta_{12}) dw \Big) \Bigg] \pi(z) dz. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{X_1}(x_1) = \int_0^\infty \Bigg[& \int_0^{x_1} \{\lambda_2(u) + \beta_2\} \{\alpha_1(u, x_1 - u) z\lambda_1(x_1) + \beta_1 + \beta_{12}\} \\ & \times \exp\Big(-\int_0^{x_1-u} (\alpha_1(u,w) z\lambda_1(u+w) + \beta_1 + \beta_{12}) dw \Big) \\ & \times \exp\Big(-\int_0^u (z\lambda_1(w) + z\lambda_2(w) + \beta_1 + \beta_2 + \beta_{12}) dw \Big) du \\ & + \{z\lambda_1(x_1) + \beta_1 + \beta_{12}\} \exp\Big(-\int_0^{x_1} (z\lambda_1(w) + z\lambda_2(w) + \beta_1 + \beta_2 + \beta_{12}) dw \Big) \Bigg] \pi(z) dz. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{X_2}(x_2) = \int_0^\infty \Bigg[& \int_0^{x_2} \{\lambda_1(u) + \beta_1\} \{\alpha_2(u, x_2 - u) z\lambda_2(x_2) + \beta_2 + \beta_{12}\} \\ & \times \exp\Big(-\int_0^{x_2-u} (\alpha_2(u,w) z\lambda_2(u+w) + \beta_2 + \beta_{12}) dw \Big) \\ & \times \exp\Big(-\int_0^u (z\lambda_1(w) + z\lambda_2(w) + \beta_1 + \beta_2 + \beta_{12}) dw \Big) du \\ & + \{z\lambda_2(x_2) + \beta_2 + \beta_{12}\} \exp\Big(-\int_0^{x_1} (z\lambda_1(w) + z\lambda_2(w) + \beta_1 + \beta_2 + \beta_{12}) dw \Big) \Bigg] \pi(z) dz. \end{aligned}$$

3. 모형 II

3절에서는 2절에서 고려하였던 이변량 분포 모형을 변형하여 새로운 Class의 이변량 분포를 얻고자 한다. Model II에서의 모든 가정은 Model I에서의 가정과 같으나, 다음과 같은 점에서만 차이가 있다. Model I에서는 두 부품에 공통적으로 작용하는 충격이 발생하면 두 부품이 동일시점에서 한꺼번에 고장 나게 되며 또한 공통적인 충격에 의하지 않은 어떤 부품의 고장이 발생한 이후에도 이러한 공통적인 충격과정은 여전히 존재한다고 가정하였다. 따라서, 예를 들면 부품 1이 자연적 고장이나 부품 1에만 영향을 미치는 충격에 의하여 고장 난 이후에도 공통적인 충격과정은 여전히 존재하여 부품 2의 고장에 영향을 미친다. 하지만 Model II에서는 두 부품에 공통적으로 작용하는 충격이 발생하면 두 부품이 동일 시점에서 한꺼번에 고장 나게 되지만, 공통적인 충격에 의하지 않은 어떤 부품의 고장이 발생한 이후에는 이러한 공통적인 충격과정은 존재하지 않는다고 가정한다. 따라서 이 경우에는 예를 들면 부품 1이 자연적 고장이나 부품 1에만 영향을 미치는 충격에 의하여 고장 났다면 이후에는 공통적인 충격과정이 존재하지 않으므로 공통적인 충격이 부품 2의 고장에 영향을 미치지 않는다. 이러한 모형은 예를 들면 부부의 수명 모형에서 흔히 관찰될 수 있다. 부부가 모두 생존하고 있을 때에는 이들의 공동 활동으로 인한 동시 사망 위험이 존재하지만, 부부 두 사람 중 한 사람이 사망하고 나면 부부 공동 활동 자체가 있을 수 없으므로 동시 사망 위험이 사라지게 된다. 따라서 위에서 기술한 모형은 두 부품 중 한 부품이 고장 나면 나머지 부품의 고장률 함수를 증가시킬 뿐만 아니라 공통 충격과정의 강도를 0으로 만드는 모델로서, Model I보다 더욱 동적인 모형이라 할 수 있다. 이 경우 모델을 수학적으로 기술함에 있어서의 차이는 식 (2.3)과 식 (2.4)에 있으며, 이 식들은 Model II에서 다음과 같이 수정되어야 한다:

$$\begin{aligned} r_i(t|\Psi_{\bar{i}}(s) = 1,\ 0 \le s \le t; Z = z) &\equiv \lim_{\triangle t \to 0} P(t < X_i \le t + \triangle t | \Psi_{\bar{i}}(s) = 1,\ 0 \le s \le t,\ X_i > t, Z = z) \\ &= z\lambda_i(t) + \beta_i + \beta_{12}, i = 1, 2, z > 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} r_i(t|\Psi_{\bar{i}}(s) = 1,\ 0 \le s \le u; \Psi_{\bar{i}}(s) = 0,\ u \le s \le t; Z = z) \\ \equiv \lim_{\triangle t \to 0} P(t < X_i \le t + \triangle t | \Psi_{\bar{i}}(s) = 1, 0 \le s \le u; \Psi_{\bar{i}}(s) = 0,\ u \le s \le t,\ X_i > t,\ Z = z) \\ = \alpha_i(u, t-u) z\lambda_i(t) + \beta_i,\ t \ge u,\ i = 1, 2,\ z > 0,\ \alpha_i(s, w) \ge 1,\ s, w \ge 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

위의 식 (3.1)에서 볼 수 있듯이, 두 부품이 모두 작동하고 있을 때에는 공통적인 충격이 각 부품의 수명에 영향을 미치지만, 식 (3.2)에서 보듯이 하나의 부품이 고장 나고 난 이후에는 공통적인 충격이 존재하지 않아서 남아 있는 부품의 수명에 영향을 미치지 않는다. Model II의 결합생존함수는 다음과 같이 얻어진다.

정리 3.1 X_1와 X_2의 결합생존함수 $S(x_1, x_2)$는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} S(x_1, x_2) = \int_0^\infty \Bigg[\int_{x_1}^{x_2} \{z\lambda_1(u) + \beta_1\} \exp\left(- \int_0^{x_2 - u} (\alpha_2(u, w) z\lambda_2(u + w) + \beta_2) dw \right) \\ \times \exp\left(- \int_0^u (z\lambda_1(w) + z\lambda_2(w) + \beta_1 + \beta_2 + \beta_{12}) dw \right) du \\ + \exp\left(- \int_0^{x_2} (z\lambda_1(w) + z\lambda_2(w) + \beta_1 + \beta_2 + \beta_{12}) dw \right) \Bigg] \pi(z) dz,\ \text{for } 0 < x_1 < x_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S(x_1,x_2)=\int_0^{\infty}\Bigg[&\int_{x_2}^{x_1}\{z\lambda_2(u)+\beta_2\}\exp\bigg(-\int_0^{x_1-u}(\alpha_1(u,w)z\lambda_1(u+w)+\beta_1)dw\bigg)\\&\times\exp\bigg(-\int_0^{u}(z\lambda_1(w)+z\lambda_2(w)+\beta_1+\beta_2+\beta_{12})dw\bigg)du\\&+\exp\bigg(-\int_0^{x_1}(z\lambda_1(w)+z\lambda_2(w)+\beta_1+\beta_2+\beta_{12})dw\bigg)\Bigg]\pi(z)dz,\ \text{for } 0<x_2\le x_1.\end{aligned}$$

증명: 정리 2.1의 증명과 같으나, $x_1 \le u < x_2$인 u에 대하여, 식 (3.1)과 식 (3.2)에서의 조건부 고장률 함수에 대한 가정에 의하여

$$\begin{aligned}P(X_1>x_1,X_2>x_2|X_1^*<X_2^*,X_1^*=u,Z=z)&=P(X_2>x_2|X_1^*<X_2^*,\ X_1^*=u,\ Z=z)\\&=P(X_2>x_2|\Psi_1(s)=1,\ 0\le s<u,\ \Psi_1(s)=0,\ s\ge u,X_2>u,\ Z=z)\\&=\exp\bigg(-\int_0^{x_2-u}(\alpha_2(u,w)z\lambda_2(u+w)+\beta_2)dw\bigg),\ x_1\le u<x_2\end{aligned}$$

로 주어진다. 나머지 과정은 정리 2.1의 증명과 동일하다.

X_1와 X_2에 대응하는 결합 확률밀도함수는 다음과 같이 주어진다.

보조정리 3.1 X_1와 X_2의 결합확률밀도함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2)=\int_0^{\infty}\Bigg[&\{z\lambda_1(x_1)+\beta_1\}\{\alpha_2(x_1,x_2-x_1)z\lambda_2(x_2)+\beta_2\}\\&\times\exp\bigg(-\int_0^{x_2-x_1}(\alpha_2(x_1,w)z\lambda_2(x_1+w)+\beta_2)dw\bigg)\\&+\exp\bigg(-\int_0^{x_1}(z\lambda_1(w)+z\lambda_2(w)+\beta_1+\beta_2+\beta_{12})dw\bigg)\Bigg]\pi(z)dz,\ \text{for } 0<x_1<x_2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2)=\int_0^{\infty}\Bigg[&\{z\lambda_2(x_2)+\beta_2\}\{\alpha_1(x_2,x_1-x_2)z\lambda_1(x_1)+\beta_1\}\\&\times\exp\bigg(-\int_0^{x_1-x_2}(\alpha_1(x_2,w)z\lambda_1(x_2+w)+\beta_1\bigg)dw)\\&+\exp\bigg(-\int_0^{x_2}(z\lambda_1(w)+z\lambda_2(w)+\beta_1+\beta_2+\beta_{12})dw\bigg)\Bigg]\pi(z)dz,\ \text{for } 0<x_2<x_1.\end{aligned}$$

$$f(x,x)=\int_0^{\infty}\bigg[\{\beta_{12}\}\exp\bigg(-\int_0^{x}(z\lambda_1(t)+z\lambda_2(t)+\beta_1+\beta_2+\beta_{12})dw\bigg)\bigg]\pi(z)dz.$$

□

X_1와 X_2의 주변분포함수들은 정리 3.1에서와 동일한 방법으로 쉽게 구할 수 있으므로 생략한다.

4. 비교 연구 (Comparisons)

4절에서는 2절과 3절에서 다루었던 Model I과 Model II를 비교하는 문제를 다루도록 한다. 이를 위하여 우선 다음과 같은 Usual Stochastic Order의 개념을 소개한다.

정의 4.1 (The Usual Stochastic Order) 확률변수 Z_1와 Z_2가 분포 함수를 각각 $G_1(t)$와 $G_2(t)$(해당 생존함수 $\bar{G}_1(t)$와 $\bar{G}_2(t)$)로 가질 때, 다음을 만족하면 Usual Stochastic Order의 의미에서 Z_1가 Z_2보다 작다고 한다. ($Z_1 \le_{st} Z_2$라 표기한다.)

$$\text{모든 } t \in (-\infty, \infty)\text{에 대하여, } G_1(t) \ge G_2(t) \ (\text{혹은 } \bar{G}_1(t) \le \bar{G}_2(t))$$

두 모델의 비교를 위하여, 편의상 Model i, $i = I, II$의 확률변수, 결합생존함수, 주변생존함수를 각각 $X_1^{[i]}$와 $X_2^{[i]}$, $S^{[i]}(x_1, x_2)$, $S_{X_1}^{[i]}(x_1), S_{X_2}^{[i]}(x_2)$, $i = 1, 2$로 나타내기로 한다. 다음 정리는 $X_1^{[i]}$와 $X_2^{[i]}$, $i = 1, 2$의 크기를 Usual Stochastic Order의 개념에 기초하여 비교한다.

정리 4.1 다음 관계가 성립한다.

$$X_j^{[1]} \le_{st} X_j^{[2]}, \ j = 1, 2.$$

증명: 위 관계식을 보이기 위하여

$$S_{X_j}^{[1]}(x_j) \le S_{X_j}^{[2]}(x_j), \ \forall x_j \ge 0, \ j = 1, 2,$$

를 보이면 된다. 보조정리 2.2로부터

$$\begin{aligned} S^{[1]}(x_1) = \int_0^\infty \Bigg[\int_0^{x_1} \{z\lambda_2(u) + \beta_2\} \exp\Bigg(-\int_0^{x_1-u} (\alpha_1(u,w)z\lambda_1(u+w) + \beta_1 + \beta_{12})dw \Bigg) \\ \times \exp\Bigg(-\int_0^u (z\lambda_1(w) + z\lambda_2(w) + \beta_1 + \beta_2 + \beta_{12})dw \Bigg) du \\ + \exp\Bigg(-\int_0^{x_1} (z\lambda_1(w) + z\lambda_2(w) + \beta_1 + \beta_2 + \beta_{12})dw \Bigg) \Bigg] \pi(z)dz \end{aligned} \tag{4.1}$$

로 주어지며, 또한 정리 3.1을 이용하여,

$$\begin{aligned} S^{[2]}(x_1) = \int_0^\infty \Bigg[\int_0^{x_1} \{z\lambda_2(u) + \beta_2\} \exp\Bigg(-\int_0^{x_1-u} (\alpha_1(u,w)z\lambda_1(u+w) + \beta_1)dw \Bigg) \\ \times \exp\Bigg(-\int_0^u (z\lambda_1(w) + z\lambda_2(w) + \beta_1 + \beta_2 + \beta_{12})dw \Bigg) du \\ + \exp\Bigg(-\int_0^{x_1} (z\lambda_1(w) + z\lambda_2(w) + \beta_1 + \beta_2 + \beta_{12})dw \Bigg) \Bigg] \pi(z)dz. \end{aligned} \tag{4.2}$$

식 (4.1)과 식 (4.2)를 비교하면 쉽게

$$S_{X_1}^{[1]}(x_1) \le S_{X_1}^{[2]}(x_1), \ \forall x_j \ge 0,$$

임을 보일 수 있다. □

이제 두 모형에서 확률변수 X_1와 X_2의 최소값 (minimum)과 최대값 (maximum)을 비교하는 문제를 다루어보자. 이러한 문제는 신뢰성 이론에서는 직렬시스템과 병렬시스템의 수명을 비교하는 문제에 해당하며, 생명보험에서는 연생보험상품에서 보험금 지급 시점을 비교하는 문제로서 현실적으로 중요한 주제이다. 우선 X_1와 X_2의 최소값과 관련하여서는 다음의 결론을 얻을 수 있다.

정리 4.2 다음 관계가 성립한다.

$$\min\{X_1^{[1]}, X_2^{[1]}\} =_{st} \min\{X_1^{[2]}, X_2^{[2]}\},$$

여기서 기호 "$Z_1 =_{st} Z_2$"는 두 확률변수의 분포가 동일함을 의미한다.

증명: 정리 2.1로 부터,

$$P(\min\{X_1^{[1]}, X_2^{[1]}\} > x) = S^{[1]}(x,x) = \int_0^\infty \exp(-\int_0^{x_1} (z\lambda_1(w) + z\lambda_2(w) + \beta_1 + \beta_2 + \beta_{12})dw)\pi(z)dz,$$

로 주어지며, 정리 3.1으로부터 $P(\min\{X_1^{[2]}, X_2^{[2]}\} > x) = S^{[2]}(x,x)$역시 동일한 식으로 얻어짐을 쉽게 확인할 수 있다. □

따라서 두 모델에서 확률변수 X_1와 X_2의 최소값의 분포는 동일함을 알 수 있다. 다음 정리는 확률변수 X_1와 X_2의 최대값을 비교하는 결과를 제시한다.

정리 4.3 다음 관계가 성립한다.

$$\max\{X_1^{[1]},\ X_2^{[1]}\} \leq_{st} \max\{X_1^{[2]}, X_2^{[2]}\}.$$

증명: $\max\{X_1^{[1]},\ X_2^{[1]}\}$ 의 생존함수는

$$\begin{aligned} P(\max\{X_1^{[1]}, X_2^{[1]}\} > x) &= P(X_1^{[1]} > x \ or \ X_2^{[1]} > x) \\ &= P(X_1^{[1]} > x) + P(X_2^{[1]} > x) - P(X_1^{[1]} \geq x, X_2^{[1]} > x) \\ &= S_{X_1}^{[1]}(x) + S_{X_2}^{[1]}(x) - S^{[1]}(x,x), \end{aligned}$$

마찬가지로 $\max\{X_1^{[2]},\ X_2^{[2]}\}$ 의 생존함수는

$$P(\max\{X_1^{[2]},\ X_2^{[2]}\} > x) = S_{X_1}^{[2]}(x) + S_{X_2}^{[2]}(x) - S^{[2]}(x,x),$$

로 주어진다. 정리 4.1과 정리 4.2의 결과를 조합하면 정리 4.3의 결과를 얻을 수 있다. □

5. 결 론

본 연구에서는 여러 요인이 동시에 수명에 영향을 주면서, 영향력의 크기가 상황에 따라 동적으로 변화하는 신뢰성 모형 (reliability model)에 관한 연구를 수행하였다. 수명에 영향을 주는 요인으로, 자연적 고장과 더불어 하나의 개체의 사망이나 고장으로 인한 잔여 개체에 대한 스트레스 증가, 외부 충격, 그리고 생존 환경 스트레스 수준을 동시에 고려하였다. 이들 요인들을 모두 포함하는 두 가지 모델을 고려하고, 이변량 수명 분포를 유도하였다. 첫 번째 모델에서는 하나의 부품이 고장 난 이후에도 공통적인 shock process는 여전히 존재하여 나머지 부품의 고장에 영향을 미친다. 반면, 두 번째 모델의 경우 하나의 부품이 고장 난 이후에는 공통적인 충격과정은 존재하지 않으며, 따라서 나머지 부품의 고장에 영향을 미치지 않는다. 또한 이들 두 모형을 서로 비교하며, 이들 모형으로부터 얻어지는 최대값의 분포와 최소값의 분포를 비교하고자 하였다.

지금까지 주로 연구되어 온 신뢰성 모형들은 미리 정해진 고장률 함수에 의하여 표현되는 정적 (static)인 모형들이 대부분이었다. 하지만 분포를 표현할 수 있는 보다 정밀한 확률적 도구들이 개발됨에 따라 복잡한 개체의 생존환경이나 시스템의 가동 환경을 고려한 수명 분포에 관한 연구가 증가하는 추세이다. 특히, 여러 요인이 동시에 수명에 영향을 줄 수 있으며, 이러한 영향력이 여러 상황에 따라 동적으로 변화하는 경우, 이러한 영향을 주는 모든 요인들을 고려한 수명분포 모델링이 필요하다. 이

에 본 연구에서는 다양한 동적인 고장 원인들을 포함하는 수명분포에 관한 연구를 수행하였다. 향후 연구에서는 본 연구에서 개발된 분포들을 신뢰성 이론, 생존 분석, 생명보험 등의 분야에 적용하는 연구를 수행하는 것이 의미 있는 후속 연구가 되리라 기대한다.

References

Aven, T. and Jensen, U. (1999). *Stochastic models in reliability*, Springer, New York.

Balakrishnan, N. and Lai, C. (2009). *Continuous bivariate distributions*, 2nd Ed., Springer, New York.

Block, H. W. and Basu, A. P. (1974). A continuous bivariate exponential extension. *Journal of the American Statistical Association*, **69**, 1031-1037.

Carriere, J. F. (2000). Bivariate survival models for coupled lives. *Scandinavian Actuarial Journal*, **1**, 17-32.

Cha, J. H. and Mi, J. (2007). Study of a stochastic failure model in a random environment. *Journal of Applied Probability*, **44**, 151-163.

Cha, J. H. and Mi, J. (2011). On a stochastic survival model for a system under randomly variable environment. *Methodology and Computing in Applied Probability*, **13**, 549-561.

Downton, F. (1970). Estimation of parametric functions in Downton's bivariate exponential distribution. *Journal of Royal Statistical Society B*, **32**, 408-417.

Finkelstein, M. and Cha, J. H. (2013). *Stochastic Modelling for Reliability (Shocks, Burn-in and Heterogeneous Populations)*, Springer, London.

Freund, J. E. (1961). A bivariate extension of the exponential distribution. *Journal of the American Statistical Association*, **56**, 971-977.

Gumbel, E. J. (1960). Bivariate exponential distribution. *Journal of the American Statistical Association*, **55**, 698-707.

Hawkes, A. G. (1972). A bivariate exponential distribution with application to reliability. *Journal of the Royal Statistical Society B*, **34**, 129-131.

Hayakawa, Y. (1994). The construction of new bivariate exponential distributions from a Bayesian perspective. *Journal of the American Statistical Association*, **89**, 1044-1049.

Iyer, S. K. and Manjunath, D. (2004). Correlated bivariate sequencesfor queueing and reliability Applications. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **33**, 331-350.

Jagger, C. and Sutton, C. J. (1991). Death after marital bereavement-Is the risk increased? *Statistics in Medicine*, **10**, 395-404.

Kalbfleisch, J. D. and Prentice, R. L. (1980). *The statistical analysis of failure time data*, Wiley, New York.

Kebir, Y. (1991). On hazard rate process. *Naval Research Logistics*, **38**, 865-876.

Lee, H. and Cha, J. H. (2014). On construction of general classes of bivariate distributions. *Journal of Multivariate Analysis*, **127**, 151-159.

Lee, H. S. and Kim, Y. M. (2013). Estimation of lapse rate of variable annuities by using Cox proportional hazard model. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **24**, 723-736.

Lee, J. T. (2014). Prediction of K-league soccer scores using bivariate Poisson distributions. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **25**, 1221-1229.

Lee, L. (1979). Multivariate distributions having Weibull properties. *Journal of Multivariate Analysis*, **9**, 267-277.

Marshall, A. W. and Olkin, I. (1967). A multivariate exponential distribution. *Journal of the American Statistical Association*, **62**, 30-44.

Sarhan, A. M. and Balakrishnan, N. (2007). A new class of bivariate distributions and its mixture. *Journal of Multivariate Analysis*, **98**, 1508-1527.

Sarkar, S. K. (1987). A continuous bivariate exponential distribution. *Journal of the American Statistical Association*, **82**, 667-675.

Shaked, M. (1984). Extension of the Freund distribution with applications in reliability theory. *Operations Research*, **32**, 917-925.

Journal of the Korean Data & Information Science Society
2016, **27**(3), 711–724

http://dx.doi.org/10.7465/jkdi.2016.27.3.711
한국데이터정보과학회지

Bivariate reliability models with multiple dynamic competing risks[†]

Juyoung Kim[1] · Ji Hwan Cha[2]

[12]Department of Statistics, Ewha Womans University

Received 19 April 2016, revised 9 May 2016, accepted 17 May 2016

Abstract

Under variable complex operating environment, various factors can affect the lifetimes of systems. In this research, we study bivariate reliability models having multiple dynamic competing risks. As competing risks, in addition to the natural failure, we consider the increased stress caused by the failure of one component, external shocks, and the level of stress of the working environment at the same time. Considering two reliability models which take into account all of these competing risks, we derive bivariate life distributions. Furthermore, we compare these two models and also compare the distributions of maximum and minimum statistics in the two models.

Keywords: Bivariate distribution, conditional failure rate, joint distribution, maximum and minimum distributions, Poisson shock process.

[†] This work was supported by Priority Research Centers Program through the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Ministry of Education, Science and Technology (2009-0093827).
[1] Graduate student, Department of Statistics, Ewha Womans University, Seoul 120-750, Korea.
[2] Corresponding author: Professor, Department of Statistics, Ewha Womans University, Seoul 120-750, Korea. E-mail: jhcha@ewha.ac.kr