

## 비선형 유하시간 곡선식을 이용한 하도 홍수추적에 관한 연구

김상호·이창희\*†

상지대학교 건설시스템공학과

\*중원대학교 방재안전공학과

### A Study on Channel Flood Routing Using Nonlinear Regression Equation for the Travel Time

Kim, Sang Ho·Lee, Chang Hee\*†

Department of Civil Engineering, Sangji University

\*Department of Disaster Management & Safety Engineering, Jungwon University

(Received: 23 March 2016, Revised: 07 April 2016, Accepted: 07 April 2016)

#### 요약

하도 홍수추적과 관련하여 하천에서의 시·공간적 홍수파를 해석하는데 수리학적 방법과 수문학적 방법이 일반적으로 많이 이용되어 왔다. 수문학적 홍수추적 방법은 수리학적 방법에 비해 수행하기에는 비교적 간단하면서도 합리적인 정확성을 지닌다. 수문학적 홍수추적 방법 중 광범위하게 적용되어지고 있는 Muskingum 모형의 중요 변수인 저류상수는 유하시간과 매우 유사한 값을 가진다. 이러한 점에 착안하여 본 연구에서는 저류상수를 산정하기 위해 HEC-RAS를 이용한 유하시간을 산정하고, 하도거리, 하도경사, 유량 자료를 이용하여 유하시간에 대한 비선형 회귀곡선식을 개발하였다. 비선형 회귀곡선에 의해서 산정된 저류상수를 Muskingum 모형에 대입하여 구한 유출량은 HEC-RAS 1차원 부정류 모의를 적용하여 산정된 유출량과 비교하였다. 이와 함께 본 연구에서는 가중인자에 대한 영향 및 상하류 사이의 구간 분할에 대해서 검토하였는데, 그 결과 가중인자 값이 클수록 첨두홍수량이 올라가는 것으로 나타났으며, 구간 분할을 많이 할수록 RMSE가 감소하는 것으로 나타났다.

핵심용어 : 하도홍수추적, Muskingum 모형, 유하시간, 저류상수

#### Abstract

Hydraulic and hydrological flood routing methods are commonly used to analyze temporal and spatial flood influences of flood wave through a river reach. Hydrological flood routing method has relatively more simple and reasonable performance accuracy compared to the hydraulic method. Storage constant used in Muskingum method widely applied in hydrological flood routing is very similar to the travel time. Focusing on this point, in this study, we estimate the travel time from HEC-RAS results to estimate storage constant, and develop a non-linear regression equation for the travel time using reach length, channel slope, and discharge. The estimated flow by Muskingum model with storage constant of nonlinear equation is compared with the flow calculated by applying the HEC-RAS 1-D unsteady flow simulation. In addition, this study examines the effect on the weighting factor changes and interval reach divisions: peak discharge increases with the bigger weighting factor, and RMSE decreases with the fragmented division.

Key words : Channel Flood Routing, Muskingum Model, Travel Time, Storage Constant

## 1. 서 론

하도 홍수추적은 하천에서 홍수파의 거동에 대한 적절한 홍수방어대책과 경제적인 효과를 알기 위해서 필요한 매우 중요한 작업 중 하나이다. 하도 홍수추적과 관련하여 하천

에서의 시·공간적 홍수파를 해석하는데 수리학적 방법과 수문학적 방법이 일반적으로 많이 이용되어 왔다(Choudhury et al., 2002). 수리학적 홍수추적은 연속방정식과 운동량 방정식을 이용하며, 수문학적 방법과 비교하여 홍수파 흐름을 보다 적절히 잘 묘사하지만, 높은 수준의 기술력과 수로 및 홍수터의 지형 및 저항 특성, 그리고 초기 및 경계조건과 같은 많은 양의 세밀한 입력 자료를 필요로 한다(Singh, 1988). 심지어 수리학적 방법은 가정 사항을 통해 간략화 하더라도 복잡하여 종종 실행시키는데 어려움을 동반하기

\* To whom correspondence should be addressed.  
Department of Disaster Management & Safety Engineering, Jungwon University.  
E-mail: lch75039@hanmail.net

도 한다(France, 1985). 한편 수문학적 방법과 관련하여 Haktanir and Ozmen(1997)은 수문학적 방법에 의한 첨두 홍수량이 수리학적 방법으로 계산한 것 보다 큰 값이 발생하나, 실용적인 면에서 수문학적 홍수추적방법은 수행하기에는 비교적 간단하면서도 합리적인 정확성을 지니는 것으로 밝힌 바 있으며, Muskingum 모형을 이용한 수문학적 홍수추적은 1930년대에 방법이 도입된 이래로 하천공학에 광범위하게 적용되어졌다(Tung, 1985; Kundzewics and Strupczewski, 1982). Muskingum 모형은 수체내의 연속 방정식과 저류관계를 기본식으로 하고, 입력자료 및 계산과정이 비교적 간단하며, 수리학적 모의를 수행하기 위한 입력 자료가 충분하지 않을 때 유용하다.

Muskingum 모형에서 사용되는 매개변수는 저류상수  $K$ 와 가중인자  $X$ 이며, 이들 매개변수를 구하기 위해서 시행착오법, 최적화 방법 등을 이용한 많은 연구가 이루어졌다(Kim et al., 2001; Lu et al., 2008; Yang and Li 2008).

$K$ 와  $X$ 는 상하류간의 유량 측정값을 이용하여 상하류 유량의 관계식에 의하여 산정될 수 있다. 이때 측방유입이 없는 상태인 하도에 대해서 상류지점 유입량과 하류지점 유출량의 관계를 통해 산정되어야 한다. 그러나 하류지점의 관측된 유출량에는 구간 상류지점 유입량의 영향만 있는 것이 아니라 지류로부터 유입되는 유량과 하천 측면에서 본류로 유입되는 잔유량이 포함되기 때문에 상류지점 유입량과 하류지점 유출량에 대한 측정값을 이용하여  $K$ 와  $X$ 를 산정하기는 많은 오류가 발생할 수 있는 가능성을 내포하고 있는 상황이다. 이에 본 연구에서는 수리학적 하도 홍수추적 모형인 HEC-RAS 1차원 부정류 모의를 수행하여 상류지점 유입량이 어떠한 측방 유입유량(지류유량 및 잔유량)의 영향을 받지 않고 하류지점으로 유하하는 과정을 모의하였고, 그 결과는 수문학적 모형인 Muskingum 모형에 의해 계산한 유출량과 비교하는데 활용되었다.

한편 Muskingum 모형의 매개변수인 저류상수  $K$ 는 하도구간에 대한 홍수파의 전파시간과 관계가 있으며, 하천구간을 통한 유하시간과 매우 유사한 값을 가진다(McCuen, 2004). 이에 본 연구에서는  $K$ 를 산정하기 위해 유하시간을 이용하였는데, 유하시간 산정을 위해서 다양한 유량조건에 대한 HEC-RAS 모의 결과를 이용하여 비선형 회귀곡선식을 개발하였다. 비선형 회귀곡선은 하도거리, 하도경사, 유량, 유하시간 자료를 이용하여 개발하였으며, 비선형 회귀곡선에 의해서 산정된 유출량은 HEC-RAS 1차원 부정류 모의를 적용하여 산정된 유출량과 비교하였다. 이와 함께 가중인자  $X$ 에 대한 영향 및 상하류 사이의 구간 분할에 대한 효과에 대해서 검토하였다.

## 2. Muskingum 하도 홍수추적

Muskingum 모형(McCarthy, 1938)은 하도 저류량과 유량의 관계에 기반으로 하고 있으며, 하천공학에 광범위하게 적용되어져 왔다. Muskingum 모형은 하도구간 내 측방유

입이 없는 상태에서 연속방정식과 하도의 선형 저류관계를 이용하여 식 (1)과 식 (2)와 같이 구성된다.

$$\text{연속방정식 : } \frac{dS_t}{dt} = I_t - O_t \quad (1)$$

$$\text{저류방정식 : } S_t = K[XI_t + (1-X)O_t] \quad (2)$$

여기서,  $S_t$ ,  $I_t$ ,  $O_t$ 는 시간  $t$ 에서의 저류량, 상류 유입량, 하류 유출량이며,  $K$ ,  $X$ 는 저류상수 및 가중인자이다.

저류상수  $K$ 는 하도의 유하시간과 매우 유사한 값을 가지며(McCuen, 1998),  $K$ 와  $X$  값이 주어지면 다음 식 (3)을 통해 하도 홍수추적이 수행된다.

$$Q_t = C_1 I_t + C_2 I_{t-\Delta t} + C_3 O_{t-\Delta t} \quad (3)$$

여기서,  $C_1$ ,  $C_2$  그리고  $C_3$ 는 다음과 같다.

$$C_1 = \frac{0.5\Delta t - KX}{(1-X)K + 0.5\Delta t} \quad (4)$$

$$C_2 = \frac{KX + 0.5\Delta t}{(1-X)K + 0.5\Delta t} \quad (5)$$

$$C_3 = \frac{-0.5\Delta t + (1-X)K}{(1-X)K + 0.5\Delta t} \quad (6)$$

여기서,  $\Delta t$ 는 시간간격이며,  $I_{t-\Delta t}$ 와  $O_{t-\Delta t}$ 는  $t-\Delta t$  시간에서의 유입량과 유출량을 나타낸다.

## 3. 하도 유하시간 산정을 위한 비선형 회귀곡선식의 개발

본 연구에서는 평창강 구간에 대해 HEC-RAS 모형의 해석결과와 대상구간의 지형적 특성으로부터 비선형 회귀곡

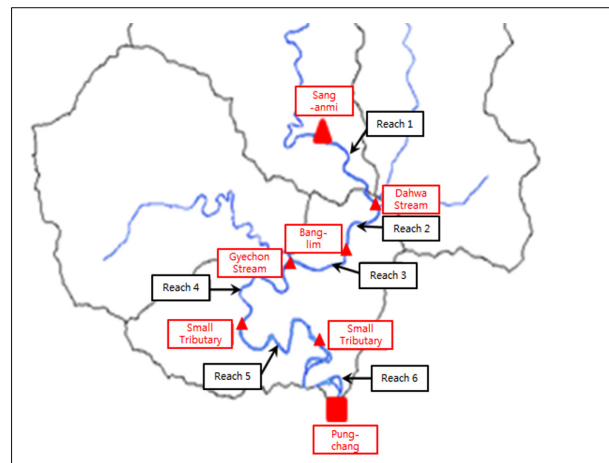


Fig. 1. Reach length setting in Pyungchang River.

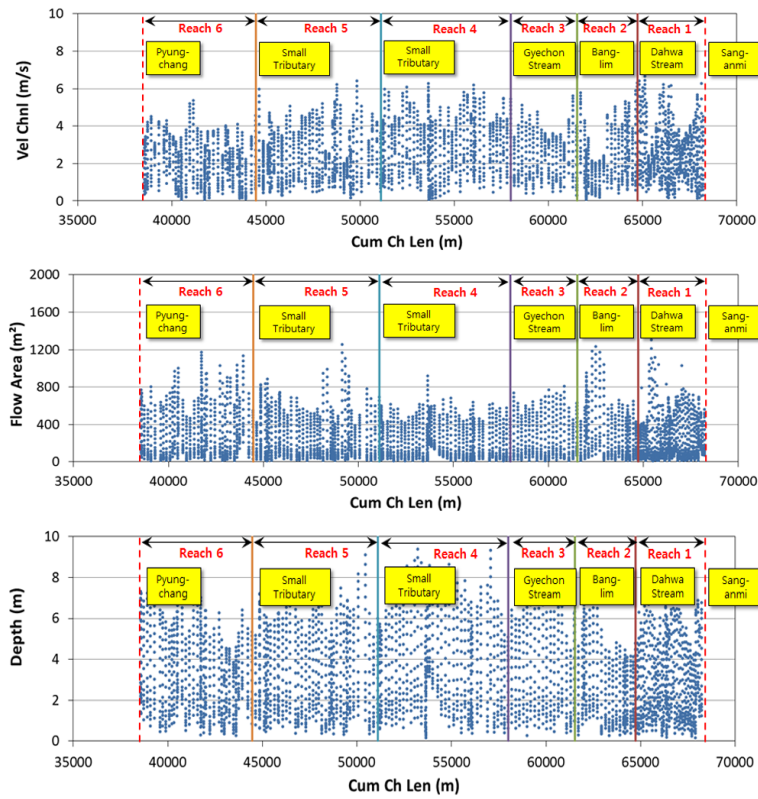


Fig. 2. Hydraulic Characteristics of the Pyungchang River.

선을 도출하여 하도 유하시간을 산정하였다. Fig. 1과 같이 평창강 측정 지점인 상안미~평창 구간에 대해 HEC-RAS 모형을 이용하여 상안미에서 20 m<sup>3</sup>/s부터 2,500 m<sup>3</sup>/s까지 16개의 임의의 유량조건에 대해 정상부등류 모의를 수행하였다. 대상구간에 대한 수리특성을 살펴보기 위해 HEC-RAS 모의 결과에 의한 유량등급별 유속을 Fig. 2와 같이 도시하였으며, 유속과 함께 유량별 단면적, 수면폭 그리고 수리수심을 고려하여 6개의 구간으로 구분하였다. 6개 구간에 대한 유량등급별 유속분포 및 유량에 대한 유속 분포를 대표할 수 있는 회귀곡선식은 Table 1과 같다.

상안미에서 평창 구간에 대한 6개 구간별로 하도거리(L)와 하도경사(S) 그리고 유량(Q) 등급별 유하시간(T) 자료를 이용하여 식 (7)과 같은 비선형 회귀곡선을 개발하였으며, 이 식에 대한 결정계수 R<sup>2</sup>은 0.956으로 나타났다.

Table 1. Flow velocity equations of 6 reaches

Reach No.	Velocity-Discharge Relation Ship	Coefficient of determination R <sup>2</sup>	Length (km)	Slope
1	$V=0.2194Q^{0.3773}$	0.6680	3.501	0.0043
2	$V=0.1560Q^{0.4081}$	0.6093	3.104	0.0037
3	$V=0.2856Q^{0.3369}$	0.7600	3.511	0.0024
4	$V=0.2405Q^{0.3824}$	0.6609	6.715	0.0043
5	$V=0.2148Q^{0.3704}$	0.7141	6.431	0.0029
6	$V=0.1529Q^{0.3974}$	0.5936	5.671	0.0027

$$T = 0.183 \times L^{0.963} \times S^{-0.362} \times Q^{-0.381} \quad (7)$$

식 (7)은 상안미~평창 구간의 6개 세부구간에 대해 하도 지형특성인 하도거리와 하도경사를 고려하고, 하도를 흐르는 유량크기에 따라 발생가능한 유하시간을 산정할 수 있다. 그러나 Table 1에서 제시된 구간별 유량등급별 유속분포에 대한 회귀곡선식은 하도단면의 변화정도에 따라 최대 유속과 최소유속에 대한 편차가 매우 크게 발생하고 있어

Table 2. Flow velocity equations of 12 reaches

Reach No.	Velocity-Discharge Relationship	Coefficient of Determination R <sup>2</sup>	Length (km)	Slope
1	$V=0.1542Q^{0.4210}$	0.7387	2.001	0.0039
2	$V=0.3952Q^{0.3045}$	0.6089	1.500	0.0048
3	$V=0.2461Q^{0.3738}$	0.8360	1.579	0.0040
4	$V=0.0762Q^{0.4643}$	0.7115	1.625	0.0028
5	$V=0.2531Q^{0.3420}$	0.8169	1.485	0.0020
6	$V=0.3217Q^{0.3237}$	0.7283	2.038	0.0018
7	$V=0.4484Q^{0.3074}$	0.7878	2.284	0.0055
8	$V=0.2009Q^{0.4051}$	0.7025	4.614	0.0034
9	$V=0.2491Q^{0.3524}$	0.6256	2.940	0.0031
10	$V=0.1937Q^{0.3811}$	0.7829	3.701	0.0021
11	$V=0.1447Q^{0.3963}$	0.5997	2.689	0.0020
12	$V=0.1470Q^{0.4038}$	0.6077	3.205	0.0028

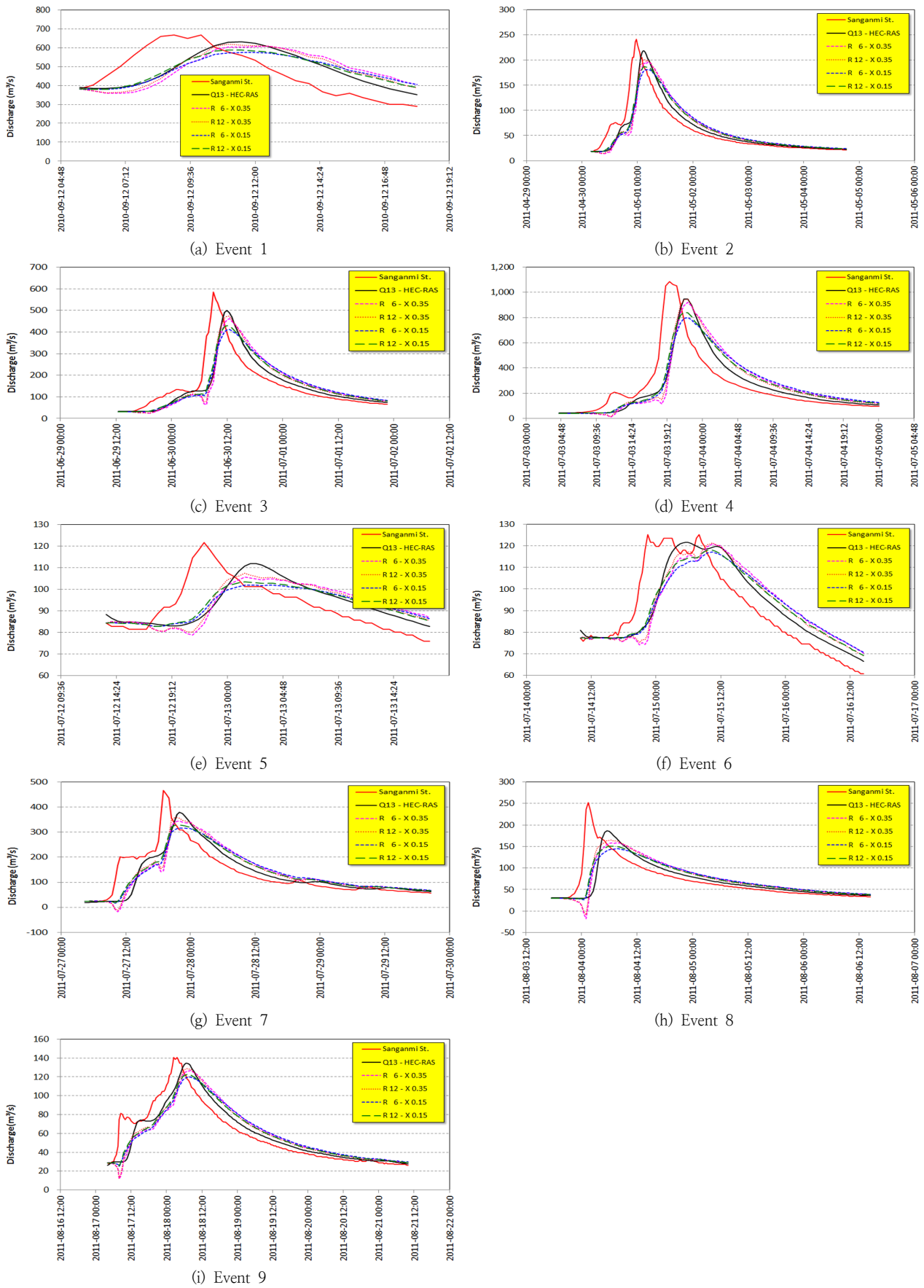


Fig. 3. Results for simulation conditions.

각 유량별 발생가능한 유속을 대표하기에 부족하다. 따라서, 각 구간별 유량에 따른 유속의 분포를 줄이기 위해 6개로 구분된 하도 구간을 12개로 세분하여 Table 2와 같은 유하곡선식을 개발하였다.

상안미에서 평창 구간의 12개 구간별 하도거리(L)와 하도경사(S) 그리고 유량(Q) 등급별 유하시간(T) 자료를 이용하여 식 (8)과 같은 비선형 회귀곡선을 개발하였으며, 이 식에 대한 결정계수 R<sup>2</sup>은 0.906으로 나타났다.

$$T = 0.253 \times L^{0.914} \times S^{-0.312} \times Q^{-0.386} \quad (8)$$

### 4. 하도 유하시간 및 X의 영향을 고려한 홍수추적의 비교 검토

비선형 회귀곡선식을 이용하여 유하시간을 산정하였으며, 이를 Muskingum 모형에 적용하여 산정된 유출량을 HEC-RAS 부정류 모의결과와 비교하였다. 또한 평창강의 상안미~평창 구간을 6개와 12개 구간으로 구분하여 구간 수 증가에 따른 흐름특성에 대해서도 검토하였다. 구간분리 효과 및 가중인자 X에 대한 영향 분석을 위해 X = 0.35와 X = 0.15일 경우로 구분하여 구간 수에 따른 흐름특성을 살펴보았는데, Fig. 3은 평창강의 상안미~평창 구간에 대해 가중인자 X가 0.35일 경우 구간의 수가 각각 6개(R6-X0.35)와 12개(R12-X0.35)인 경우 그리고 가중인자 X가 0.15일 경우 구간의 수가 각각 6개(R6-X0.15)와 12개(R12-X0.15)인 경우에 대한 모의결과를 상류단인 상안미의 유입수문곡선과 HEC-RAS 모형의 모의결과와 함께 나타내었다.

모의조건에 따른 모의결과의 비교 분석을 위해 동수역학적 모형인 HEC-RAS 모형의 모의결과에 대한 RMSE를 전체 유량수문곡선에 대한 오차와 사상별 첨두홍수량에 대한 오차로 구분하여 Table 3과 같이 산정하였는데, Table 3에서 보는 바와 같이 전체 유량수문곡선에 대한 평균 RMSE는

12개 구간에 대해 가중인자 X = 0.35를 사용하였을 경우 14.4 m<sup>3</sup>/sec로 가장 낮게 나타났으며, 9개 홍수사상의 첨두홍수량에 대한 RMSE도 동일한 경우에서 15.32 m<sup>3</sup>/sec로 가장 낮게 나타났다. 모의결과를 나타내는 Fig. 3에서는 가중인자 X의 크기에 따라 특이한 수문곡선의 형상을 확인할 수 있는데, 가중인자 X가 0.35일 경우 상류단에서 초기 저유량이 유입될 때 평창 지점의 유량이 일시적으로 낮아지는 현상이 발생하였으나 첨두홍수량은 가중인자 X가 0.15일 경우보다 더 높게 나타났다. 가중인자 X가 0.15일 경우에는 평창지점에서 저유량에서 일시적으로 낮아지는 현상은 발생하고 있지 않지만, 전반적으로 첨두홍수량이 낮게 산정되는 것으로 나타났다.

평창강의 상안미~평창 구간에 대한 구간 개수에 따른 오차변화를 가중인자 X에 대해 각각 검토한 결과는 Table 4와 같다. Table 4에서 보는 바와 같이 상안미~평창 구간에서는 가중인자 X가 0.35일 경우 전체 유량자료에 대한 RMSE 감쇠율은 구간이 6개에서 12개로 증가함에 따라 26.25%로 나타났으며, 가중인자 X가 0.15일 경우는 21.03%인 것으로 나타나 가중인자의 값에 따라 차이는 있지만, 구간 수가 증가할수록 RMSE가 감소하는 것으로 나타났다.

각 사상별 첨두유량에 대한 RMSE 감쇠율은 가중인자 X가 0.35일 경우 36.07%, X가 0.15일 경우 23.46%로 나타나 첨두홍수량에 대한 RMSE도 가중인자 X가 0.35일 때 구간 수 증가에 따른 감쇠효과가 더욱 크게 나타났다.

HEC-RAS 모형의 첨두홍수량에 대한 모의조건별 첨두홍수량 편차는 가중인자 X가 0.35일 때 구간 수가 6개에서 12개로 증가함에 따라 첨두홍수량 감소량이 20.7 m<sup>3</sup>/sec에서 12.1 m<sup>3</sup>/sec로 나타나 첨두홍수량 감쇠율이 약 32.18%로 나타났으며, 가중인자 X가 0.15일 경우 첨두홍수량 감소량이 51.1 m<sup>3</sup>/sec에서 40.0 m<sup>3</sup>/sec로 나타나 첨두홍수량 감쇠율이 약 19.17%로 나타나 가중계수 X가 0.35일 경우 첨두홍수량에 대한 정확도가 더욱 높은 것으로 나타났으며, 구간 개수가 12개일 경우 정확도는 더욱 높아지는 것으로 나타났다.

Table 3. Comparison of calculated results for different flood events

Event No.	RMSE(m <sup>3</sup> /sec)				Q <sub>max</sub> (Hec-Ras)	ΔQ <sub>max</sub> (m <sup>3</sup> /sec)			
	R12-X0.15	R6-X0.15	R12-X0.35	R6-X0.35		R12-X0.15	R6-X0.15	R12-X0.35	R6-X0.35
1	24.5	33.4	24.2	37.0	631.39	43.79	56.40	13.97	24.02
2	8.1	10.9	7.0	10.3	218.42	31.45	37.11	17.56	22.43
3	21.5	27.4	17.8	25.1	498.50	68.63	86.69	24.93	36.88
4	43.7	55.9	39.8	54.3	946.16	105.74	144.20	-1.35	25.66
5	3.3	3.7	2.7	3.4	111.91	8.42	9.97	4.52	6.21
6	3.5	4.7	3.1	4.6	121.65	3.59	4.59	0.19	0.73
7	18.4	22.4	17.9	22.0	379.37	50.28	63.41	21.02	34.10
8	12.7	13.3	12.3	12.5	186.87	36.11	42.35	22.09	28.31
9	5.0	6.6	4.8	6.5	134.62	12.15	14.89	5.88	8.11
Ave.	15.6	19.8	14.4	19.5	RMSE	50.40	65.85	15.32	23.96

Table 4. Comparison of calculated results for reach divisions

Reach	Sanganmi~Pyungchang				Banglim~Pyungchang			
	X=0.15		X=0.35		X=0.15		X=0.35	
Weight Factor X	X=0.15		X=0.35		X=0.15		X=0.35	
Number of Reach	12	6	12	6	12	6	12	6
Ave. RMSE of Events	15.6	19.8	14.4	19.5	19.1	26.0	17.6	25.3
RMSE for Q <sub>max</sub> of Events	50.40	65.85	15.32	23.96	42.68	60.36	12.41	21.01
Decrease Rate of RMSE	Tot. Q		26.25%		26.65%		30.16%	
	Max. Q		36.07%		29.29%		40.93%	
Ave. ΔQ <sub>max</sub> of Events	40.0	51.1	12.1	20.7	36.8	51.4	6.7	17.6
Decrease Rate of Ave. ΔQ <sub>max</sub>	19.17%		32.18%		26.03%		49.30%	

이와 같은 양상은 상안미~평창 구간 내에 위치한 방림~평창 구간에서도 동일한 양상으로 나타났으며, 평창강 구간에 대해 저류상수  $K$ 를 비선형 회귀곡선을 사용할 경우 가중계수  $X$ 는 0.35일 때 그리고 구간의 수가 많을수록 모의 결과에 대한 정확도가 더욱 높아지는 것으로 나타났다.

## 5. 결 론

본 연구의 목적은 비선형 유하시간 곡선식을 이용하여 Muskingum 하도 홍수추적에 관한 연구를 수행하는 것으로 본 연구결과를 정리하면 다음과 같다.

1) Muskingum 모형의 매개변수인 저류상수  $K$ 는 하천구간을 통한 유하시간과 매우 유사한 값을 가진다는 점에 착안하여, 본 연구에서는  $K$ 를 산정하기 위해 유하시간을 산정하였고, 이를 위해 다양한 유량조건에 대한 HEC-RAS 모의 결과를 이용하여 비선형 회귀곡선식을 개발하였다.

2) 유하시간에 대한 비선형 회귀곡선은 하도거리, 하도경사, 유량, 유하시간 자료를 이용하여 개발하였으며, 비선형 회귀곡선에 의해서 산정된 유출량은 HEC-RAS 1차원 부정류 모의를 적용하여 산정된 유출량과 비교하였다.

3) 실제 하류지점에서 관측된 유출량에는 측방유입유량이 존재하므로 저류상수  $K$ 와 가중인자  $X$ 는 측방유입이 없는 하도의 상류지점 유입량과 하류지점 유출량의 관계를 통해 산정되어야 하는 문제를 HEC-RAS 부정류 모의와 비교 검토하는 방법을 제시하였다.

4) 가중인자  $X$ 에 대한 영향을 검토한 결과 가중인자  $X$ 가 0.35일 경우 상류단에서 초기 저유량이 유입될 때 평창지점의 유량이 일시적으로 낮아지는 현상이 발생하였으나 첨두홍수량은 가중인자  $X$ 가 0.15일 경우보다 더 높게 나타났다. 가중인자  $X$ 가 0.15일 경우에는 평창지점에서 저유량에서 일시적으로 낮아지는 현상은 발생하고 있지 않지만, 전반적으로 첨두홍수량이 낮게 산정되는 것으로 나타났다.

5) 상하류 사이의 대상구간에 대한 구간분할 효과에 대해서 검토하였다. 전체유량에 대한 RMSE의 경우 가중인자의 값에 따라 차이는 있지만, 구간 수가 증가할수록 RMSE가 감소하는 것으로 나타났다. 각 사상별 첨두유량에 대한 RMSE와 관련하여 구간 수 증가에 따른 감쇠효과가 크게 나타났다.

## 사 사

이 논문은 2014년도 상지대학교 교수 연구년제 지원에 의해 수행되었습니다. 또한 국토해양부 건설기술혁신사업의 연구비지원(11기술혁신C06)에 의해 수행되었습니다.

## References

- Choudhury, P., Shrivastava, RK, and Narulkar, SM (2002). Flood routing in river networks using equivalent Muskingum inflow. *J. of Hydrologic Engineering*, 7(1), pp. 413-419.
- France, PW (1985). Hydrologic routing with a microcomputer. *Advanced in Engineering Software*, 7(1), pp. 8-12.
- Haktanir, T. and Ozmen, H. (1997). Comparison of Hydraulic and Hydrologic Routing on Three Long Reservoirs, *J. of Hydraulic Engineering*, 123(2), pp. 153-156.
- Kim, JH, Geem, ZW, and Kim, ES (2001). Parameter estimation of the nonlinear Muskingum model using harmony search. *J. of the American Water Resources Association*, 37(5), pp. 1131-1138.
- Kundzewicz, ZW, and Strupczewski, WG (1982). Approximate translation in the Muskingum model. *Hydrological Sciences Journal*. 27(1), pp. 19-26.
- Lu, F., Jiang, YZ, Wang, H., and Niu, CW (2008). Application of multi-agent genetic algorithm to parameter estimation of Muskingum model. *J. of Hydraulic Engineering*, 39(3), pp. 289-294.
- McCarthy, GT (1938). *The unit hydrograph and flood routing*. US Army Corps Eng., New London, CT. US Engineering Office, Providence RI.
- McCuen, RH (2004). *Hydrologic Analysis and Design*, chap. 10, ISBN-10:0131424246, ISBN-13:9780131424241, Prentice Hall.
- Singh, VP (1988). *Hydrologic Systems. Rainfall-Runoff Modelling*. Prentice Hall, New Jersey, USA.
- Tung, YK (1985). River flood routing by nonlinear Muskingum method. *J. of Hydraulic Engineering*. 111(12), pp. 1447-1460.
- Yang, XH, and Li, JQ (2008). Chaos high efficient genetic algorithm for parameter optimization of Muskingum routing model. *J. of Hydroelectric Engineering*. 27(2), pp. 40-44.