韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
http://dx.doi.org/10.7468/mathedu.2016.55.2.233
2016. 5. 제 55권, 제 2호, 233-249.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A:
The Mathematical Education
2016, Vol. 55, No. 2, 233-249.

네 점이 한 원 위에 있을 조건에 관한 교육적 고찰

강정기(진영중학교)

Ⅰ. 서론

기하 영역에서 원은 관심의 대상이었다. 피타고라스에 의하면 원은 평면도형 중에서 가장 아름다운 도형이며, 여러 가지 흥미로운 성질로 인해 예로부터 많은 관심의 대상이 되어 왔다. 또 일상생활 속에서 원 모양과 그 성질을 이용한 것을 쉽게 접할 수 있을 만큼 원의 응용력은 대단하다(조태근 외, 2002, p112). 따라서 수학에서 원은 교육의 주요 소재가 되어 왔다.

원은 초등수학에서부터 고등수학에 이르기까지 폭넓게 다루어지고 있다. 초등수학에서 원은 다소 직관적인 측면에서 넓이와 둘레 등의 측정 및 계산에 중점을 두어 다루어진다. 반면 중등수학에서 원은 주요 성질 위주로 다루어지기 시작한다. 중심각과 호의 길이 사이의 관계, 원과 직선의 위치 관계, 원과 접선에 관한 여러 성질 등이 연역적 증명과 함께 제시된다.

현 중학교 교과서의 체제는 연역적 전개 방식을 따르며, 중학교 논증기하에서 원에 관한 내용은 '서로 다른 4개의 점이 한 원 위에 있을 조건'으로 끝맺는다. '원에 내접하는 사각형의 성질'을 다루고, 그 역으로 '4개의 점이 한 원 위에 있을 조건'이 제시되고 증명된다(황선욱 외, 2013). 연역적 전개라는 입장에서 보면, 앞서 학습한 내용은 결국 이 조건을 유도하기 위한 것으로 볼 수 있다.

그런데 연역적 전개 방식은 논리적 측면에서는 결함이 없지만, 학습자 이해의 측면에서 문제를 야기한다. 현 체제에서 학습자는 네 점이 한 원 위에 있을 조건을 왜 학습하는지 이해하기 어렵다. 또한 이 조건이 갖는 의미에 대한 이해 역시 쉽지 않다. 이는 연역적 흐름 자체를 중요시 하면서 그 흐름 속에 관련 배경이 숨겨진 탓이다.

연역적 전개 방식은 인간의 자연스런 사고방식과 다르므로 사고 발생과 관련한 중요한 배경을 가리곤 한다. 유클리드 원론의 서술 방식이 유클리드가 생각한 순서는 아닐 것이다. 유클리드 원론은 모든 것이 숙고되어 정리된 후, 정의로부터 결론에 이르기까지 재정리된 것이다. 재정리의 과정은 생각의 순서대로 배열되는 것이 아니라, 논리적 기술 자체에 초점을 두고 이루어진다. 따라서 이것은 인간이 사고하는 방식과 일치하는 것은 아니며, 결국 연역적 전개 방식은 중요한 배경 의미를 가리게 된다.

몇몇 학자들은 연역적 전개에 대해 보다 구체적인 비판을 가한다. 민세영(2002)은 연역적 양식으로 저술된 책들은 완성된 개념 및 정리만을 제시하므로, 수학적 동기나 개념 및 정리 발견과 관련한 실마리 그리고 지식의 사용처를 보여주지 않는다고 지적한다(p2). 또한 Fauvel & van Maanen에 의하면, 연역적 양식으로 저술된 책은 학생들에게 수학을 '현실과 분리된 것', '처음부터 완성된 형태로 존재해온 것'이라는 오개념을 갖게 한다(민세영, 2002. 재인용, p2).

이러한 문제점을 고려할 때, '네 점이 한 원 위에 있을 조건'에 대한 현재의 전개 방식은 개선될 필요가 있다. 특히 이 조건에 대한 일차원적 이해를 극복하기 위해서는 현실과 연계된 내용으로 다룰 필요가 있으며, 동시에 조건이 완성되는 과정적 측면에 주목할 필요가 있다.

이에 본 연구에서는 '네 점이 한 원 위에 있을 조건'의 배경 의미에 대한 학습자 이해를 돕는 목적으로 교과 내용을 개선하고자 한다. 이를 위해 먼저 교과 내용 개선의 수단으로 활용될 '현실 맥락'과 '일반화'에 대해 살펴볼 것이다. 다음 현실 맥락과 일반화의 관점에서 ′네 점이 한 원 위에 있을 조건′을 고찰하고 그 배경 의미를

* 접수일(2016년 1월 13일), 수정일(1차: 2016년 4월 7일, 2차: 2016년 4월 16일), 게재확정일(2016년 5월 14일)
* ZDM분류 : G83
* MSC2000분류 : 97U20
* 주제어 : 네 점이 한 원 위에 있을 조건, 배경 의미, 현실적 배경 의미, 수학적 배경 의미

추출할 것이다. 이러한 고찰을 바탕으로 '네 점이 한 원 위에 있을 조건'에 대한 현 교과서 내용을 비판적으로 분석해 볼 것이다. 마지막으로 비판적 분석을 바탕으로 교과 내용의 개선 방향을 제안하고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

본 장에서는 '네 점이 한 원 위에 있을 조건'이 갖는 배경 의미 추출을 위한 수단으로 활용될'현실 맥락'과 '일반화'에 대해 살펴보고자 한다. 다음 본 연구의 핵심 용어인 '배경 의미'를 조작적으로 정의함으로써 의미를 명확히 하고자 한다.

1. 현실 맥락

다수의 학생들에게 학교 수학은 자신의 삶과 무관한 과목으로 인식되고 있으며, 그 결과 학생들은 학교 수학에 흥미와 관심을 잃곤 한다(김성준·문정화, 2006, p141). 이러한 문제점을 해결하기 위하여 등장한 대표 이론으로 Freudenthal의 수학화가 있다.

수학화에서 현실 맥락은 수학 학습의 적용 대상이라기보다 출발점이다. 수학화는 현실을 수학적인 수단을 사용하여 정리하고 조직하고 질서를 부여하는 활동이다(강홍규, 2003, p132). 수학화의 정의에서 보듯 현실 맥락은 조직의 원료가 되고 있다. 따라서 수학화에서 가장 중요한 것은 실제적 응용의 근원인 현실 맥락을 찾아내는 것이다(김원경·백경호, 2005 재인용, p435). 우정호(2000)는 수학화에서 현실 맥락이 갖는 역할을 더욱 분명히 제시한다.

> 수학은 실제적인 문제 상황으로부터 그 정리수단으로 출발하여 점진적 수학화 과정을 거쳐 구성된 실제적인 지식이다. 따라서 학교수학은 '학생들에게 현실적인 문맥'으로부터 출발하여야 하며, 그에 대한 학생들의 실제적인 정신활동인 q비형식적인 상황적 지식으로 시작하여 재구성되어 가는 상식으로 경험되어야 한다(우정호, 2000, p377).

맥락은 학자별로 견해를 조금씩 달리한다. Freudenthal(1991)은 수학화의 입장에서 맥락을 정의하고 있다. Freudenthal(1991)에 따르면, 맥락은 '수학화 되기 위해 학습자에게 노출된 현실 영역'을 말한다. 그는 맥락을 수학적 본질을 가리는 소음으로 여기는 것은 잘못이며, 맥락 자체가 수학적 본질로 다가가는 것을 돕는 수단이라고 말한다(김성준·문정화, 2006, 재인용 p143).

Treffers(1987)는 맥락의 정의를 두 가지로 제안하였다. 하나는 '명확하게 표현되어 있지 않은 배경적 가정', 다른 하나는 '배경적 가정과 함께 이야기, 주체, 장소에 의해 명확히 드러나는 배경'이다(김성준·문정화, 2006, 재인용 p143). 여기서 전자는 현실 그 자체로, 후자는 문맥으로 표현된 현실로 해석 가능하다. '명확하게 표현되어 있지 않은'이라는 표현에서 문맥으로 표현되지 않은 현실 그 자체로 해석할 수 있다. 그리고 '이야기, 주체, 장소'라는 구조는 문맥으로 표현된 상황으로 볼 수 있다. 이런 점에서 Treffers(1987)의 맥락은 '현실'과 '현실 맥락' 두 가지로 구분해 볼 수 있다.

본 연구에서는 사용하는 현실 맥락은 Treffers(1987)의 정의의 후자에 해당한다. 현실 그 자체가 주어지고 학습자가 수학으로 그 현실을 조직하는 상황은 수학 학습의 이상적 모습일 것이다. 그러나 현실 그 자체에서 교사가 의도하는 방향으로의 수학화가 이루어질 것이라고 기대하는 것은 무리라고 판단된다. 왜냐하면 현실 그 자체에는 너무도 많은 변수가 있기 때문이다. 반면 문맥으로 표현됨으로써 변수가 줄어든 현실 맥락은 수학 학습에서 의도하는 방향으로의 수학화가 보다 용이할 것이다. 이에 본 연구에서는 현실 맥락을 '문맥으로 표현된 현실 상황으로 수학화의 출발점'으로 정의하여 사용하고자 한다.

2. 일반화

일반화는 학자들 마다 정의를 달리하며, 방법적 측면에서의 차이가 두드러진다. 먼저 공통 요소 추출에 기반한 방법적 정의가 있다. 강완·백석윤(2007, p193)은 일반화를 다양한 형태의 수학적 개념이나 원리로부터 공통된 요소를 추출하여, 적용 폭을 확장시키고 보다 강한 추상성을 갖는 개념이나 원리로 발전시키는데 필요한 사고 과정으로 정의한다. 이 정의는 공통 요소 추출이라는 방법을 부각한 것이다.

다음, 고찰의 대상을 옮기는 방법적 정의이다. 대표적으로 Poya(1973)는 일반화를 어떤 주어진 하나의 대상에

대한 연구에서 그 대상을 포함하는 더 큰 집합에 대한 연구로 옮겨가는 것으로 정의하고 있다(p12). 정은실(1997)은 일반화를 주어진 대상의 집합에 대한 고찰로부터 그 주어진 대상을 포함하는 보다 큰 집합에 대한 고찰로 생각을 옮겨 일반적인 법칙을 이끌어 내는 것이라고 정의한다(p75). 이들 정의는 고찰의 대상에 대한 이동이라는 방법에 초점을 둔 것이다.

보다 구체적인 방법을 제안한 것으로 비교·대조에 의한 유사성 추출 혹은 분석을 통한 본질 추출로 특징지어진 정의도 있다. 김동근(2011)은 일반화를 수학적 대상이나 현상 관계들로부터 공통된 특징, 즉 비교·대조를 통해 유사성을 인지함으로써 수학적 대상을 더 넓은 범위로 옮겨갈 수 있으며, 분석을 통해 수학적 본질, 즉 불변성을 추출함으로써 전체를 포함할 수 있는 수학적 사고라고 하였다. 이 정의는 비교·대조에 의한 유사성 추출과 분석을 통한 본질 추출이라는 두 가지 서로 상이한 방법론을 제시한다. 전자는 경험적 일반화로 공통 요소 추출의 방법과 유사하며, 후자는 이론적 일반화로 공통 요소와 구별되는 본질을 언급한 새로운 방법에 해당한다.

비교나 변수에 의한 일반화로 특징지어진 정의도 있다. 김남희(1997)는 일반화의 유형을 구체적인 대상을 비교함으로써 얻어지는 경험적 일반화와 변수의 구성을 의미하는 이론적 일반화로 설명하고 있다. 김남희(1997)의 이론적 일반화는 대수의 변수가 갖는 일반화의 기능에 주목한 것으로 김동근(2011)의 이론적 일반화와 차이가 있다.

이처럼 수학적 일반화의 정의가 다채로운 것은 동일 현상을 마주하고도 어떤 부분에 주목하느냐에 따라 해석이 달라질 수 있기 때문이다. 예컨대, $1+2=2+1$, $2+5=5+2$로부터 공통 요소를 추출하여 자연수 a, b에 대하여 $a+b=b+a$라는 일반화에 성공한 것으로 본다면 이는 공통 요소 추출에 기반한 방법적 정의로 이어진다. 반면 이 현상을 1, 2, 5에서 이들을 포함한 자연수로 고찰의 범위를 넓힌 것에 주목한다면 고찰의 대상을 옮기는 방법적 측면의 정의로 연결된다. 만약 변수에 주목하여 바라보면 대수 변수가 갖는 일반화의 기능에 주목한 이론적 일반화로 이어진다. 이처럼 하나의 일반화를 두고 어느 측면에 주목하느냐에 따라 정의는 달라진다.

본 연구에서는 고찰의 대상을 옮기는 방법적 정의에 주목하고자 한다. 이러한 정의에 입각하여 ‘네 점이 한 원 위에 있을 조건’에서 ‘네 점’을 고찰의 대상으로 삼을 것이다. 한 점에서 두 점, 두 점에서 세 점, 세 점에서 네 점, 네 점에서 다섯 점으로 확장되는 일반화로 간주한다. 다시 말해, ‘네 점이 한 원 위에 있을 조건’을 한 점에서 출발하여 점을 늘여가는 일반화의 산물로 해석한다. 김창수(2012)에 따르면, 이것은 비교나 관찰에 의한 일반화인 경험적 일반화로 보기 어려우며, 본질적인 것의 추출을 통해 일반화가 수행되므로 이론적 일반화라고 할 수 있다(p381). 이론적 일반화의 특성을 지니기는 하지만 일반화의 방법은 고찰의 대상을 옮기는 것이며, 이 방법으로 ‘네 점이 한 원 위에 있을 조건’과 관련된 수학적 배경 의미를 추출해 보고자 한다.

본 연구의 일반화 방법은 Clairaut(1741)의 일반화 방법과 구별된다. Clairaut(1741)은 「Eléments de géométrie」 3부에 반원의 원주각이 90°로 같다는 사실로부터 반원이 아닌 다른 호에서도 같은 결과가 성립하는가에 대한 고찰로 나아가는 일반화를 제안한다. 이것 역시 고찰의 대상을 옮기는 방법에 입각한 일반화이다. 다만 원주각이 90°인 특수 사례에서 일반 사례로 나아간다는 점이 구별된다. 이 일반화의 역은 빗변이 겹치는 두 직각삼각형이 있을 때 네 점이 한 원 위에 있다는 사실로부터 직각삼각형이 아닌 경우에서도 같은 결과가 성립하는가에 대한 고찰로 나아가는 것이다. 하지만 본 연구에서는 ‘네 점이 한 원 위에 있을 조건’과 삼각형의 외심(세 점이 한 원 위에 있을 조건)의 연계성에 주목하여 Clairaut(1741)이 제안한 방법과는 다른 대상 확장을 시도하고자 한다.

3. 배경 의미

본 연구에서 말하는 배경 의미는 Villiers(1994)의 기능적 이해와 관련된다. 수학에서 이해는 크게 도구적 이해(instrumental understanding), 관계적 이해(relational understanding), 논리적 이해(logical understanding)로 구분된다(Skemp, 1976; Byers & Herscovics, 1977). 그러나 Villiers(1994)는 이러한 분류에는 관련 맥락으로부터 비롯된 개념의 의미에 대한 이해가 결여되었다고 지

적하였다. 그는 이것을 기능적 이해(functional understanding)라 칭하였는데, 이는 특별한 수학적 내용이나 과정의 역할, 기능 또는 가치에 대한 이해를 말한다. 배경 의미와 기능적 이해는 관련 맥락 속에서 드러나는 개념의 부가적 의미에 주목한 점이 공통적이다. 단지 기능적 이해는 주체의 인식인 이해를, 배경 의미는 인식의 대상인 의미에 주목한 점이 차이점이다.

관련 맥락과 견줄 때 드러나는 개념의 의미에 주목한 Villiers(1994)의 관점에 기반하여 본 연구에서는 배경 의미를 다음과 같이 정의한다.

> 수학적 정의나 정리가 갖는 배경 의미란 관련된 현실적, 수학적 상황에서 정의나 정리가 갖는 역할, 기능 또는 가치 측면의 의미를 말한다. 따라서 배경 의미는 관련 맥락으로부터 고립된 상태에서 수학적 정의나 정리 그 자체가 갖는 단독 의미와는 구별된다. 배경 의미는 곧 독립적인 것이 아닌 배경 의존적 의미이다.

배경 의미는 두 가지로 나뉜다. 현실적 상황과 관련된 것은 '현실적 배경 의미'로, 수학적 상황과 관련된 것은 '수학적 배경 의미'로 구분된다.

이러한 구분에 따르면, Villiers의 기능적 이해는 수학적 배경 의미에 주목한 것으로 볼 수 있다. Villiers는 기능적 이해에 대한 예로 사각형의 분류를 들고 있다. 그는 사각형의 분류를 크게 계층적 분류(hierarchical classification)와 분할적 분류(partition classification)로 구분한다. 계층적 분류는 특별한 개념이 일반적 개념의 부분 집합이 되게 하는 분류 양식을 말한다. 이와는 대조적으로 분할적 분류는 다양한 하위 요소가 서로 공유하는 부분이 전혀 나타나지 않는 형태의 분류를 의미한다. 예컨대, 실수 체계의 분류는 계층적 분류이며, 법(Module)에 의한 정수의 분류는 분할적 분류이다. Villiers는 사각형에 대한 계층적 분류와 분할적 분류를 비교함으로써, 계층적 분류가 갖는 장점[2]에 대한 기능적 이해가 필요하다고 주장한다. 분할적 분류라는 수학적 상황과의 비교를 통해 계층적 분류가 갖는 가치 이해를 도모한다는 측면에서 이는 수학적 배경 의미에 주목한 것으로 해석 가능하다.

하지만 본 연구에서는 수학적 맥락과 배경에 국한시키지 않고, 현실적 맥락과 배경까지 포괄함으로써 배경 의미를 수학과 현실 두 측면에서 다루어보고자 한다. 이를 통해 네 점이 한 원 위에 있을 조건이 갖는 두 측면의 배경 의미를 추출해 보고자 한다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 분석 대상

본 연구는 '네 점이 한 원 위에 있을 조건'이 갖는 배경 의미 추출과 교과서의 비판적 분석을 통하여 교과 내용 개선 방향을 제안하고자 한다. 배경 의미 추출을 위한 대상은 3종의 교과서 신항균 외(2013)와 이강섭 외(2013), 황선욱 외(2013)에 기술된 '네 점이 한 원 위에 있을 조건'이다. 또한 현실적 배경 의미를 추측하기 위하여 기하 출현과 관련한 문헌인 <Euclid 원론>(이무현, 1997), Clairaut의 <기하학 원론>(장혜원, 2003)을 검토하였다.

교과서의 비판적 분석 역시 3종의 교과서를 대상으로 이루어졌다.

2. 분석 방법

분석 방법은 크게 배경 의미 추출 방법과 교과서 분석 방법으로 구분된다.

배경 의미 추출 방법은 두 가지로 구분된다. 하나는 네 점이 한 원 위에 있을 조건과 관련한 '현실 맥락'을 추측하여 현실적 배경 의미를 추출하는 것이다. 다른 하나는 두 점에서 세 점, 세 점에서 네 점으로의 일반화 과정을 고찰함으로써 수학적 배경 의미를 추출하는 것이다.

구체적으로 현실적 배경 의미는 '적합한 현실 맥락의 추측'과 '현실 맥락에서의 조건 재해석'의 두 단계를 통해 추출이 이루어졌다. 적합한 '현실 맥락'을 추측하기 위하여 <Euclid 원론>에서 조건과 관련한 정의, 정리를 검토하였다. 이를 통해 조건을 대하는 고대 그리스인의

---

2) Villiers(1994)는 사각형의 계층적 분류가 갖는 장점을 다섯 가지로 열거하였다. 첫째, 보다 경제적 개념 정의와 이론의 공식화로 이끈다. 둘째, 연역적 체계와 보다 특별한 개념의 성질 유도를 간소화한다. 셋째, 문제 해결에 유용한 개념적 스키마를 제공한다. 넷째, 때때로 대안적 정의와 새로운 명제를 제안한다. 다섯째, 유용한 총체적 관점을 제공한다. 이들은 모두 수학적 상황과 관련된 점이 특징적이다(p15).

태도를 추출하고, 현실 맥락에 반영하고자 하였다. 예컨대, ‘반원의 중심이 원의 중심과 같다’는 정리로부터 원의 중심을 중시하는 태도를 추출하고, 이를 반영한 현실 맥락을 추측하였다.

더불어 역사 발생적 원리에 입각해 저술된 Clairaut의 <기하학 원론>을 참고하여, 발생에 입각한 현실 맥락을 추측하고자 하였다. 예컨대, 현실적인 거대 도형이 닮음 개념 도입의 배경이었다는 Clairaut의 주장을 반영한 현실 맥락을 추측하였다.

추측한 ‘현실 맥락’에서 조건의 의미를 재해석함으로써 현실적 배경 의미를 추출하였다.

수학적 배경 의미는 ‘두 점, 세 점 상황과 네 점 상황의 비교’, ‘네 점에서 수직이등분선 맥락의 접근 고찰’, ‘다섯 점 이상의 상황에 대한 고찰’을 통해 추출이 이루어졌다.

두 점에서 세 점, 세 점에서 네 점으로의 일반화를 통해 네 점이 갖는 상황적 의미를 추출함으로써 하나의 수학적 배경 의미를 추출하였다. 점진적 일반화의 사고 과정을 거치면서, 두 점과 세 점의 상황과 비교되는 네 점의 상황적 의미를 파악하고자 하였다.

다음 네 점에서 수직이등분선 맥락의 접근을 실행해 보고 관련 상황과 결부지어 논의함으로써 변과 각의 관점에서의 접근이 갖는 특징을 파악하였다. 이는 수직이등분선 맥락의 접근과 대비되는 변과 각의 관점이 갖는 차별적 의미를 추출하고자 하는 의도를 지닌다. 마지막으로 다섯 점 이상의 상황에 대한 해결책을 강구함으로써, 네 점의 상황이 갖는 응용적 가치를 끌어내었다.

교과서 분석은 ‘추출한 배경 의미가 드러나는 전개인가?’가 주요 관점이다. 현실적 배경 의미의 측면에서는 조건이 현실 상황으로부터 파생한 전개인지를 검토하였다. 수학적 배경 의미의 측면에서는 ‘네 점인 이유를 파악하기 쉬운 전개인가’, ‘각의 관점에서 진술된 이유를 파악하기 쉬운 전개인가’, ‘삼각형의 외심과 연계성을 파악하기 쉬운 전개인지’를 집중적으로 검토하였다.

[표 1] 분석 방법
[Table 1] Analysis method

항목	세부 항목	세부 사항
배경 의미 추출 방법	현실적 배경 의미	· 적합한 현실 맥락 추측 · 현실 맥락에서의 조건 재해석
	수학적 배경 의미	· 두 점, 세 점 상황과 네 점 상황의 비교 · 네 점에서 수직이등분선 맥락의 접근 고찰 · 다섯 점 이상의 상황에 대한 고찰
교과서 분석 방법	현실적 배경 의미	· 조건이 현실 상황으로부터 파생하는 전개인지 검토
	수학적 배경 의미	· 네 점인 이유를 파악하기 쉬운 전개인가 검토 · 각의 관점에서 진술된 이유를 파악하기 쉬운 전개인가 검토 · 삼각형의 외심과 연계성을 파악하기 쉬운 전개인지 검토

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

1. 네 점이 한 원 위에 있을 조건이 갖는 배경 의미[3]

1) 현실적 배경 의미

‘네 점이 한 원 위에 있을 조건’은 토지 측량과 관련하여 탄생한 것으로 추측된다. 이 조건은 그리스 기하로부터 비롯된 것[4]인만큼, 그 현실 맥락은 기하의 출현과 관련지어 생각할 필요가 있다. 기하학은 토지측량과 관련한 실제 생활에서의 필요에 의해 생겨났다(민세영, 2002, p17). Clairaut은 geometry라는 용어의 어원을 근거로 기하는 토지 측량과 관련한 문제에서 비롯되었다고 주장한다(장혜원, 2003, p354). 이런 관점에서 ‘네 점이 한 원 위에 있을 조건’의 출현 역시 토지 측량과 무관하

3) 본 연구에서 추출한 배경 의미는 문헌 연구 결과의 요약이 아니라, 문헌 연구를 토대로 하여 본 연구에서 새롭게 제시한 내용들이다.

4) <Euclid 원론>에 ‘네 점이 한 원 위에 있을 조건’은 등장하지 않는다. 단지 제 Ⅲ권 법칙 20에서 한 원에서 같은 호에 대한 원주각과 중심각 사이의 관계를, 제 Ⅲ권 법칙 21에서 원에서 같은 활꼴의 내부 원주각의 크기는 같다는 사실을, 제 Ⅲ권 법칙 22에서 원에 내접한 사각형의 마주보는 두 각의 합에 대한 명제가 다루어진다. 여기서 제 Ⅲ권 법칙 21과 법칙 22의 역이 각각 ‘네 점이 한 원 위에 있을 조건’ 중 하나라는 관점에서 이들의 탄생이 그리스 기하에서 탄생한 것으로 본 것이다.

지는 않을 것이다.

토지 측량의 관점에서 원은 한 위치로부터 공평한 거리에 자리 잡은 위치들의 모임으로 볼 수 있다. <Euclid 원론> 제 I권은 원론에 대한 장대한 이론을 시작하기에 앞서 총 23가지의 기본적인 개념에 대한 정의를 시도한다. 이들 중 원과 관련된 것으로 다음과 같은 정의가 있다(이무현, 1997).

- 어떤 선으로 둘러싼 도형이 있어서, 한 점에서 직선들을 그었을 때 그 도형에 놓이는 부분이 모두 서로 같으면 그 도형을 원이라 부른다.
- 이 때 그 한 점을 원의 중점(중심)이라 부른다.
- 원의 지름은 중점을 지나고 양쪽 다 원둘레에서 끝나는 직선을 말한다. 지름은 원을 이등분한다.
- 지름과 지름이 자른 원둘레가 둘러싼 도형을 반원이라 부른다. 반원의 중점은 원의 중점과 같다.

위 정의로부터 당시의 수학자들은 원이 한 지점에서 공평한 거리에 있는 위치들의 모임이라는 속성을 잘 이해하고 있었음을 알 수 있다. '한 점(원의 중심)에서 직선을 그었을 때 그 도형에 놓이는 부분이 모두 서로 같으면'이라는 구절은 이 속성의 다른 표현이다.

또한 그리스인들은 원의 개념에서 원의 중심을 중요시하고 있음을 알 수 있다. 때문에 네 정의 모두에 원의 중심이 등장한다. 지름은 '원에서 가장 긴 현'으로 정의될 수 있지만, 원의 중심의 관점에서 '중심을 지나고 양쪽 다 원둘레에서 끝나는 직선'으로 정의되고 있다. 또한 반원의 정의에서 조차 '반원의 중심이 원의 중심과 같다'는 내용을 부가하여, 원의 중심을 중요시하는 태도를 보여준다.

원의 중심을 중시한 태도는 작도에서 비롯된 것으로 보인다. <Euclid 원론>은 여러 도형의 성질을 다루기 전에 도형의 작도가능성을 보인다. 예컨대, <Euclid 원론> 제 I권 법칙 1은 정삼각형에 대한 작도를 다룬다. 이후에도 다루는 모든 도형은 작도가능성을 우선적으로 증명한 후에 그에 대한 성질을 다룬다(권석일, 2006, p96). 작도는 도형의 존재성을 확보하기 위한 조치이다. 그런데 원을 작도하자면 원의 중심을 찾을 수 있어야 한다. 따라서 그리스인들은 원의 작도에 필수불가결한 요소인 원의 중심을 중시하는 태도를 갖추게 된 것이다.

원의 중심을 중시하는 태도에 비추어 볼 때, '네 점이 한 원 위에 있을 조건'은 '네 점을 지나는 원의 중심 찾기'로 변환 가능하다. 나아가 한 위치에서 공평한 거리에 있는 위치들의 모임이라는 원의 개념에 비추어 볼 때, '네 점을 지나는 원의 중심 찾기'는 '네 점에서 공정한 거리에 위치한 점 찾기'로 해석할 수 있다.

이러한 가역적 추론에 기반한 해석과 네 점을 보다 단순화한 두 점의 상황에 대한 가정으로부터 다음과 같은 구체적 현실 맥락을 제안할 수 있다.

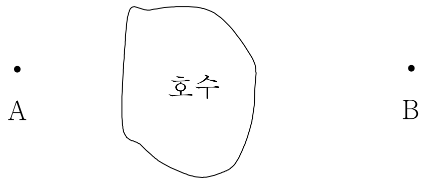
(현실 맥락) 마을 A와 마을 B로부터 공정한 위치에 도서관을 건립한다. 이때 공정한 위치는 두 마을로부터 같은 거리에 위치한 지점이 되어야 한다. 그 위치를 찾으시오.

현실 맥락은 수학적 모델링을 통해 수학적 문제로 변모하게 된다. 이 문제를 해결하기 위해서는, 먼저 Clairaut이 주장한 것처럼 현실적인 거대한 도형을 작게 그릴 필요에 의해 도형의 닮음 개념[5]을 도입할 필요가 있다. 닮음에 의해 축소된 상황에서 두 마을은 점으로 모델링된다. 이러한 과정을 거치면서 현실 맥락은 '두 점을 지나는 원에 대한 문제[6]'로 탈바꿈하게 된다. 다시 말해, 수학적 모델링을 통해 공정한 위치 찾기라는 현실 맥락이 두 점을 지나는 원에 대한 수학 문제로 자리매김하게 된다.

이 문제 상황에 대한 해답은 일반적으로 선분 AB의 중점이지만, 제약이 따를 경우 아닐 수 있다. 일반적으로 공정한 위치는 선분 AB의 중점이 될 것이다. 그러나 현실에서는 선분 AB의 중점을 해답으로 설정할 수 없는 제약이 따를 수 있다. 예컨대, 두 마을 사이에 거대한 호수가 자리 잡고 있다고 가정해보자. 두 지점 사이에 호수와 같이 도서관을 건립할 수 없는 장애물이 있는 상황에서 선분 AB의 중점은 해답이 될 수 없다.

5) Clairaut은 도형을 작게 그릴 필요에 의해 도형의 닮음 개념이 도입되었다고 주장한다(장혜원, 2003, p355).

6) 두 마을이 곧 두 점이 되며, 두 마을로부터 같은 거리에 있는 지점을 찾는 것은 두 점으로부터 같은 거리에 있는 지점을 찾는 수학적 문제로 탈바꿈하게 된 것이다.



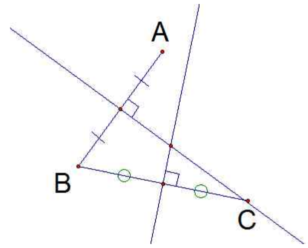
[그림 1] 두 마을 A와 B로부터 공정한 위치 찾기 상황
[Fig. 1] A situation finding a fair position from the two villages A and B

호수라는 제약이 따른 문제 상황은 두 점을 이은 선분의 수직이등분선으로 해결 가능하다. 왜냐하면 수직이등분선은 두 점으로부터 같은 거리에 있는 점들의 모임이기 때문이다. 다시 말해, 현실 맥락에서 선분의 수직이등분선은 두 지점 사이의 공정한 위치로 해석해 볼 수 있다. 이는 두 점을 지나는 원이 무수히 많이 있음을 반영하는 것이지만, 그 중심이 임의의 점은 아니라는 사실을 보여준다. 두 점을 지나는 원의 중심은 반드시 두 점을 이은 선분의 수직이등분선 위에 위치해야 한다.

이상에서 '주어진 점이 한 원 위에 있을 조건'의 현실적 배경 의미는 주어진 점에서 공정한 위치 찾기에 대한 수학적 모델링으로 해석해볼 수 있다. 이 문제에는 필연적으로 두 가지 주요 문제가 따르게 된다. 하나는 '주어진 모든 점에 공정한 위치가 존재하는가'라는 존재성에 대한 것이다. 다른 하나는 '공정한 위치가 존재한다면, 그것은 몇 개인가'라는 존재 개수에 대한 것이다. 이와 같은 두 가지 관점 하에서 두 개의 점은 세 점, 네 점, 다섯 점, ⋯ 등으로 점진적인 확장이 요구되며, 이는 곧 일반화와 연결된다.

2) 수학적 배경 의미

수학적 문제는 두 개 이상의 점으로 확장될 수 있다. 두 개의 점을 지나는 원에 대한 문제는 세 개의 점을 지나는 원에 대한 문제로 확장 가능하다. 이 확장 속에 다음과 같은 문제가 제기될 수 있다; 세 점을 지나는 원은 항상 존재하는가? 그러한 원은 몇 개 존재하는가? 이러한 의문은 두 점에 대한 해결책으로부터 [그림 2]와 같은 유추적 해결이 가능하다. 결국 일직선 위에 있지 않는 세 점을 지나는 원은 항상 유일하게 존재하는 것을 알 수 있다[7]. 그리고 이것은 곧 삼각형의 외심이 된다.



[그림 2] 세 점인 상황에서 해법
[Fig. 2] The solution for the situation given three points

상황은 더욱 복잡한 양상으로 치닫게 되어 '네 점을 지나는 원은 항상 존재하는가?', '언제 존재하며 언제 존재하지 않는 것인가?', '존재한다면 몇 개 존재하는가?' 등의 문제 제기가 가능하다. 이 문제 역시 앞선 두 상황의 해결을 원만하게 하였던 수직이등분선의 관점에서 접근 가능하다. 주어진 네 점으로 이루어진 사각형의 세 선분의 수직이등분선이 한 점에서 만날 경우에만 원이 존재하며, 이 경우 원은 유일하다[8].

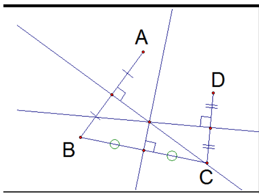
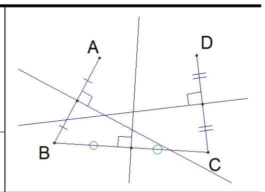
네 점의 상황은 두 점, 세 점과는 다르게 원이 존재하는지 존재하지 않는지를 파악하기 쉽지 않은 최초의 상황임을 알 수 있다. 두 점을 지나는 원은 항상 존재한다. 세 점 역시 일직선에 위치하지 않는 경우를 제외하면 항상 원이 존재한다. 반면 네 점은 [표 2]와 같이 존재성 파악이 쉽지 않다. 이처럼 네 점의 상황은 원의 존재성 파악이 쉽지 않은 최초의 상황임이다.

수학 교과서에는 수직이등분선의 관점에서 기술된 네 점이 한 원 위에 있을 조건이 등장하지 않는다(신항균 외, 2013; 이강섭 외; 2013, 황선욱 외, 2013). 수직이등분선에 입각한 두 점과 세 점에서의 접근이 네 점에서의 접근으로 연결되는 것은 지극히 자연스러운 인지적 과정임에도, 네 점에서 수직이등분선에 입각한 접근이 배재된 것은 주목할 만한 부분이다. 이는 이 접근이 수학자들에게 만족스럽지 못한 해법임을 보여준다.

7) 만약 세 점이 일직선 위에 있을 경우에는 두 선분에 대한 수직이등분선은 평행하게 되므로, 세 점으로부터 같은 거리에 있는 점은 존재하지 않게 된다. 즉, 이 경우에만 세 점을 지나는 원이 존재하지 않게 된다.

8) 네 개의 선분이 아니라, 세 개의 선분만 그어보면 된다. 왜냐하면 세 선분의 수직이등분선이 한 점에서 만난다면 나머지 한 선분의 수직이등분선은 반드시 그 점을 통과해야 하기 때문이다.

[표 2] 수직이등분선의 관점에서 네 점인 상황의 해법
[Table 2] The solution for the situation given four points in the perpendicular bisector perspective

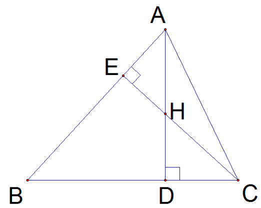
	
네 점을 지나는 원이 존재하는 경우	네 점을 지나는 원이 존재하지 않는 경우

수학자들이 이것을 만족스러운 결과로 받아들이지 않은 이유를 크게 세 가지로 추측해 볼 수 있다. 첫째로 세 선분의 수직이등분선이 한 점에서 만난다는 것에 대한 점검은 결국 네 점을 지나는 원을 직접적으로 그려보는 활동이라는 점을 들 수 있다. 다시 말해, 이 접근은 원의 존재성을 넘어 원을 작도하는 방식까지 포괄하는 것이다. 따라서 수학자들은 네 점을 지나는 원의 존재성만을 점검할 수 있는 고유의 조건을 찾고자 했던 것으로 추측할 수 있다.

둘째로 세 수직이등분선이 한 점에서 만난다는 것을 점검하는 활동은 번거롭고 오차의 위험이 크다는 점이다. 세 수직이등분선이 한 점에서 만난다는 것은 세 수직이등분선을 긋는 활동과 그들이 한 점에서 만난다는 것을 확인하는 번거로운 절차가 요구된다. 더욱이 이는 축소 상황에서 행해져야 하는 것이므로 원래의 상황으로 확대했을 때 오차가 크게 나타날 수 있다. 왜냐하면 절차의 복잡함으로 인해 오차의 가능성이 커지기 때문이다.[9]

셋째로 수직이등분선 맥락에서의 조건이 갖는 비효율적 응용 가능성을 들 수 있다. '네 점이 한 원 위에 있기 위해서는 네 점을 이은 사각형의 세 변의 수직이등분선이 한 점에서 만나야 한다'는 정리는 기하 문제에 응용하기 어려운 정리에 해당한다. 기하학에서 유명한 수심을 통해 이에 대해 자세히 살펴보기로 하자.

9) 확률적 관점에서 각 절차는 독립 사건에 해당한다. 따라서 전체 오차는 각 절차가 갖는 오차의 곱으로 나타나기 때문에, 절차가 많아질수록 전체 오차는 크지는 경향을 지니는 것이다.



[그림 3] 삼각형의 수심
[Fig. 3] The orthocenter of triangle

[그림 3]의 삼각형의 수심에서 특이할만한 사실은 네 점 A, C, D, E가 한 원 위에 있다는 점이며, 이것은 각의 맥락에서의 조건에 의해 쉽게 파악 가능한 사실이다. 그러나 이것을 수직이등분선 맥락의 조건에서 접근한다면 상황은 변하게 된다. 수직이등분선 맥락에서는 두 선분의 수직이등분선의 교점을 나머지 한 선분의 수직이등분선이 지남을 보여야 하며, 이것은 번거로운 작업에 해당한다.[10]

수학자들은 이러한 문제점을 효과적으로 해결할 수 있는 방안을 모색해 보았을 것이며, 그 해결의 초점은 각의 크기와 변의 길이가 되었을 것이다.[11] 각의 크기와 변의 길이에 입각하면 원의 존재성만을 점검할 수 있는 고유 조건을 만들 수 있다. 각의 크기와 변의 길이 측정은 복잡한 절차를 필요로 하지 않으므로 오차의 가능성은 현저히 줄어들게 된다. 각의 크기와 변의 길이는 응용하기 쉽다. 이러한 이유로 마침내 오늘날 교과서의 네 점이 한 원 위에 있을 조건 두 가지[12]가 등장한 것으로 추측해 볼 수 있다.

네 점이 한 원 위에 있을 조건은 다섯 점 이상의 상

10) 물론 직각삼각형의 외심은 빗변의 중점이라는 사실로부터 $\overline{AE}$, $\overline{CD}$의 수직이등분선은 $\overline{AC}$의 중점에서 만난다는 것을 추론할 수 있다. 하지만 직각이 아닌 상황이라면 이들이 한 점에서 만나는 것을 보이는 것은 번거로운 작업에 해당한다.

11) 마찬가지로 삼각형의 합동조건이 각의 크기와 변의 길이로서 되어 있는 것은 이들 요소의 점검이 다른 요소에 비해 쉽기 때문인 것으로 해석해 볼 수 있다.

12) 현재의 교과서(신항균 외, 2013; 이강섭 외; 2013, 황선욱 외, 2013)는 각의 크기에 관한 두 가지만 제시된다. 하지만 7차 교육과정 교과서(조태근 외, 2002)에서는 다섯 가지가 제시된다. 이들은 모두 각의 크기와 변의 길이에 관한 것으로 쉽게 점검 가능한 것들이다.

황으로 전이 가능한 것이다. 점의 개수를 늘여가는 일반화의 관점에서 문제 상황은 자연스럽게 네 점이 아닌 다섯 점을 지나는 원에 관한 상황으로 확장이 이루어져야 한다. 그럼에도 수학 교과서에는 네 점을 초과하는 상황에 대한 정리를 찾아볼 수 없다(신항균 외, 2013; 이강섭 외; 2013, 황선욱 외, 2013). 이것은 네 점에서 발견한 조건이 다섯 점, 여섯 점, … 등의 문제 상황으로 전이 가능한 것이기 때문에 나타난 현상이다. 다시 말해, 다섯 점, 여섯 점에 관한 문제 상황을 해결하기 위한 또 다른 조건을 구할 필요가 없을 만큼 네 점에 관한 조건은 응용력을 지닌 것이다. 예컨대, 수학사에 유명한 Euler의 구점원 문제13)는 '네 점이 한 원 위에 있을 조건'에 의해 해결 가능하다.

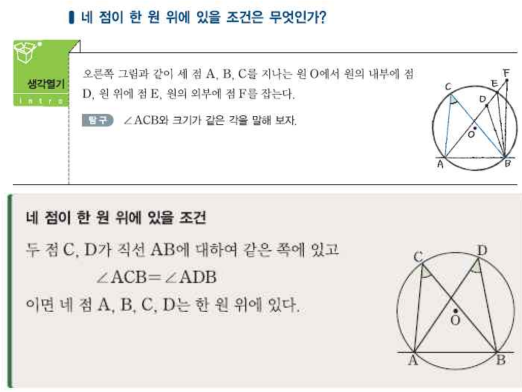
이상에서 살펴보았듯 두 점, 세 점, 네 점, 다섯 점 등으로의 일반화 과정을 고려할 때, 네 점이 한 원 위에 있을 조건이 갖는 수학적 배경 의미는 다음과 같다.

- 주어진 점을 지나는 원이 언제나 존재하는 '두 점'이나 '일직선 위에 있지 않은 세 점'과는 달리, 네 점의 상황은 그것을 지나는 원이 존재할 수도 존재하지 않을 수도 있는 최초의 복잡 상황이다.
- 네 점의 상황에 대해 수직이등분선 맥락에서 얻은 조건은 원의 존재성만을 점검하는 방식이 아니며, 오차의 위험이 크며, 응용 가능성이 낮다. 따라서 원의 존재성만을 점검하고 오차의 위험을 최소화하며 응용 가능성이 높은 '변과 각의 관점에서 접근한 조건'이 탄생한 것이다.
- 네 점이 한 원 위에 있을 조건은 다섯 점 이상의 상황으로 전이 가능한 응용력을 지닌 것이다.

이와 같은 배경 의미는 일반화의 관점을 통해 드러나는 특성임에 주목할 필요가 있으며, 과연 교과서는 이것을 잘 드러내고 있을지 의구심이 제기된다.

2. 교과서에 대한 비판적 분석

교과서(신항균 외, 2013; 이강섭 외, 2013; 황선욱 외, 2013)에서 '네 점이 한 원 위에 있을 조건'으로 [그림 4]의 조건이 가장 먼저 소개되며, 이것은 탐구 활동을 통해 제시되고 있다. 이 조건은 나머지 한 점이 원 위에 있는 경우, 원 내부에 있는 경우, 원 외부에 있는 경우 각각에 대해 각의 크기가 어떤 식으로 변화되는지를 탐구하는 것으로 시작된다. 그리고 각 경우에 대한 탐구에서 나타나는 각의 크기 변화를 통해 '네 점이 한 원 위에 있을 조건'을 논리적으로 제시하고 있다.



[그림 4] 네 점이 한 원 위에 있을 조건의 도입(황선욱 외, 2013)

[Fig. 4] The introduction of the condition that four points lie on a circle

이것은 현실적 배경 의미 파악이 어려운 전개이다. 이 조건은 원에 내접하는 사각형이 갖춘 성질의 역에 대한 탐구로서 제시되지만, 현실 맥락과 동떨어져 있으므로 Ⅲ장에서 살펴본 현실적 배경 의미가 전혀 드러나지 않는다. 따라서 어떤 현실 상황으로부터 파생한 조건인지 이해하기 어렵다.

수학적 배경 의미의 측면에서도 발견 맥락이 드러나지 않는 전개, 삼각형의 외심과 동떨어진 전개, 그에 따른 증명 이해가 어려운 전개이다.

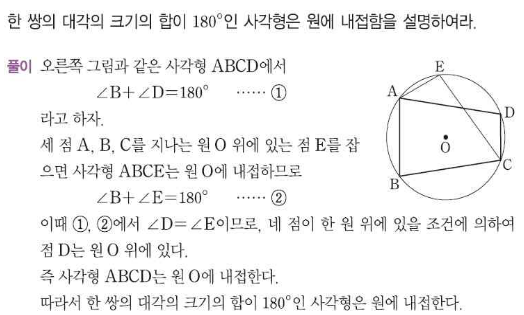
먼저 교과서의 전개 방식은 발견 맥락 이해를 어렵게

13) 삼각형 ABC에서 D, E, F를 세 변의 중점으로 하고, AL, BM, CN을 맞변에의 수선으로 하고, 점 a, b, c를 AO, BO, CO의 중점으로 한다. 그 때 점 L, D, c, E, M, a, N, F, b를 지나는 하나의 원을 그릴 수 있는데 이 원을 구점원이라고 한다. 구점원을 처음 발견한 사람은 오일러라고 말하기도 하나, 그것은 잘못이다. 이것은 몇 사람의 독립된 발견자가 있다. 영국에서는 벤자민·베반이 1804년에 토마스·레이부른이 편집한 잡지 수학의 보고(Mathematical Repository) I, 18에서 증명을 요구하는 한 정리로서 제출한 것이 있는데, 그 정리는 실제로 구점원을 부여한 것이었다. 이 증명은 수학의 보고 제 I권 제 1부의 143페이지에서 존·버터워드에 의해 주어졌다(Cajori, 1917).

한다. 갑작스럽게 네 점이 등장하므로 왜 하필 네 점에 대한 조건인지에 대한 이해가 어렵다. 또한 각의 관점에서의 조건 제시는 비록 탐구 활동을 수반하기는 하지만, 왜 하필 각의 관점에서 이러한 탐구를 행하는지 알기 어렵다. 다시 말해, 이와 같은 전개는 '네 점이 한 원 위에 있을 조건'을 이미 아는 사람에게나 가능한 발상으로 진행되고 있다.

삼각형의 외심과의 연결성을 파악하기 어려운 전개이다. 중학교 수학 2에 등장하는 삼각형의 외심[14]은 수직이등분선의 맥락에서 다루어지는데 반하여, 중학교 수학 3에 등장하는 '네 점이 한 원 위에 있을 조건'은 각의 맥락에서 다루어진다. 이처럼 서로 상이한 맥락에서 다루어지므로, 학생들이 이 조건이 삼각형의 외심과 관련된 것임을 인식하기란 쉽지 않다.

삼각형의 외심과 단절된 전개는 '한 쌍의 대각의 크기의 합이 $180°$인 사각형은 원에 내접한다[15]'는 정리 증명 이해의 어려움의 원인이 될 수 있다. 이 정리 증명을 황선욱 외(2013)는 [그림 5]와 같이 제시하고 있다.


한 쌍의 대각의 크기의 합이 180°인 사각형은 원에 내접함을 설명하여라.

풀이 오른쪽 그림과 같은 사각형 ABCD에서

$\angle B + \angle D = 180°$ …… ①

라고 하자.

세 점 A, B, C를 지나는 원 O 위에 있는 점 E를 잡으면 사각형 ABCE는 원 O에 내접하므로

$\angle B + \angle E = 180°$ …… ②

이때 ①, ②에서 $\angle D = \angle E$이므로, 네 점이 한 원 위에 있을 조건에 의하여 점 D는 원 O 위에 있다.

즉 사각형 ABCD는 원 O에 내접한다.

따라서 한 쌍의 대각의 크기의 합이 180°인 사각형은 원에 내접한다.

[그림 5] '한 쌍의 대각의 크기의 합이 $180°$인 사각형은 원에 내접한다'는 정리의 증명

[Fig. 5] The proof of the theorem 'rectangles satisfying that sum of either pair of opposite angles is 180 degree inscribed in a circle'

[그림 5]는 삼각형의 외심에 대한 존재성에 기반한 증명이다. 증명은 세 점 A, B, C를 지나는 원 O를 잡으면서 시작된다. 여기서 원 O를 잡을 수 있는 이유는 삼각형의 외심은 항상 존재하기 때문이다. 세 점 A, B, C가 일직선 위에 있게 되면 □ABCD가 사각형이 되지 않기 때문에 이들은 일직선 위에 있지 않은 세 점이다. 따라서 이 세 점을 이어 만든 도형은 삼각형이 되며, 삼각형의 세 꼭짓점을 지나는 원은 반드시 존재하게 된다. 다시 말해, 위 정리 증명은 중학교 2학년에 학습한 삼각형의 외심의 존재성을 함의하고 있다.

[그림 5]는 삼각형의 외심의 유일성도 함의하고 있다. 이를 보다 자세히 이해하기 위해 위 증명의 논지를 다음과 같이 기술해 보도록 하자.

> [그림 5]의 증명의 논지
> 세 점 A, B, C를 지나는 원 O 위에 점 E를 잡았으므로 네 점 A, B, C, E는 한 원 위에 있게 된다. -----①
> 또한 $\angle D = \angle E$이므로 네 점 A, C, D, E도 한 원 위에 있게 된다.-----②
> 따라서 모든 점은 한 원 위에 있게 되므로 정리는 성립하게 된다.-----③

[그림 5]의 논지에는 세 점 A, C, E를 지나는 원이 유일하다는 사실이 반영되어 있음을 알 수 있다. 만약 이 원이 유일하지 않다면, ①, ②는 성립하지만 ③은 성립하지 않게 된다. 유일성이 보장되지 않을 경우 네 점 A, B, C, E와 네 점 A, C, D, E를 지나는 원이 각각 존재할 수 있으므로 ③이 성립할 수 없게 되는 것이다. 이처럼 네 점이 한 원 위에 있을 조건의 증명에 삼각형의 외심의 유일성이 반영되어 있음을 알 수 있다.

삼각형의 외심과 단절된 전개는 삼각형의 존재성과 유일성에 기반한 증명 이해에 어려움을 초래할 수 있다. 삼각형의 외심은 수직이등분선의 맥락에서 지도되고, '네 점이 한 원 위에 있을 조건'은 각의 맥락에서 곧 바로 소개되고 있어, 두 개념은 상이한 것처럼 보이기 쉽다. 따라서 현 교과서의 전개 방식으로는 삼각형의 외심의 존재성과 유일성에 기반한 [그림 5]의 증명을 완전하게 이해하기란 어려워 보인다.

이처럼 네 점이 한 원 위에 있을 조건에 대한 교과서의 내용 전개는 논리 연역적 견지에서 다루어지고 있으며 결과적 사실로서 제시되고 있다. 따라서 어떤 현실과 관련된 것인지, 왜 하필 네 점인지, 왜 각에 관한 조건인

14) 이것은 '세 점이 한 원 위에 있을 조건'으로 볼 수 있다.
15) 이 정리 역시 원에 내접하는 사각형의 성질의 역으로서 제시되고 있다.

지, 삼각형의 외심과는 어떤 관계가 있는 것이지 등과 관련한 배경 의미 파악이 쉽지 않다. 따라서 이 조건의 배경 의미 파악이 용이하도록 교과 내용을 개선할 필요가 있다.

3. 교과 내용 개선 방향

1) 두 점, 세 점, 네 점의 순으로 점진적 접근

‘네 점이 한 원 위에 있을 조건’의 배경 의미 이해를 돕기 위해서는 두 점, 세 점, 네 점의 순으로 나아가는 점진적 접근이 요구된다. 두 점에 대한 탐구는 세 점으로 나아가는 기반이 되며, 수직이등분선에 의한 접근을 자연스럽게 유도한다. 또한 세 점에 대한 탐구는 네 점에 관한 조건의 의미 충실한 이해를 돕는 기반이 된다. 따라서 두 점, 세 점, 네 점 순으로 나아가는 접근이 필요하다.

두 점에 대한 탐구는 세 점으로 나아가기 위한 기반을 다지는데 도움이 된다. 두 점에 대한 탐구는 수직이등분선이 갖는 의미[16]를 이해하는 계기가 될 수 있다. 또한 이것은 세 점으로 나아가기 위한 기초 발판으로서의 의미를 지니며, 동시에 세 점에서도 수직이등분선에 의한 접근을 유도할 수 있는 유추의 근거가 될 수 있다.

세 점에 대한 탐구는 네 점에 관한 조건의 의미 충실한 이해를 돕는 기반이 된다. Ⅴ장에서 살펴본 바와 같이 네 점이 한 원 위에 있을 조건의 증명은 세 점에 관한 조건에 대한 이해를 기반으로 한다. 따라서 네 점에 관한 조건의 의미 충실한 이해를 돕기 위해서는 세 점에 관한 조건을 사전에 숙지할 필요가 있다.

그러나 ‘세 점이 한 원 위에 있을 조건’은 삼각형의 외심과 완전히 동치는 아니라는 점에 주목할 필요가 있다. 세 점이 일직선에 위치할 경우 삼각형이 형성되지 않기 때문에 이들은 동치가 아니다. 세 점이 한 원 위에 있을 조건은 삼각형의 외심을 포괄한 보다 일반적인 내용이다.

이러한 관계를 고려할 때, 네 점에 관한 조건을 다루기에 앞서 세 점에 관한 조건을 다루어봄으로서 이것이 삼각형의 외심과 연계된 것임을 인식할 기회를 제공하는 것이 필요하다고 생각된다.

16) 수직이등분선은 두 점으로부터 같은 거리에 있는 점들의 모임이라는 의미를 지니고 있다.

이상의 논의를 학습에 효과적으로 반영하기 위해 [표 3]과 같은 발문이 도움이 될 수 있을 것으로 생각된다.

[표 3] 두 점과 세 점 상황에서 탐구 유발을 위한 발문
[Table 3] Teacher question for arousing inquiry in the situation given two points or three points

	두 점	세 점
발문	· 두 점을 지나는 원은 있는가? · 있다면 몇 개 있는가? · 언제 있고, 언제 없는가?	· 세 점을 지나는 원은 있는가? · 있다면 몇 개 있는가? · 언제 있고, 언제 없는가? · 이것은 앞서 배운 어떤 내용과 관련되는가?

이러한 발문은 네 점에 관한 조건이 어느 맥락 속에 위치하는지를 이해할 수 있는 기회가 되며, 동시에 중학교 2학년에 학습한 내용과 ‘네 점이 한 원 위에 있을 조건’이 연계된 것임을 인식하는 계기가 될 것이다.

2) 왜 네 점인지에 대한 탐구 기회 제공

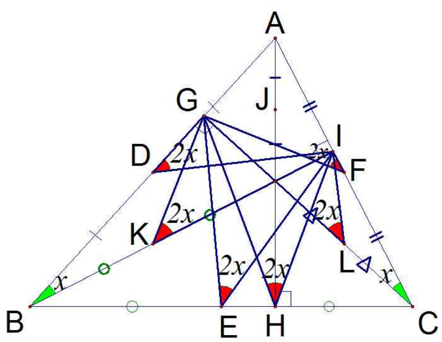
왜 네 점인지에 대해 탐구하는 기회를 제공할 필요가 있다. ‘왜 두 점, 세 점이 아닌 네 점인가?’, ‘다섯 점에 관한 조건은 왜 제시되지 않는 것인가?’ 등의 발문을 제시하고, 이것에 대해 숙고하고 토론하는 기회를 제공해야 할 것이다. 궁극적으로 네 점에 관한 조건이 갖는 높은 전이성을 인식할 수 있도록 도와야 한다.

이때 세 점과의 비교 활동은 네 점의 높은 전이성 인식을 돕는 좋은 방법으로 생각된다. 왜냐하면 세 점에 관한 조건은 전이성이 낮은 반면, 네 점에 관한 조건은 전이성이 높기 때문이다.

세 점에 관한 조건은 전이성이 낮다. 세 점이 일직선 위에 있지 않은 경우에만 세 점을 지나는 원은 유일하게 존재한다. 이 성질이 파급력을 갖기 위해서는 ‘네 점이 일직선 위에 있지 않다면 네 점을 지나는 원이 존재해야 한다’는 사실이 성립해야 한다. 그러나 이것은 성립하지 않는다. 결국 세 점에 관한 조건은 다른 상황으로 전이되기 어렵다.

반면 네 점에 관한 조건은 다른 상황으로 전이 가능하며, 이를 잘 보여주는 예로 Euler의 구점원을 활용할 수 있다. 9개의 점이 한 원 위에 있음을 보이기 위해 ‘네

점이 한 원 위에 있을 조건’을 이용하면 된다. [그림 6]의 증명은 [그림 4]의 조건이 적용되어 완성된 것이다. 이것은 네 점에 관한 조건이 전이성이 높은 것임을 보여준다.



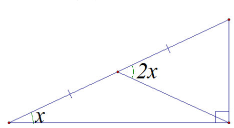
[그림 6] 네 점이 한 원 위에 있을 조건을 이용한 오일러의 구점원 증명[17]

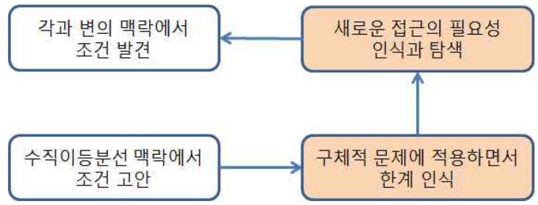
[Fig. 6] The proof of Euler's nine point circle using the condition that four points lie on a circle

3) 수직이등분선의 맥락에서 조건 고찰 기회 제공

수직이등분선의 맥락에서 조건을 고찰할 기회를 제공하는 것이 필요하다. 네 점에 대해서도 수직이등분선 맥락의 접근을 소개할 필요가 있으며, 이것이 갖는 단점을 숙고할 기회를 제공할 필요가 있다. 구체적 문제 상황을 통해 수직이등분선 맥락의 한계를 인식하고, 새로운 접근이 필요함을 인식하는 단계가 필요하다고 생각된다. 또한 이러한 단계를 통해 새로운 조건을 탐구하여 실효성이 강화된 조건을 발견할 수 있게 해야 할 것이다.

17) 위의 증명에서 직각삼각형의 다음의 성질이 주로 사용된다. 여러 개의 직각삼각형이 있으므로 이 성질은 여러 차례 적용 가능하다.





[그림 7] 수직이등분선 맥락의 한계 인식을 통한 발견 과정

[Fig. 7] Discovery process through the recognition on the limit of the perpendicular bisector context

앞에서 살펴본 바와 같이 네 점이 한 원 위에 있을 조건 역시 수직이등분선의 맥락에서 고찰 가능하지만, 이 맥락에서의 조건은 원의 존재성만을 다루는 고유의 것이 아니며 오차의 가능성이 크며 비효율적인 응용력을 지닌 정리였다. 따라서 수학자들은 원의 존재성만을 다루고 오차의 가능성을 줄일 수 있으며, 다른 정리 증명에 사용할 수 있는 효율적이고 실효성 있는 정리를 찾았으며, 그 결과 교과서에는 각과 변의 맥락에서 기술된 정리만 등장하게 된 것으로 생각된다.

그러나 수직이등분선의 맥락이 여러 가지 이유로 자취를 감추었다고 할지라도, 교육 속에서까지 드러내지 않는 것은 바람직스럽지 못하다. 왜냐하면 두 점과 세 점에서 다루던 접근을 네 점으로 이어가는 것은 지극히 자연스러운 인지 과정이기 때문이다. 그럼에도 현 교과서는 이와 같은 맥락이 소개되어 있지 않으며 곧 바로 각과 변의 맥락으로 접근하고 있다. 이런 이유로 각과 변의 맥락이 갖는 실효성 인식이 쉽지 않다.

게다가 수직이등분선 맥락을 생략한 접근은 네 점이 한 원 위에 있을 조건과 삼각형의 외심과의 연계성 인식에 어려움을 초래하는 주요 요인으로 판단된다. 네 점이 한 원 위에 있을 조건은 각과 변의 맥락인데 반하여, 삼각형의 외심은 수직이등분선 맥락이다. 이와 같은 상이 맥락은 두 개념 사이의 연계성 이해에 방해로 작용한다.

따라서 수직이등분선 맥락에서 조건 고찰의 기회를 제공해야 하며, 이를 통해 새로운 접근의 필요성에 입각한 발견이 이루어지게 해야 할 것이다. 이러한 단계를 거치게 되면 각과 변의 맥락에서 기술된 조건이 갖는 실효성을 인식하는데 도움이 될 뿐만 아니라, 이 개념이 중학교 2학년에서 학습한 삼각형의 외심과 연결된 것임

을 인식하는데 도움이 될 것으로 생각된다.

4) 공정한 위치 찾기 현실 맥락 반영

수학과 현실 맥락의 연결은 학생들에게 긍정적 영향을 미친다. 김성준·문정화(2006)에 따르면, 현실 맥락 문제를 적용한 수학 수업은 학생들의 수학적 신념과 태도에 긍정적인 효과를 미친다. 또한 학생들은 수학이 실생활과 보다 깊이 관련되어 있다는 사실을 알게 되고, 수학에 대한 흥미를 가질 수 있게 되어 장기적인 수학 학습에 긍정적 영향이 기대된다고 주장하였다.

수학과 현실 맥락과의 연결이 학생들에게 미치는 긍정적 영향을 고려할 때, 네 점이 한 원 위에 있을 조건과 관련한 현실 맥락을 교과서에 적극 반영할 필요가 있다. 이것은 현실적 배경 의미 이해를 돕기 위한 조치이다.

‘주어진 점이 한 원 위에 있을 조건’의 현실적 배경 의미는 주어진 점에서 공정한 위치 찾기에 대한 수학적 모델링이었다. 이런 점을 감안할 때, 공정한 위치 찾기와 관련한 현실 맥락을 개발하여 교과 내용을 보완할 필요가 있다.

구체적으로 [그림 1]과 같은 상황을 제공하여 현실 맥락에서 수직이등분선이 갖는 의미와 쓰임새를 이해하도록 해야 할 것이다. 이후 세 마을, 네 마을, 다섯 마을로 나아가 각 상황에서 모든 마을에 공정한 위치가 존재하는지를 살피도록 해야 한다. 이러한 현실 맥락에서의 고찰을 통해 ‘네 점이 한 원 위에 있을 조건’이 갖는 현실적 배경 의미를 이해하도록 도와야 할 것이다.

개발된 현실 맥락은 교과서의 탐구 활동에 소개되는 것이 적합하다고 생각된다. 탐구 활동에서 소개되면, ‘네 점이 한 원 위에 있을 조건’에 관한 자연스러운 고찰을 유도할 수 있다. 또한 현실에서 출발하여 수학적 모델링을 유도함으로써, 현실에 작용하는 수학의 힘을 인식할 수 있는 계기가 된다. 다시 말해, 현실 맥락의 탐구 활동 소개는 현재의 방식인 수학적 상황에서의 탐구 활동의 단점을 극복하는 방안이 될 수 있다.

5) 삼각형의 내심에 관한 확장 고려

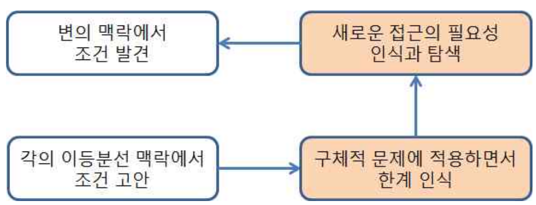
네 점이 한 원 위에 있을 조건이 삼각형의 외심의 확장이라는 점을 고려할 때, 삼각형의 내심에 관한 확장 역시 고려될 필요가 있다. 중학교 2학년에 학습하는 내용 중 삼각형의 외심과 버금가는 내용 중 한 가지로 삼각형의 내심이 있다. 만약 삼각형의 외심의 확장만을 다룬다면, 왜 삼각형의 외심에 관한 것만 다루는지에 관한 의문이 제기될 수 있다. 따라서 삼각형의 내심에 관한 확장 역시 교육적 측면에서 준비될 필요가 있다.

삼각형의 내심에 관한 확장 역시 수학 역사 속에 다루어져 온 주제로 대표적인 결과로 듀란드의 문제가 있으며, 그것은 삼각형의 내심과 상이한 맥락을 지닌다. 삼각형의 내심은 각의 이등분선의 맥락인 반면, 듀란드 문제는 변의 길이 맥락이다.

볼록사각형 ABCD에서 $\mathrm{AB}+\mathrm{CD}=\mathrm{BC}+\mathrm{DA}$이면, 이 사각형은 원에 외접한다.

이런 점을 고려할 때, 삼각형의 내심에 관한 확장에서 결과적 측면에 주목하여 결과만을 제공하는 것은 교육적으로 바람직하지 못하다. 과정적 측면에 주목한 접근이 요구된다.

구체적으로 삼각형의 내심에서 사각형의 내심으로 자연스러운 확장을 시도해야 한다. 이 과정에서‘사각형의 내접원이 존재하는가? 언제 존재하는가?’와 같은 발문이 도움이 될 수 있을 것이다. 사각형에 대한 고찰로 이행할 준비가 되었다면 먼저 삼각형의 내심과 마찬가지로 내각의 이등분선의 맥락에서 고찰하는 것이 필요하다. 다음 적절한 상황 문제가 제공되어 이 맥락이 갖는 한계를 인식할 수 있게끔 도와야 할 것이다. 마지막으로 내각의 이등분선 맥락이 갖는 한계 인식으로 부터 새로운 조건의 탐구가 필요함을 인식하고 발견할 수 있도록 지도하는 것이 필요하다.



[그림 8] 각의 이등분선 맥락의 한계 인식을 통한 발견 과정
[Fig. 8] Discovery process through the recognition on the limit of bisector of angles context

이와 같은 지도를 하게 되면 삼각형의 내심과 사각형의 내접원이 연결된 개념임을 인식하는데 도움이 되며, 아울러 두 개념이 서로 상이한 맥락으로 등장하는 이유를 이해하는데 도움이 될 수 있을 것이다.

삼각형의 내심의 확장은 자칫 교과 내용의 확대로 이어질 우려가 크기 때문에, 이것에 대한 내용 추가는 신중할 필요가 있다. 현재 교과서 개발의 방향이 교과 내용 감축을 통한 학생 중심 수업 구현을 지향한다는 점을 고려할 때, 이 내용은 단원 말미에 '이야깃거리'로 등장하는 것이 적합해 보인다. 혹은 교과서에 추가하지 않고 교사용 지도서나 영재 학생 지도 자료로 활용하는 것이 적절하다고 판단된다.

Ⅴ. 결론 및 제언

중학교 3학년 기하 단원에 등장하는 '네 점이 한 원 위에 있을 조건'은 결과적인 지식으로 등장하므로, 배경 의미 이해가 용이하지 않다. 이에 본 연구에서는 이러한 문제점을 개선해 보고자, 현실 맥락과 일반화의 관점에서 '네 점이 한 원 위에 있을 조건'을 고찰하고 그 배경 의미를 추출해 보았다. 이러한 고찰을 바탕으로 '네 점이 한 원 위에 있을 조건'에 대한 현 교과서 내용을 비판적으로 분석해 보았으며, 이를 통해 교과 내용의 개선 방향을 제안하였다.

'네 점이 한 원 위에 있을 조건'은 공정한 위치 찾기의 수학적 모델링이라는 현실적 배경 의미를 지니고 있다. 더불어 네 점은 두 점이나 세 점과는 다른 최초의 복잡 상황, 수직이등분선 맥락의 단점을 극복하기 위한 변과 각의 관점에 입각한 조건, 다섯 점 이상으로 전이 가능한 것이라는 수학적 배경 의미를 지니고 있다.

그러나 현 교과서에서 '네 점이 한 원 위에 있을 조건'은 원에 내접하는 사각형이 갖는 성질의 역으로써 제시되므로 연역적 견지에서 무리가 없지만, 그 배경 의미가 드러나지 않는 전개이다. 현 교과서 체제는 왜 네 점인지에 대한 이해를 어렵게 하며, 삼각형의 외심과의 연계성 인식을 떨어뜨린다. 따라서 삼각형의 외심에 기반한 증명 이해에서도 어려움을 초래한다. 이러한 난점을 극복하기 위해서는 배경 의미가 드러날 수 있는 교과 내용 개선이 요구된다.

첫째, 두 점, 세 점, 네 점의 순으로 점진적인 전개가 요구된다. 현 교과서에서 '네 점이 한 원 위에 있을 조건'이 곧 바로 도입되고 있기에, 이 조건이 중학교 2학년에 학습하게 되는 삼각형의 외심과 연계되어 있음을 인식하기 어려운 것이다. 따라서 점진적 진행을 통해 이들의 연계성 인식에 도움을 제공해야 한다.

둘째, 왜 네 점인지에 대한 탐구 기회가 제공되어야 한다. 현 교과서에서 결과적 사실로서 조건이 소개되고 있기에, 왜 네 점에 대한 조건만을 다루는지 이해하기 어렵다. 따라서 왜 네 점인지에 대한 탐구와 토론의 기회를 제공하여, 네 점이 갖는 높은 전이성을 인식하게 해야 할 것이다.

셋째, 수직이등분 맥락에서 조건 고찰의 기회를 제공해야 한다. 수직이등분선의 맥락에서 네 점에 관한 조건을 다루어 봄으로써, 삼각형의 외심과의 연계성 인식을 도와야 할 것이다. 아울러 수직이등분선 맥락이 갖는 비효율성 인식을 통해, 효율적인 조건에 대한 필요성이 제기되어 각과 변의 맥락으로의 자연스러운 이행을 도와야 할 것이다. 궁극적으로 각과 변의 맥락에서의 조건이 갖는 실효성을 인식할 수 있도록 도와야 할 것이다.

넷째, 공정한 위치 찾기라는 현실 맥락을 반영해야 한다. 수학과 현실 맥락과의 연결이 학생들에게 미치는 긍정적 영향을 고려할 때, 현실 맥락을 교과서에 적극 반영할 필요가 있다. 각 마을로부터 공정한 도서관 건립 문제와 같은 현실 맥락을 탐구 활동에 소개함으로써, 수학적 모델링의 경험을 제공하고 수학의 힘을 인식할 수 있게 해야 한다.

다섯째, 삼각형의 내심에 관한 확장까지 고려할 필요가 있다. '네 점이 한 원 위에 있을 조건'이 삼각형의 외심의 확장이라는 점을 고려할 때, 삼각형의 내심의 확장에 대한 교육적 준비가 필요하다. 그러나 교과 내용 감축이라는 현 교과서 개발 방향에 맞추어, 교과서 말미에 '이야깃거리'로 삽입하거나 교사용지도서 및 영재학생 수업 자료로 활용할 것을 제안한다.

본 연구는 '배경 의미'라는 새로운 연구 관점을 제공한 의의를 지닌다. 본 연구에서는 네 점이 한 원 위에 있을 조건을 대상으로 하였지만, 다른 개념에서도 마찬가지의 적용이 가능하다. 다시 말해, 본 연구는 배경 의

미의 측면에서 개념 연구 방법을 알려준다. 어떤 개념이든 다음의 세 단계 고찰이 가능하다. 1단계는 '개념의 배경 의미는 무엇인가?', 2단계는 '교과서의 개념 전개 방식은 배경 의미를 효과적으로 드러내는가?', 3단계는 '배경 의미를 드러낼 수 있는 교과 내용 개선 방향은 무엇인가?'를 숙고하는 것이다. 이러한 3단계의 개념 고찰은 교재 연구와 동시에 개념 탐구 방법의 한 형태가 될 수 있을 것이다.

본 연구는 교과 개선 방향을 제안하였지만, 실제 수업에 적용하여 효과를 검증하지는 못하였다. 본 연구에서 제안한 방안의 효과를 검증하는 후속 연구가 이어지길 기대한다.

참 고 문 헌

강완, 백석윤 (2007). 초등수학교육론. 파주: 동명사.

Kang, W., & Paik, S.Y. (2007). *Elementary mathematics education theory.* Paju: Dongmyeongsa.

강홍규 (2003). Dewey의 경험주의 수학교육론 연구. 서울대학교 박사학위논문.

Kang, H.K. (2003). *A study on Dewey's experientialism in mathematics education.* Doctoral dissertation, SNU.

권석일 (2006). 중학교 기하 교재의 '원론' 교육적 고찰. 박사학위논문, 서울대학교 .

Kwon, S.I. (2006). *A study on teaching of the elements of geometry in secondary school.* Doctoral dissertation, SNU.

김남희 (1997). 일반화의 의미와 구성에 대한 이해. 대한수학교육학회논문집 7(1), 445-458.

Kim, N.H. (1997). Understanding of the meaning and the construction of generalization. *Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics, 7*(1), 445-458.

김동근 (2011). 학교수학에서 일반화에 관한 연구. 박사학위논문, 경상대학교 .

Kim, D.G(2011). *A study on generalization in school mathematics.* Doctoral dissertation, GSNU.

김부미, 정은선, 안연진 (2009). 역사발생적 원리에 따른 교수학습 모듈을 적용한 수행평가의 교수학적 효과 분석. 학교수학 11(3), 431-462.

Kim, B.M., Jeong, E.S., & An, Y.J. (2009). Pedagogical Effect of Learning-Teaching Module of Unit for the Logarithm According to Historico-Genetic Principle. *School Mathematics, 11*(3), 431-462.

김성준, 문정화 (2006). 유형별 맥락문제의 적용과 그에 따른 유형별 선호도 조사. 한국학교수학회논문집 9(2), 141-161.

Kim, S.J., & Moon, J.H. (2006). A Study on the Application of Context Problems and Preference for Context Problems Types. *Journal of the Korea School Mathematics Society, 9*(2), 141-161.

김원경, 백경호(2005). 고등학교 확률과 통계 영역에서 현실적 수학교육의 적용 효과. 수학교육 44(3), 435-456.

Kim, W.K., & Peck, K.H. (2005). Implementation effects of the Realistic Mathematics Education in High School Probability and Statistics. *The Mathematical Education 44*(3), 435-456.

김창수 (2012). 일반화 과정과 그 정당화에서 '이해'의 완전성에 대한 연구: 산술, 기하, 조화평균을 중심으로. 수학교육 51(4), 377-393.

Kim, C.S. (2012). A study on the completeness of "the understanding" in the generalization process and justification -centered on the arithmetical, geometric and harmonic. *The Mathematical Education 51*(4), 377-393.

민세영 (1997). 역사발생적 원리에 따른 로그단원의 지도에 관한 연구. 수학교육학연구 7(2), 381-396.

Min, S.Y. (1997). A Study on the Development of the School Mathematics according to the Histo-genetic Principle. *The Journal of Education Research in Mathematics 7*(2), 381-396.

민세영 (2002). 역사발생적 수학 학습-지도 원리에 관한 연구. 박사학위논문, 서울대학교 .

Min, S.Y.(2002). *A study on historico-genetic principle of teaching and learning in mathematics.* Doctoral dissertation, SNU.

신항균 외 6명 (2013). 중학교 수학 3 교사용지도서. 서울: 지학사.

Sin, H,G., et al. (2013). *Middle school mathematics 3 guidebook for teacher.* Seoul: Jihaksa.

우정호 (2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울: 서울대학교 출판부.

Woo. J.H. (2000). *Principles and methods of learning-teaching mathematics* . Seoul: Seoul National

University Press.

이강섭 외 10명 (2013). 중학교 수학 3 교사용지도서. 서울: 미래엔.

Lee, G.S. et. al. (2013). *Middle school mathematics 3 guidebook for teacher*. Seoul: Mirae N

이무현 (1997). 기하학 원론 -평면기하 (Euclid 지음, 이무현 역). 서울: 교우사.

Lee, M.H. (1997). *The elements of geometry - plane geometry. (Written by Euclid, translated by Lee, M.H.)* Seoul: Kyowoo.

장혜원 (2003). Clairaut의 <기하학 원론>에 나타난 역사발생적 원리에 대한 고찰. 수학교육학연구 13(3), 351-364.

Chang, H.W. (203). A study on the historico-genetic principle revealed in Clairaut's 〈Elements of Geometry〉. *The Journal of Education Research in Mathematics 13*(3), 351-364.

정은실 (1997). 초등학교 수학에서의 개연적 추리에 대한 연구. 대한수학교육학회논문집 7(1), 69-86.

Jeong, E.S.(1997). Study on the Plausible Reasoning in Elementary Mathematics. *Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics 7*(1), 69-86.

조태근 외 4명 (2002). 중학교 수학 9-나 교사용 지도서. 서울: 금성출판사.

Jo, T.G. et. al. (2002). *Middle school mathematics 9-Na guidebook for teacher*. Seoul: Kumsung.

황선욱 외 8명 (2013). 중학교 수학 3 교사용지도서. 서울: 좋은책 신사고.

Hwang, S.W. et. al. (2013). *Middle school mathematics 3 guidebook for teacher*. Seoul: Sinsago.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics* (Didactique des Mathemaitques, 1970-1990) (N. Balacheff & M. Copper & R. Sutherland & V. Warfield, Ed. and Trans.), Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Byers, V., & Herscovics, N. (1977). Understanding school mathematics. Mathematics Teaching, 81.

Cajori, F. (1917). *A history of elementary mathematics with hints on methods of teaching*. Revised and enlarged edition, New York: Macmillan. 정지호 역 (1983). 수학의 역사. 서울: 창원사.

Clairaut, A. C. (1741). *Eléments de géométrie I, II.* Gauthier-Villars et Cle, Eds.(1920). Paris: Libraires du bureau des longitudes de l'école polytechnique.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics As an Educational Task*, Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: china lectures.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Polya, G. (1973). *Mathematics and plausible reasoning 1.* Princeton University Press.

Skemp, R. R., (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching, 77*, 20-26.

Treffers, A. (1987). *Three dimension: a model of goal and theory description in mathematics education-the wiscobas project*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Villiers, M. D. (1994). The Role and Function of a Hierarchical Classification of Quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics 14*(1), 11-18.

An Educational Consideration on the Condition that Four Points lie on a Circle

Jeonggi Kang
Jinyeong Middle School, Gimhae 50862, Korea
E-mail : jeonggikang@gmail.com

In this study, we extracted the background meaning of the condition that four points lie on a circle, analyzed textbooks critically and proposed the orientation to improve the content in the textbook. As results, the condition has a realistic background meaning which is 'mathematical modeling of finding a fair location'. The condition has a mathematical background meanings which are 'a first complex situation distinguished from two points and three points', 'the condition described in the perspective of side and angle in order to overcome the disadvantages of the perpendicular bisectors context' and 'being possible to transfer more than five points'. However it is difficult to understand the reason why the condition is on four points in the current textbook. In addition, it is difficult to recognize the connectivity of a circumcenter of triangle. To overcome these problems, we proposed five orientations to improve the content in the textbook.

* ZDM Classification : G83
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U20
* Key Words : Condition that four points lie on a circle, Background meaning, Realistic background meaning, Mathematical background meaning