

## Linear Time Algorithm for Network Reliability Problem

Sang-Un Lee\*

### Abstract

This paper deals with the network reliability problem that decides the communication line between main two districts while the  $k$  districts were destroyed in military communication network that the  $n$  communication lines are connected in  $m$  districts. For this problem, there is only in used the mathematical approach as linear programming (LP) software package and has been unknown the polynomial time algorithm. In this paper we suggest the heuristic algorithm with  $O(n)$  linear time complexity to solve the optimal solution for this problem. This paper suggests the flow path algorithm (FPA) and level path algorithm (LPA). The FPA is to search the maximum number of distinct paths between two districts. The LPA is to construct the levels and delete the unnecessary nodes and edges. The proposed algorithm can be get the same optimal solution as LP for experimental data.

▶ Keywords : Network reliability, Distinct path, Set cover, Flow path, Level path

### I. Introduction

$m$ 개 작전지역을 군 통신망 회선이  $n$ 개 ( $n > m$ ) 연결되어 있는 상황에서  $m-2$ 개 지역 중  $k$ 개 지역의 통신망이 파괴되어도 나머지 2개 주요 지역 간에는 통신을 할 수 있도록 국방규격서(national defense standard)에서 요구하고 있다. 이러한 경우, 규격서 요구조건을 만족하도록 망을 설계하였는지 검증하는 문제를 망 신뢰성 문제(network reliability problem, NRP)이라 한다[1,2]. 참고로, 국방규격서는 해당 제품이 충족해야 하는 품질과 신뢰성에 대한 군의 요구조건을 기술한 명세서(specification)이다[3].

NRP는 집합 분할 문제(set partitioning problem, SPP)[4-6]로 취급하여 해를 구할 수 있으나 SPP는 NP-완전(non-deterministic polynomial time-complete)으로 분류되어 다항시간으로 최적 해를 구하는 알고리즘이 알려져 있지 않은 어려운 문제이다[5,7]. 또한, SPP는 완전(complete) 집합 분할 문제이며, NRP에는 직접적으로 적용할 수 없는 문제점이 있다.

NRP와 관련하여 Guéret et al.[1]은 선형계획법(linear programming, LP) 소프트웨어 패키지를 활용하였으며, Edvall[2]는 CPLEX를 적

용한 MATLAB 프로그램을 활용하여  $O(m^4)$  수행 복잡도의 다항시간으로 해를 구하고자 하였다. LP중 하나인 Ellipsoid 알고리즘의 수행 복잡도는  $O(m^4)$ 로 알려져 있다[8].

이와 같이 NP-완전인 LSP와 관련하여 메타휴리스틱 방법인 유전자 알고리즘(genetic algorithm, GA)으로 군사 해를 구하고 있으며[6], 현재 개발된 수학적 접근법으로는 선형계획법(LP)이 있다[9,10].

본 논문에서는 NRP의 최적 해를  $O(n)$ 의 선형시간으로 얻을 수 있는 휴리스틱 알고리즘을 제안한다. 2장에서는 NRP 개념에 대해 연구 사례를 중심으로 고찰해 본다. 3장에서는 단지 시각적으로나  $O(n)$ 의 수행 복잡도를 가진 프로그램으로 최적 해를 구할 수 있는 휴리스틱 알고리즘을 제안한다. 4장에서는 제안된 알고리즘을 실험 데이터에 적용하여 알고리즘 적합성을 평가해 본다.

\*First Author: Sang-Un Lee, Corresponding Author: Sang-Un Lee

\*Sang-Un Lee (sulee@gwnu.ac.kr), Dept. of Multimedia Engineering, Gangneung-Wonju National University

\*Received: 2015. 12. 17, Revised: 2016. 02. 01, Accepted: 2016. 04. 05.

## II. Problem Description and Related Works

그림 1은 Guéret et al.[1]과 Edvall[2]에서 인용된  $m = 11$ 개 지역의 양방향 데이터 전송으로 연결된 균통신망 선  $n = 23$  개를 보여주고 있다. 망의 신뢰성을 확보하기 위해 규격서에는 망에서 임의의  $k = 3$  개 지역이 파괴되더라도 10과 11번 지역은 통신을 할 수 있어야 한다고 명시되어 있다. 그림 1의 망이 규격서 요구조건을 만족하는지 판단해야 한다. 즉, 규격서 요구조건을 충족시키려면 4개 이상의 별개의 경로(distinct paths)를 구해야 한다. 왜냐하면 4개 경로 중 3개 통신망이 파괴되더라도 나머지 1개 통신망으로 통신이 가능하기 때문이다.

그림 1의 데이터에 대해 Guéret et al.[1]은 선형 계획법(LP) 소프트웨어 패키지를 활용하였으며, Edvall[2]은 MATLAB을 이용하여 CPLEX를 구현하여 그림 2와 같이 해를 얻었다. 여기서 점선은 송수신이 불가능한 통신선로이며, 실선은 송수신이 가능한 통신선로를 보여주고 있다. 즉, 10과 11 지점간의 통신이 가능한 별개의 경로는 4개가 존재하여 규격서 요구조건을 만족함을 알 수 있다.

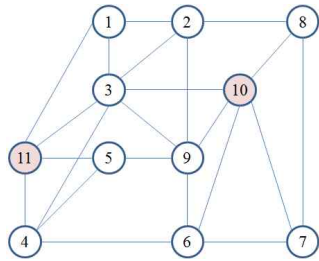


Fig. 1. Telecommunications network

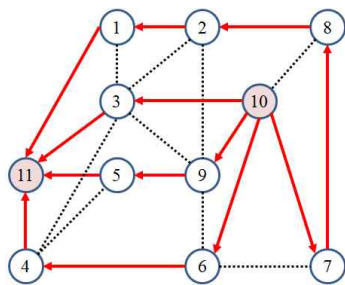


Fig. 2. Disjunctive paths

이와 같이 본 문제와 관련하여 수학적 접근법은 활용되고 있지만 다항시간으로 최적 해를 구하는 알고리즘이 제안되지 않고 있는 실정이다.

3장에서는, 본 문제와 관련하여 다항시간으로 최적 해를 구할 수 있는 휴리스틱 알고리즘을 제안한다.

## III. Flow and level path algorithm

균 통신망은 아무리 통신이 중요하더라도  $m$  개 지역 (노드)간에는  $K_m$ -완전 그래프(complete graph)의 간선 수인  $m(m-1)/2$  개의 점대점 통신망을 연결하지 않는다. 일반적으로는 효율성과 주어진 예산 측면을 고려하여  $n$ 개 통신망을 설치하여 운영하고 있다. 이러한 현실성을 반영하여,  $m$  개 지역 (노드)간에  $n$ 개 통신망(간선)으로 연결된 균통신망에 대해 특정 2개 지점  $s$ 와  $t$ 를 제외한  $m-2$  개의 간 노드들(intermediate nodes) 중에서  $k$ 개 지점이 파괴되어 해당 노드를 경유하는 통신망이 불통된 경우,  $s$ 와  $t$ 간에는 통신이 가능할지를 결정하는 망 신뢰성 문제의 규격서 충족 여부를 결정하기 위해 본 장에서는 흐름경로 알고리즘(flow paths algorithm, FPA)과 레벨경로 알고리즘(level paths algorithm, LPA)을 제안한다.

FPA와 LPA는 다음과 같이 수행되며, 수행 복잡도는  $O(n)$ 이다.

$N$ : 전체 노드 집합

$I$ : 간 노드 집합

2개 노드의 차수 계산

보다 작은 차수 노드를  $s$ , 큰 차수 노드를  $t$ 로 설정

$I = N \setminus \{s, t\}$

$N_G(s)$ :  $s$  노드의 인접 노드,  $N_G(t)$ :  $t$  노드의 인접 노드

$d_G(s)$ :  $s$  노드의 차수,  $d_G(t)$ :  $t$  노드의 차수

$|P|$  다른 경로 수(number of distinct paths)

### [흐름경로 알고리즘, FPA]

$|P| = 0$

Step 1.1차 검증

if  $\min\{d_G(s), d_G(t)\} > k$  then Step 2 수행

else 규격서 불만족, 알고리즘 종료

end

Step 2. 가능한 흐름 경로 생성

until  $N_G(s) = \{\phi\}$  or  $N_G(t) = \{\phi\}$  do

$s$ 에서  $t$ 로의 가능한 경로 선택

if 가능 경로 존재 then

- (1) 선택된 경로상의 노드들을  $N_G(s)$ ,  $N_G(t)$ ,  $I$  에서 삭제, 해당 노드들의 간선을 모두 삭제
- (2)  $|P| \leftarrow |P| + 1$

end

do

Step 3.2차 검증

if  $|P| > k$  then 규격서 충족

else if  $|P| \leq k$  then 규격서 불만족

end

### [레벨경로 알고리즘, LPA]

Step 1.1차 검증

if  $\min\{d_G(s), d_G(t)\} > k$  then Step 2 수행

else 규격서 불만족, 알고리즘 종료

end

Step 2. 가능 경로 생성

$s$ 를 근 노드(root node)로,  $t$ 를 단 노드(terminal node)로 하는 트리 레벨 (tree level) 생성

- (1)  $s$ 와  $N_G(s)$ 의 간선으로 하는  $d_G(s)$ 개의 경로 생성
- (2)  $t$ 와  $N_G(t)$ 의 간선으로 하는  $d_G(t)$ 개의 경로 생성
- (3)  $m-2$ 개의 간 노드를 대상으로  $s$  인접 노드 (1차 근방)를 Level 1( $L_1$ ), Level 1 노드의 인접 노드(2차 근방)를 Level 2( $L_2$ ), ...로 하여  $t$ 까지 레벨 생성

Step 3. 불필요 간선 삭제

- (1) 동일 레벨의 제 노드(sibling)간 간선 삭제
- (2) 만약,  $i$ 번째 레벨의 노드가  $t$ 의 인접 노드이면  $j > i$ 번째 노드로의 간선 삭제

Step 4. 불필요 노드와 간선 삭제

- (1)  $s$ 에서  $t$ 로의 경로가 단절된 노드 경로 삭제
- (2)  $d_G(n_i) \geq 2$ 인 노드  $n_i$ 에 대해  $t$ 까지 경로 노드 수가 보다 많은 다음 레벨로의 간선 삭제

Step 5. 2차 검증

if  $|P| > k$  then 규격서 충족  
 else if  $|P| \leq k$  then 규격서 불만족  
 end

제안된 알고리즘은  $O(n)$  수행 복잡도로 시각적으로나 프로그램으로도 단순히 구현할 수 있어 실무에 즉시 활용 가능한 장점을 갖고 있다. 본 논문에서는 시각적인 측면에서 알고리즘을 설명한다.

### IV. Applications and Evaluation

본 장에서는 Guéret et al.[1]과 Edvall[2]에서 인용된 그림 1의 실험 데이터에 대해 FPA와 LPA를 적용하여 본다.

FPA를 적용한 과정은 그림 3에, LPA를 적용한 과정은 그림 4에 제시되어 있다. 여기서,  $d_G(10) = 5, d_G(11) = 4$  로  $s = \{11\}$ ,  $t = \{10\}$ 로 결정되고, 1차 검증 결과  $\min\{d_G(s), d_G(t)\} = 4 > k = 3$ 으로 규격서를 충족하였다.

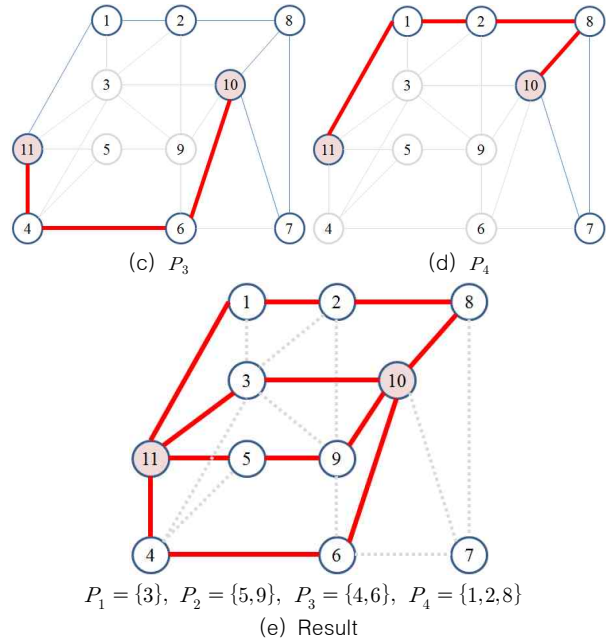
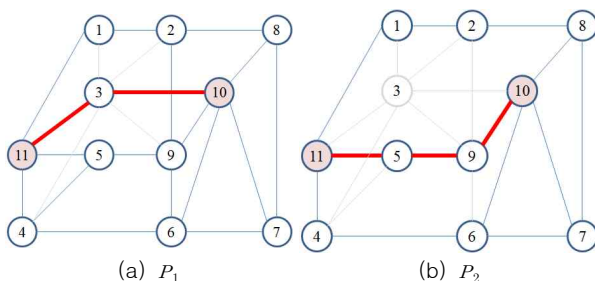
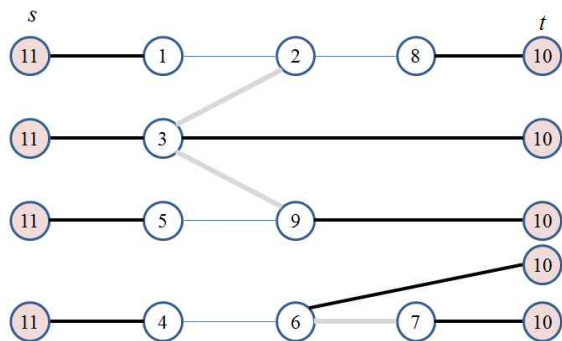
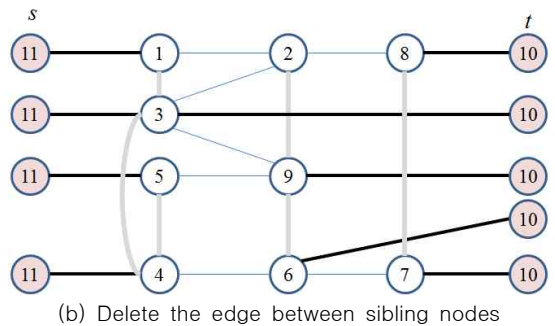
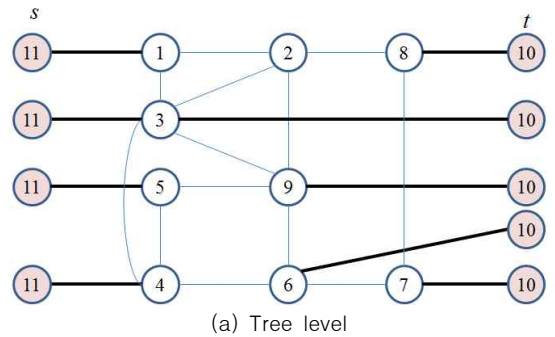


Fig. 3. Flow path algorithm



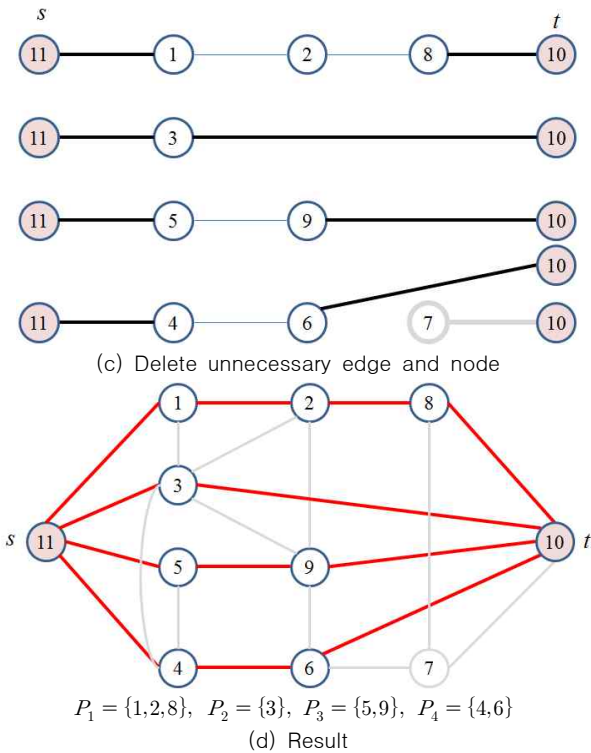


Fig. 4. Level path algorithm

s에서 t로의 별개의 가능한 최대 경로수를 얻기 위해, FPA의 경우 첫 번째 경로로  $P_1 = \{11,3,10\}$  을 얻고, 3 노드의 간선이 모두 삭제되었다. 두 번째 경로로  $P_2 = \{11,5,9,10\}$  을 얻고, 5와 9 노드의 간선들이 삭제되었다. 세 번째 경로로  $P_3 = \{11,4,6,10\}$  를 얻고, 4와 6 노드의 간선들이 모두 삭제되었다. 네 번째 경로로  $P_4 = \{11,1,2,8,10\}$  를 얻고 1,2와 8 노드의 간선이 모두 삭제되어 11에서 10으로 더 이상의 경로가 존재하지 않아 알고리즘이 종료되었으며, 가능한 경로는 4개를 얻었다. 각 경로들에서 s와 t를 제외한 노드들만으로 구성하면  $P_1 = \{3\}$ ,  $P_2 = \{5,9\}$ ,  $P_3 = \{4,6\}$ ,  $P_4 = \{1,2,8\}$  로 하나의 노드가 오로지 하나의 경로에만 존재함을 알 수 있다. 따라서 임의의  $k=3$  개 노드가 파괴되어도 나머지 하나의 경로는 통신이 가능하여 규격서 요구조건을 충족시킴을 알 수 있다.

LPA의 경우 트리 레벨 생성은 (a)와 같이 s인 11 노드의 인접 노드인 1,3,5,4 노드들 (1차 근방)이 레벨 1 (L1)에 배치되고, 레벨 1의 인접 노드들 (2차 근방)인 2, 9,6 노드들이 레벨 2 (L2)에, 8, 7 노드가 레벨 3 (L3)에 배치되었다. 다음으로 (b)와 같이 각 레벨의 제노드들 간 간선인 L1에서는  $\{1,3\}$ ,  $\{3,4\}$ ,  $\{5,4\}$ 가, L2에서는  $\{2,9\}$ ,  $\{9,6\}$ 이, L3에서는  $\{8,7\}$ 이 삭제되었으며, 레벨 1의 3 노드는 t의 인접노드로  $\{3,2\}$ ,  $\{3,9\}$ 간선이 삭제되었다. 또한 레벨 2의 6 노드는 t의 인접노드로  $\{6,7\}$ 이 삭제되었다. 마지막으로 s-t 경로를 갖지 않는 7 노드가 삭제되었다. 결론적으로 (d)에서  $P_1 = \{11,1,2,8,10\}$ ,  $P_2 = \{11,3,10\}$ ,  $P_3 = \{11,5,9,10\}$ ,  $P_4 = \{11,4,6,10\}$  을 얻었다. 각 경로들에서 s와 t를 제외한 노드들만으로 구성하면  $P_1 = \{1,2,8\}$ ,  $P_2 = \{3\}$ ,  $P_3 = \{5,9\}$ ,  $P_4 = \{4,6\}$  으로 하나의 노드가 오로지 하나의 경로에만 존재함을 알 수 있

다. 따라서 임의의  $k=3$  개 노드가 파괴되어도 나머지 하나의 경로는 통신이 가능하여 규격서 요구조건을 충족시킴을 알 수 있다.

제안된 FPA와 LPA를 LP와 CPLEX의 성능과 비교한 결과는 표 1에 제시하였다.

Table 1. Compare with algorithm performance

알고리즘	수행 복잡도	통신 경로			
		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$
LP & CPLEX	$O(m^4)$	{3}	{9,5}	{6,4}	{7,8,2,1}
FPA	$O(n)$	{3}	{9,5}	{6,4}	{8,2,1}
LPA	$O(n)$	{8,2,1}	{3}	{9,5}	{6,4}

LP & CPLEX는 10-3-11, 10-9-5-11, 10-6-4-11과 10-7-8-2-1-11의 4개 경로를 얻었으며, 이들 중 임의의 3개 통신경로가 파괴되더라도 나머지 1개 통신경로를 통해 10과 11번 노드 간에는 통신을 할 수 있다. FPA는 10-3-11, 10-9-5-11, 10-6-4-11과 10-8-2-1-11의 4개 통신경로를 얻었으며, LPA는 10-8-2-1-11, 10-3-11, 10-9-5-11과 10-6-4-11의 4개 통신경로를 얻었다.

LP & CPLEX는 단지 선형계획법의 소프트웨어 패키지를 적용하여 해를 구하였으며, 이 해를 구하는데 있어 어떤 규칙을 적용하여 찾아가는지에 대해서는 설명을 할 수 없다. 반면에, 제안된 알고리즘은 흐름 경로와 레벨 경로 규칙을 적용하여 최적 해를 찾아가는 휴리스틱 기법을 제시하였다는 의미를 둘 수 있다.

본 논문에서는 임의의 지역 통신망이 파괴된 경우 신속한 통신망 연결과 복구 작업은 수행되지 않고도 어떠한 임의의 3개 통신망이 파괴되더라도 여분의 1개 통신망으로 중요한 두 지역 간에는 지연시간 없이 즉시 통신이 가능한지 여부만을 고려하였다. 따라서 해당 노드 사이의 거리, 실제 거리 경로의 차이에 따른 최단 경로 등을 추가로 고려할 필요성은 없다.

제안된 FPA와 LPA는 LP의  $O(m^4)$ 의 수행 복잡도를  $O(n)$ 으로 감소시켰음에도 불구하고 동일한 4개의 경로를 얻었음을 알 수 있다. 특히하게도 FPA와 LPA는 LP와 CPLEX와는 다르게 7 노드는 어떠한 경로에도 포함시키지 않았다.

제안된 FPA와 EPA는 단순한 방법이며, 간선들을 대상으로 프로그램을 작성하거나 시각적으로 경로를 결정할 수 있는 장점으로 인해, LP와 같은 수학적 전문지식 없이도 실무에 활용 가능하여 현업에 종사하는 실무자에게 큰 도움을 줄 것이다.

### V. Conclusions and Future Researches

본 논문은 선형계획법과 같은 소프트웨어 패키지를 활용하지 않고는 다항시간으로 최적 해를 얻는 알고리즘이 알려지지 않은 망 신뢰성 문제에 대해  $O(n)$  수행 복잡도로 신뢰성 유무를 검증할 수 있는 알고리즘을 제안하였다.

제안된 알고리즘은 주어진 주요 두 지점 간에 임의의 흐름 경로를 최대한으로 찾는 흐름경로 알고리즘과, 트리 레벨을 형성하고, 불필요한 간선들을 삭제하는 레벨경로 알고리즘을 제안하였다.

제안된 알고리즘은  $O(n)$  수행 복잡도를 가진 프로그램을 작성하거나 단지 시각적으로도  $O(m^4)$  수행 복잡도의 선형계 획법 소프트웨어 패키지를 활용하는 경우와 동일한 해를 얻었다.

결론적으로, 제안된 알고리즘은 신뢰성 있도록 망을 설계하였는지 여부를 시각적으로도 단순히 검증할 수 있어 실무자에게 실제로 큰 도움을 줄 수 있을 것이다.

망 신뢰성 문제의 벤치마킹 데이터 획득 어려움으로 인해 본 논문에서는 특정 데이터에 대해서만 제안된 알고리즘의 적합성을 검증하였다. 추후 보다 다양한 벤치마킹 데이터들을 획득하여 제안된 알고리즘이 다양한 조건에서도 적합하여 일반화된 알고리즘으로의 적합성 여부를 검증할 예정이다.

## REFERENCES

- [1] C. Guéret, X. Prins, and M. Sevaux, "Applications of Optimization with Xpress-MP: 12.1 Network Reliability," Dash Optimization Ltd., pp. 173-176, Feb. 2005.
- [2] M. Edvall, "Publicity Campaign," Tomlab Optimization Inc, [http://tomsym.com/examples/tomsym\\_networkreliability.html](http://tomsym.com/examples/tomsym_networkreliability.html), Apr. 2009.
- [3] DTAQ, "Dictionary of Defense Scientific and Technical Terms," Defense Agency for Technology and Quality, 2011.
- [4] D. Beasley, D. R. Bull, and R. R. Martin, "An Overview of Genetic Algorithms: Part I. Fundamentals," University Computing, Vol. 15, No. 2, pp. 58-69, Oct. 1993.
- [5] C. H. M. Lin and H. M. Salkin, "An Efficient Algorithm for the Complete Set Partitioning Problem," Discrete Applied Mathematics, Vol. 6, No. 2, pp. 149-156, Jul. 1983.
- [6] P. C. Chu and J. E. Beasley, "A Genetic Algorithm for the Set Partitioning Problem," The Management School; Imperial College, Technical Report, pp. 1-16, Oct. 1996.
- [7] M. R. Garey and D. S. Johnson, "Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness," W. H. Freeman & Co., San Francisco, 1979.
- [8] D. Alevras and M. W. Padberg, "Linear Optimization and Extensions," Universitext, Springer-Verlag, 2001.
- [9] M. Diaby, "Linear Programming Formulation of the Set Partitioning Problem," International Journal of Operational Research, Vol. 8, No. 4, pp. 399-427, Jul. 2010.
- [10] B. Lazović, M. Marić, V. Filipović, and A. Savić, "An Integer Linear Programming Formulation and Genetic Algorithm for the Maximum Set Splitting Problem," Publications de L'institut Mathematique, Vol. 92, No. 106, pp. 25-34, Nov. 2012.

## Authors



Sang Un Lee received the B. Sc. degree in avionics from the Korea Aerospace University in 1997. He received the M. Sc. and Ph. D. degrees in Computer Science from Gyeongsang National University, Korea, in 1997 and 2001, respectively.

He is currently Professor with the Department of Multimedia Science, Gangneung-Wonju National University, Korea. He is interested in software quality assurance and reliability modeling, software engineering, software project management, neural networks, and algorithm.