

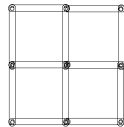
## 직사각형 틀 구조물의 견고성 파악하기

이 재 운 (영남대학교)  
권 영 수 (영남대학교)  
최 근 배 (제주대학교)<sup>†</sup>

이 논문은 행과 열이 작은 정사각형으로 이루어진 직사각형 틀 구조물의 견고성에 대하여 다룬다. 수학적화 (mathematising)의 관점에서 각의 변화를 이용하여 구조물의 견고성 여부를 결정하는 새로운 증명법을 제시하고 이를 활용하여 구조물의 견고성을 판단하는 한 알고리즘을 제안한다.

### I. 서론

영재 학생들의 공간감각 (spatial sense) 능력을 알아보기 위해서, 나무막대와 연결 핀으로 구성된 [그림 1-1] 과 같이 힘에 의해서 비틀릴 수 있는 틀 구조물이 튼튼하기 위한 최소의 대각선 지지대의 개수를 묻는 문제를 제시해보았다(제주대학교 과학영재교육원 2006학년도 입시 문항). 이 문항의 정답은 3개이지만 90% 이상의 학생이 2개로 답하였다([그림 1-3] 참조). 실제로, 평행사변형의 성질을 사용하면 대각선 지지대가 두 개인 경우의 비틀린 모양을 쉽게 그릴 수 있지만 그 그림을 그릴 수 있는 학생이 거의 없었으며 심지어 영재 프로그램을 담당하는 교사도 어려워하였다. 이에 따라 공간감각 기르기와 수학적화 (mathematising; Freudenthal, 남승인 외, 2012, p.123)의 경험을 주기 위한 학습의 일환으로 이와 같은 직사각형 틀 구조물을 소재로 한 영재 프로그램을 2003학년도부터 현재까지 수학만 심화-사사과정 프로그램으로 구성하여 사용하고 있다.



[그림 1-1] 간단한 직사각형 틀 구조물

이러한 영재프로그램에 모티브를 준 실제적인 현실에서의 문제를 소개하면 다음과 같다. 핀-조인트 (pin-joint) 로 연결되는 빔 (beam) 으로 구성된 여러 개의 작은 직사각형들을 연결한 직사각형 형태의 틀 구조물은 하중에 의해서 그 형태가 변형될 가능성이 많다. 따라서 구조물을 견고한 형태로 유지하기 위해서 지지대가 필요하고, 그 구조상 [그림 1-2]와 같이 대각선 지지대 (버팀목)가 유용하게 사용될 수 있다.

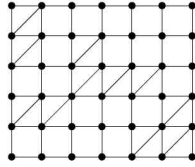
\* 접수일(2015년 12월 4일), 심사(수정)일(1차: 2016년 2월 4일, 2차: 2016년 5월 12일), 게재 확정일(2016년 5월 13일)

\* ZDM 분류 : K35, N85

\* MSC2000 분류 : 97U70

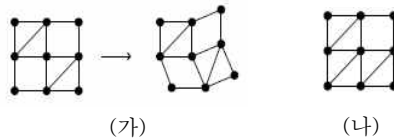
\* 주제어 : 수학적화, 직사각형 틀 구조물, 이분그래프, 행렬, 생성수형도

<sup>†</sup> 교신저자 : kbchoe@jejunu.ac.kr



[그림 1-2] 직사각형 틀 구조물

간단한 예를 들어보면 [그림 1-3]에서 (가)와 같이 지지대를 설치하면 비틀릴 수 있고, (나)와 같이 지지대를 설치하면 비틀리지 않게 된다.

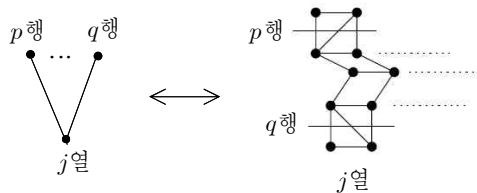


[그림 1-3] 간단한 직사각형 틀 구조의 견고성

그러면 이를 일반화하여 각 행이  $m$ 개의 작은 정사각형으로 이루어져 있고, 각 열이  $n$ 개의 작은 정사각형으로 이루어진 직사각형 모양의 구조물 R에 대하여 다음과 같은 문제들을 생각할 수 있다.

- 문제 1 몇 개의 지지대가 설치되어 있을 때, 구조물 R의 비틀림 여부를 파악할 수 있는가?
- 문제 2 직사각형 모양의 구조물 R이 비틀리지 않도록 지지대를 설치하려고 할 때, 필요한 지지대의 개수의 최솟값은?
- 문제 3 최소개수의 지지대로 구조물 R이 비틀리지 않도록 지지대를 설치하는 방법의 개수는?

위와 같은 문제에 대한 그래프를 이론을 사용한 해결책은 잘 알려져 있지만(Wilson & Watkins, 1990, p. 60) 증명이 명확하지 않다. Wilson & Watkins의 책에서의 증명은 틀 구조물에서 각각 행과 열로 구성된 두 집합 사이를 연결하는 이분그래프의 연결성을 이용하여 증명을 논의하고 있지만 실제로 이것은 [그림 1-4]와 같이 지엽적인 부분에서의 논의다. 이러한 지엽적인 논의가 글로벌한 논의(전체 행과 열에서의 논의)로 이행되려면 평행사변형의 특성 또한 염두에 두어야한다 (Laine, 2006).

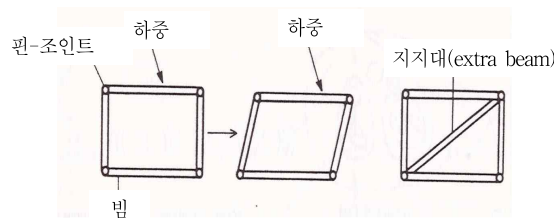


[그림 1-4] 직사각형 틀 구조물의  $j$ 열의 지엽적인 부분에서  $p$ 행의 지엽적인 부분과  $q$ 행의 지엽적인 부분은 서로 평행

본 논문에서는 영재학생 또는 영재담당 강사를 대상으로 한 수학화의 관점에서 위의 문제에 대한 선행연구에서 나타난 해결책과는 달리 각수열을 이용한 구체적인 증명을 제시하고 컴퓨터 프로그래밍의 관점에서 보다 유용할 수 있는 하나의 알고리즘을 제안하고자 한다.

## II. 직사각형 틀 구조물

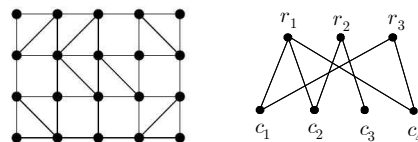
이 장에서의 내용들은 주로 Wilson & Watkins (1990)의 문헌을 참고하였음을 밝혀둔다. 많은 빌딩들은 거더 빔(girder beam)과 용접 또는 리벳 이음매의 직사각형 배열로 구성된 강철 틀 구조물(Rectangular Framework)에 의해서 유지된다. (초)고층 빌딩을 디자인하는 경우에 특히 그렇다. 그러나 많은 이유로 이러한 구조물은 빔들을 함께 결합할 때 경직된 용접보다 핀-조인트를 가지는 평면 구조로 다루어진다. 가장 단순한 형태는 4개의 빔과 4개의 핀-조인트로 구성된 직사각형이다. 이러한 구조는 [그림 II-1]와 같이 충분히 강한 하중에 의해서 평행사변형으로 형태가 변형될 수 있어, 근본적으로 불안정하다. 따라서 안정성의 확보가 필요하며, 이것은 장력이나 압축 모두에 견딜 수 있는 하나의 다른 대각선 빔을 설치함으로써 가능하다.



[그림 II-1] 직사각형 틀(Wilson & Watkins, 1990, p. 60)

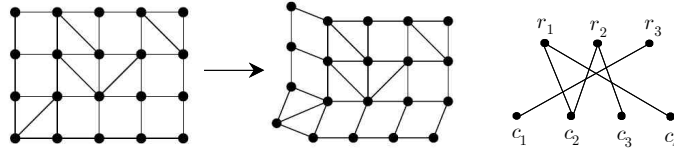
모든 직사각형에 지지대를 설치하면 견고성을 확보할 수는 있으나 큰 구조물인 경우에는 비용이 많이 든다. 실제로, 일부의 직사각형에 지지대를 설치하여 견고성을 확보할 수 있다. 그러면 견고성을 확보하기 위한 가장 경제적인 방법이 무엇인가에 대한 자연스러운 질문을 던질 수 있다. 이를 위하여서는 견고성이 확보 되도록 지지대를 설치하는 모든 방법과 그 가운데 비용이 가장 적게 드는 것이 무엇인지를 알아야 한다. 즉, 구조물의 붕괴를 막기 위해서 요구되는 지지대의 최소수를 결정하는 방법과 지지대의 적절한 배열을 얻는 방법을 알아야 한다. 이를 위하여 구조물의 각 열을  $r_1, r_2, \dots, r_m$  이라 이름 붙이고 각 행을  $c_1, c_2, \dots, c_n$  이라 이름 붙인다. 그리고 꼭짓점 집합이  $\{r_1, r_2, \dots, r_m\} \cup \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  이고  $i$ -번째행과  $j$ -번째열 사이에 지지대가 설치된 경우에  $r_i$ 와  $c_j$  사이를 변으로 연결한 이분그래프를 생각하자.

[그림 II-2] 은 견고한 구조물인데, 이에 대응되는 이분그래프(connected bipartite graph)는 연결그래프이다.



[그림 II-2] 견고한 구조물과 연결이분그래프

한편, [그림 II-3]은 견고하지 못한 구조물인데, 이에 대응되는 이분그래프는 연결그래프가 아니다.



[그림 II-3] 견고하지 못한 구조물

실제로, 직사각형 틀 구조물이 견고할 필요충분조건은 이에 대응되는 그래프가 연결이분그래프가 되는 것이다. 이에 대한 증명의 기본아이디어는 평행사변형 변형의 특징(마주보는 대변의 평행성)과 이분그래프의 연결성의 관계를 이용하는 것이다(Bolker & Crapo, 1997; Servatius, 1995; Graver, 2001; Laine, 2006).

### III. 각수열을 이용한 증명

2장에서 언급한 평행사변형의 변형의 특징(마주보는 대변의 평행성)을 이용한 구조물의 견고성에 대한 증명법은 평행사변형의 특징 및 변형에 대한 감각적인 이해를 요구하고 있기 때문에, 학교 학생의 입장에서 구제성이 부족하다. 따라서 이 장에서는 증명의 명확성(학생의 입장에서)을 주기위해서 보다 직접적으로 직사각형 틀 구조물의 변형에 따른 각의 변화를 고찰하는 증명법을 찾는다.

이를 위해서, 먼저 (비틀린) 구조물에 ‘무게를 가진 완전이분그래프’를 대응시키고자 한다. 각 행이  $m$ 개의 작은 정사각형으로 이루어져 있고, 각 열이  $n$ 개의 작은 정사각형으로 이루어진 직사각형 모양의 구조물  $R_{m,n}$ 이 비틀려서 구조물  $S$ 가 되었다고 하자. 그러면  $R_{m,n}$ 에서 작은 정사각형들은  $S$ 에서 마름모로 바뀌었음을 알 수 있다.

임의의  $i, j (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ 에 대하여,  $R_{m,n}$ 에서  $i$ 행,  $j$ 열에 있던 정사각형이 바뀐  $S$ 에서의 마름모를  $S(i,j)$ 라 하고,  $S(i,j)$ 의 좌측 상단부의 각을  $\theta_{i,j}$ 라 하자. 참고로  $\theta_{i,j}$ 는  $0^\circ$  보다 크고  $180^\circ$  보다 작다. 꼭짓점 집합이  $\{r_1, \dots, r_m\} \cup \{c_1, \dots, c_n\}$ 인 완전이분그래프로서 임의의  $i, j (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ 에 대하여,  $r_i$ 와  $c_j$ 를 잇는 변에 걸린 무게가  $\theta_{i,j}$ 인 무게그래프를  $K_{m,n}^\theta(S)$ 라고 정의하자. 그리고 모든 각의 수열

$$\theta_{1,1}, \theta_{1,2}, \dots, \theta_{1,n}; \theta_{2,1}, \dots, \theta_{2,n}; \theta_{3,1}, \dots, \theta_{m-1,n}; \theta_{m,1}, \dots, \theta_{m,n}$$

을  $A(S)$ 라 하자. 참고로  $A(R_{m,n}) = 90, 90, \dots, 90; \dots; 90, 90, \dots, 90$ 이다. 구조물  $R_{m,n}$ 이 비틀려서 만들어진 구조물의 각들의 수열이 될 수 있는 각수열의 집합을  $\Omega(m,n)$ 이라 하자.

**보조정리 1.**  $\Omega(m,n)$ 에 속한 각수열  $\theta_{1,1}, \theta_{1,2}, \dots, \theta_{1,n}; \theta_{2,1}, \dots, \theta_{2,n}; \theta_{3,1}, \dots, \theta_{m-1,n}; \theta_{m,1}, \dots, \theta_{m,n}$  과 임의의  $i, j (1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq n-1)$ 에 대하여,  $\theta_{i,j} + \theta_{i+1,j+1} = \theta_{i,j+1} + \theta_{i+1,j}$ 를 만족시킨다.

**증명** 네 개의 마름모  $S(i,j), S(i,j+1), S(i+1,j), S(i+1,j+1)$ 이 한 점에서 만나고, 이 점을 포함하는 네 개의 선분으로 만들어지는 각의 크기의 합은  $360^\circ$ 이다. 즉

$$\theta_{i,j} + (180^\circ - \theta_{i,j+1}) + (180^\circ - \theta_{i+1,j}) + \theta_{i+1,j+1} = 360^\circ$$

이다. 따라서  $\theta_{i,j} + \theta_{i+1,j+1} = \theta_{i,j+1} + \theta_{i+1,j}$  를 만족시킨다.

**보조정리 2.**  $\Omega(m,n)$ 에 속한 각수열  $\theta_{1,1}, \theta_{1,2}, \dots, \theta_{1,n}; \theta_{2,1}, \dots, \theta_{2,n}; \theta_{3,1}, \dots, \theta_{m-1,n}; \theta_{m,1}, \dots, \theta_{m,n}$  과 임의의  $i_1, i_2, j_1, j_2$  ( $1 \leq i_1 < i_2 \leq m, 1 \leq j_1 < j_2 \leq n$ )에 대하여,  $\theta_{i_1,j_1} + \theta_{i_2,j_2} = \theta_{i_1,j_2} + \theta_{i_2,j_1}$  을 만족시킨다.

**증명** 먼저, 보조정리 1에 의해서 다음 두 식을 얻는다.

$$\theta_{i_1,j_1} + \theta_{i_1+1,j_1+1} = \theta_{i_1,j_1+1} + \theta_{i_1+1,j_1}, \quad \theta_{i_1,j_1+1} + \theta_{i_1+1,j_1+2} = \theta_{i_1,j_1+2} + \theta_{i_1+1,j_1+1}.$$

이 두 식으로부터

$$\theta_{i_1,j_1+1} + \theta_{i_1+1,j_1+2} - (\theta_{i_1,j_1+1} + \theta_{i_1+1,j_1}) = \theta_{i_1,j_1+2} + \theta_{i_1+1,j_1+1} - (\theta_{i_1,j_1} + \theta_{i_1+1,j_1+1})$$

를 얻고, 이를 정리하면  $\theta_{i_1,j_1} + \theta_{i_1+1,j_1+2} = \theta_{i_1,j_1+2} + \theta_{i_1+1,j_1}$  을 얻는다. 다시, 보조정리 1에 의해,  $\theta_{i_1,j_1+2} + \theta_{i_1+1,j_1+3} = \theta_{i_1,j_1+3} + \theta_{i_1+1,j_1+2}$  을 얻는다. 따라서

$$\theta_{i_1,j_1+2} + \theta_{i_1+1,j_1+3} - (\theta_{i_1,j_1+2} + \theta_{i_1+1,j_1}) = \theta_{i_1,j_1+3} + \theta_{i_1+1,j_1+2} - (\theta_{i_1,j_1} + \theta_{i_1+1,j_1+2})$$

이고  $\theta_{i_1,j_1} + \theta_{i_1+1,j_1+3} = \theta_{i_1,j_1+3} + \theta_{i_1+1,j_1}$  을 얻는다. 위와 같은 과정을 반복하면  $\theta_{i_1,j_1} + \theta_{i_1+1,j_2} = \theta_{i_1,j_2} + \theta_{i_1+1,j_1}$  이 성립함을 알 수 있다.

한편, 같은 이유로  $\theta_{i_1+1,j_1} + \theta_{i_1+2,j_2} = \theta_{i_1+1,j_2} + \theta_{i_1+2,j_1}$  가 성립하므로

$$\theta_{i_1+1,j_1} + \theta_{i_1+2,j_2} - (\theta_{i_1,j_2} + \theta_{i_1+1,j_1}) = \theta_{i_1+1,j_2} + \theta_{i_1+2,j_1} - (\theta_{i_1,j_1} + \theta_{i_1+1,j_2})$$

를 얻고, 이를 정리하면  $\theta_{i_1,j_1} + \theta_{i_1+2,j_2} = \theta_{i_1,j_2} + \theta_{i_1+2,j_1}$  을 얻는다. 위와 같은 과정을 반복하면  $\theta_{i_1,j_1} + \theta_{i_2,j_2} = \theta_{i_1,j_2} + \theta_{i_2,j_1}$  가 성립함을 알 수 있다.

평면상의 있는 한 점을 끝점으로 하는 네 개의 겹쳐지지 않는 선분들로 만들어지는 네 개의 각을 각각  $a, b, c, d$  라고 하자. 그러면  $a+b+c+d=360^\circ$ , 즉  $a+c=360^\circ - (b+d) = (180^\circ - b) + (180^\circ - d)$  를 만족시킨다. 이를 이용하면 다음을 쉽게 알 수 있다.

**보조정리 3.**  $0^\circ$  보다 크고  $180^\circ$  보다 작은 4개의 각들의 수열  $\theta_{1,1}, \theta_{1,2}; \theta_{2,1}, \theta_{2,2}$  가  $\Omega(2,2)$ 에 속할 필요충분조건이  $\theta_{1,1} + \theta_{2,2} = \theta_{1,2} + \theta_{2,1}$  을 만족시키는 것이다.

**정리 4.**  $0^\circ$  보다 크고  $180^\circ$  보다 작은  $mn$  ( $m, n \geq 2$ ) 개의 각의 수열

$$\theta_{1,1}, \theta_{1,2}, \dots, \theta_{1,n}; \theta_{2,1}, \dots, \theta_{2,n}; \theta_{3,1}, \dots, \theta_{m-1,n}; \theta_{m,1}, \dots, \theta_{m,n}$$

이  $\Omega(m, n)$ 에 속할 필요충분조건은 임의의  $i_1, i_2, j_1, j_2$  ( $1 \leq i_1 < i_2 \leq m, 1 \leq j_1 < j_2 \leq n$ )에 대하여,  $\theta_{i_1, j_1} + \theta_{i_2, j_2} = \theta_{i_1, j_2} + \theta_{i_2, j_1}$ 을 만족시키는 것이다.

**증명**  $\Omega(m, n)$ 에 속한 각수열  $\theta_{1,1}, \theta_{1,2}, \dots, \theta_{1,n}; \theta_{2,1}, \dots, \theta_{2,n}; \theta_{3,1}, \dots, \theta_{m-1,n}; \theta_{m,1}, \dots, \theta_{m,n}$ 이 임의의  $i_1, i_2, j_1, j_2$  ( $1 \leq i_1 < i_2 \leq m, 1 \leq j_1 < j_2 \leq n$ )에 대하여,  $\theta_{i_1, j_1} + \theta_{i_2, j_2} = \theta_{i_1, j_2} + \theta_{i_2, j_1}$ 을 만족시킴을 보조정리 2에서 이미 증명하였다. 그 역도 성립함을  $m$ 에 대한 수학적 귀납법으로 증명을 하고자 한다.

먼저  $m=2$ 라고 하자. 직사각형의 구조물  $R_{1,n}$ 을 비틀어서 만든 구조물로서 해당되는 구조물의 각수열이  $\theta_{1,1}, \theta_{1,2}, \dots, \theta_{1,n}$ 인 구조물이 존재함을 쉽게 알 수 있다. 임의의  $j$  ( $j=1, \dots, n-1$ )에 대하여  $\theta_{1,j} + \theta_{2,j+1} = \theta_{1,j+1} + \theta_{2,j}$ 가 성립하므로 보조정리 3을 4개의 마름모  $S(1, j), S(1, j+1), S(2, j), S(2, j+1)$ 에 적용하면  $R_{2,n}$ 을 비틀어서 만든 구조물로서 해당되는 구조물의 각수열이  $\theta_{1,1}, \theta_{1,2}, \dots, \theta_{1,n}; \theta_{2,1}, \dots, \theta_{2,n}$ 인 구조물이 존재함을 쉽게 알 수 있다.

임의의  $m \leq k$  ( $k \geq 2$ )에 대하여 주어진 정리가 성립한다고 가정하고,  $m=k+1$ 이라고 하자. 귀납적 가정에 의해 직사각형의 구조물  $R_{k,n}$ 을 비틀어서 만든 구조물의 각수열이  $\theta_{1,1}, \theta_{1,2}, \dots, \theta_{1,n}; \theta_{2,1}, \dots, \theta_{2,n}; \theta_{3,1}, \dots, \theta_{k-1,n}; \theta_{k,1}, \dots, \theta_{k,n}$ 인 구조물  $S_1$ 이 존재하고 직사각형의 구조물  $R_{2,n}$ 을 비틀어서 만든 구조물  $S_2$ 의 각수열이  $\theta_{k,1}, \theta_{k,2}, \dots, \theta_{k,n}; \theta_{k+1,1}, \theta_{k+1,2}, \dots, \theta_{k+1,n}$ 인 구조물  $S_2$ 가 존재한다. 여기서  $S_1$ 의  $k$ 번째 열과  $S_2$ 의 첫 번째 열이 정확히 겹친 구조물을 생각하면  $R_{k+1,n}$ 을 비틀어서 만든 구조물의 각수열이

$$\theta_{1,1}, \theta_{1,2}, \dots, \theta_{1,n}; \theta_{2,1}, \dots, \theta_{2,n}; \theta_{3,1}, \dots, \theta_{k,n}; \theta_{k+1,1}, \dots, \theta_{k+1,n}$$

인 구조물이 존재함을 알 수 있다.

**발립정리 5.** 모든 변의 무게가  $0^\circ$ 보다 크고  $180^\circ$ 보다 작은 완전이분그래프  $K_{m,n}$ 이 직사각형 구조물  $R_{m,n}$ 을 비틀어서 만든 어떤 구조물  $S$ 로부터 만든  $K_{m,n}(S)$ 가 될 수 있을 필요충분조건은  $K_{m,n}$ 에 속한 길이가 4인 임의의 회로  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_1$ 에 대하여 변  $v_1v_2$ 과  $v_3v_4$ 의 무게의 합과 변  $v_2v_3$ 과  $v_4v_1$ 의 무게의 합이 같은 것이다.

**증명** 꼭짓점집합이  $\{r_1, \dots, r_m\} \cup \{c_1, \dots, c_n\}$ 인  $K_{m,n}(S)$ 과 임의의  $i, j$  ( $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ )에 대하여, 변  $r_i c_j$ 의 무게가  $\theta_{i,j}$ 이다. 따라서 정리 4에 의해, 길이가 4인 임의의 회로  $r_i, c_{j_1}, r_{i_2}, c_{j_2}, r_i$ 에 대하여 변  $r_i c_{j_1}$ 과  $r_{i_2} c_{j_2}$ 의 무게의 합과 변  $r_{i_1} c_{j_2}$ 과  $r_i c_{j_1}$ 의 무게의 합이 같다.

역으로  $K_{m,n}$ 에 속한 길이가 4인 임의의 회로  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_1$ 에 대하여 변  $v_1v_2$ 과  $v_3v_4$ 의 무게의 합과 변  $v_2v_3$ 과  $v_4v_1$ 의 무게의 합이 같다고 하자. 각 분할집합에 속한 꼭짓점들을 각각  $r_1, \dots, r_m$ 과  $c_1, \dots, c_n$ 이라 하자. 임의의  $i, j$  ( $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ )에 대하여, 변  $r_i c_j$ 의 무게를  $\theta_{i,j}$ 라 하자. 그러면 정리 4에 의해  $\theta_{1,1}, \theta_{1,2}, \dots, \theta_{1,n}; \theta_{2,1}, \dots, \theta_{2,n}; \theta_{3,1}, \dots, \theta_{m-1,n}; \theta_{m,1}, \dots, \theta_{m,n}$ 이 직사각형 구조물  $R_{m,n}$ 을 비틀어서 만든 어떤 구조물의 각수열이 됨을 알 수 있다.

직사각형 구조물  $R_{m,n}$ 에서  $i$ 행,  $j$ 열에 있는 작은 정사각형에 지지대를 설치하면  $R_{m,n}$ 을 어떻게 비틀더라도  $i$

행,  $j$ 열에 있는 작은 정사각형은 정사각형 모양을 유지하게 된다. 즉  $\theta_{i,j}$ 는  $90^\circ$ 를 유지하게 된다. 직사각형 구조물  $R_{m,n}$ 에서 지지대를 설치한 경우, 지지대를 설치한 작은 정사각형에 대응되는  $K_{m,n}$ 의 변을 선택하는 것으로 하자. 즉  $i$ 행,  $j$ 열에 있는 작은 정사각형에 지지대를 설치한 경우, 변  $r_i c_j$ 를 선택하는 것으로 하자. 이러한 변들의 집합을  $F$ 라 하자. 그러면 다음 정리가 성립한다.

**정리 6.** 직사각형 구조물  $R_{m,n}$ 에 지지대를 설치한 작은 정사각형에 대응되는  $K_{m,n}$ 의 변들의 집합을  $F$ 라 하자.  $R_{m,n}$ 이 비틀리지 않을 필요충분조건은  $F$ 로 유도되는  $K_{m,n}$ 의 부분그래프가  $K_{m,n}$ 의 모든 꼭짓점들을 포함하는 연결그래프이다.

**증명**  $F$ 로 유도되는  $K_{m,n}$ 의 부분그래프를  $H$ 라 하자.  $H$ 가  $K_{m,n}$ 의 모든 꼭짓점들을 포함하는 연결그래프라고 가정하자.  $S$ 를  $R_{m,n}$ 을 비틀어서 만든 임의의 구조물이라고 하고  $\theta_{1,1}, \theta_{1,2}, \dots, \theta_{1,n}; \theta_{2,1}, \dots, \theta_{2,n}; \theta_{3,1}, \dots, \theta_{m-1,n}; \theta_{m,1}, \dots, \theta_{m,n}$ 을  $S$ 에 대응되는 각수열이라 하자. 이제  $S=R_{m,n}$ 임을 보이면, 즉 임의의  $i, j (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ 에 대하여  $\theta_{i,j} = 90^\circ$ 임을 보이면  $R_{m,n}$ 이 비틀어지지 않는다는 증명이 된다. 참고로  $H$ 에 속한 모든 변, 즉,  $F$ 에 속한 모든 변에 대응되는 작은 정사각형은  $S$ 에서도 정사각형모양을 유지한다.

임의의  $i, j (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ 에 대하여, 두 꼭짓점  $r_i$ 와  $c_j$ 를 연결하는 변이  $H$ 에 있으면  $R_{m,n}$ 에서  $i$ 행,  $j$ 열에 있는 작은 정사각형은  $S$ 에서도 정사각형이다. 두 꼭짓점  $r_i$ 와  $c_j$ 를 연결하는 변이  $H$ 에 없다고 가정하자.  $H$ 가 연결그래프이므로  $r_i$ 와  $c_j$ 를 연결하는 경로  $r_i, c_{j_1}, r_{i_1}, c_{j_2}, \dots, c_{j_k}, r_{i_k}, c_j$ 가  $H$ 에 존재한다.  $K_{m,n}$ 에서 길이가 4인 회로  $r_i, c_{j_1}, r_{i_1}, c_{j_2}, r_i$ 를 고려하자.  $\theta_{i,j_1} = \theta_{j_1, i_1} = \theta_{i_1, j_2} = 90^\circ$ 이므로, 딸림정리 5에 의해  $\theta_{i, j_2} = 90^\circ$ 이다. 이제 길이가 4인 회로  $r_i, c_{j_2}, r_{i_2}, c_{j_3}, r_i$ 를 고려하자.  $\theta_{i, j_2} = \theta_{j_2, i_2} = \theta_{i_2, j_3} = 90^\circ$ 이므로, 딸림정리 5에 의해  $\theta_{i, j_3} = 90^\circ$ 이다. 이와 같은 과정을 계속하면  $\theta_{i,j} = 90^\circ$ 임을 알 수 있다. 따라서  $S=R_{m,n}$ 이다.

$F$ 로 유도되는  $K_{m,n}$ 의 부분그래프가  $K_{m,n}$ 의 모든 꼭짓점들을 포함하지 않거나 연결그래프가 아니라고 하자. 어떤 경우든  $V(K_{m,n}) = U \cup W, U \cap W = \emptyset$ 이고  $U$ 와  $W$ 사이에는  $F$ 에 속한 변이 하나도 없는 공집합이 아닌  $U, W$ 가 존재한다.

경우 1.  $U$  또는  $W$ 가  $K_{m,n}$ 의 한 개의 분할집합에 포함된 경우

편의상  $U$ 가  $K_{m,n}$ 의 한 개의 분할집합에 포함되었다고 가정하자.  $U$ 에 속한 꼭짓점과  $W$ 에 속한 꼭짓점들을 연결하는 모든 변들에 무게  $c (0 < c < 180, c \neq 90, c$ 는 상수)를 주고, 나머지 변들의 무게를  $90$ 으로 주면 딸림정리 5의 조건을 만족시킨다. 즉  $R_{m,n}$ 이 비틀어질 수 있다.

경우 2  $U$ 와  $W$  모두 한 개의 분할집합에 포함되지 않은 경우

$U = U_1 \cup U_2, W = W_1 \cup W_2$ 이고  $U_1 \cup W_1, U_2 \cup W_2$ 가 각각  $K_{m,n}$ 의 분할집합이라고 하자. 이 경우,  $90$ 이 아니고  $0$ 보다 크고  $180$ 보다 작은 임의의 상수  $c$ 에 대하여  $U_1$ 과  $W_2$ 에 속한 꼭짓점들 사이의 변에는 무게  $c$ 를  $U_2$ 과  $W_1$ 에 속한 꼭짓점들 사이의 변에는 무게  $180 - c$ 를 주고 나머지 변들에는 무게  $90$ 을 주면 딸림정리 5의 조건을 만족시킴을 알 수 있다. 따라서  $R_{m,n}$ 이 비틀어질 수 있다.

정리 6은 서두에 제시한 문제 1에 대한 질문에 답을 하게 된다. 즉 지지대를 설치한 작은 정사각형들에 대응되는  $K_{m,n}$ 의 변들로 유도되는  $K_{m,n}$ 의 부분그래프가  $K_{m,n}$ 의 모든 꼭짓점들을 포함하는 연결그래프가 되면  $R_{m,n}$ 은 비틀어지지 않고, 그렇지 않으면  $R_{m,n}$ 이 비틀어질 수 있다. 정리 6을 좀 더 생각해 보면 문제 2에 대한 답도 얻을 수 있다. 문제 2는 다음과 같이 바꿀 수 있다.  $K_{m,n}$ 의 모든 꼭짓점들을 포함하는 연결그래프를 유도

하는 변들의 개수의 최솟값은 얼마인가? 꼭짓점의 개수가  $m+n$ 개이므로  $K_{m,n}$ 의 모든 꼭짓점을 포함하는 연결부분그래프는  $m+n-1$  개 이상의 변을 포함한다. 정확히  $m+n-1$  개의 변을 포함하고  $K_{m,n}$ 의 모든 꼭짓점을 포함하는 연결부분그래프는  $K_{m,n}$ 의 생성수형도가 됨을 알 수 있다. 따라서 직사각형 모양의 구조물이 비틀리지 않도록 지지대를 설치할 때, 필요한 지지대 개수의 최솟값은  $m+n-1$  개이고,  $m+n-1$  개의 지지대를 설치하여  $R_{m,n}$ 이 비틀어지지 않게 하기 위해서는  $K_{m,n}$ 의 생성수형도에 속한 변들에 대응되는 정사각형에 지지대를 설치하면 된다. 이를 요약하면 다음과 같다.

**정리 7** 직사각형 모양의 구조물  $R_{m,n}$ 이 비틀리지 않도록 지지대를 설치할 때, 필요한 지지대 개수의 최솟값은  $m+n-1$  개다. 아울러  $m+n-1$ 개의 지지대를 설치하여  $R_{m,n}$ 이 비틀어지지 않게 하기 위한 필요충분조건은  $K_{m,n}$ 의 생성수형도에 속한 변들에 대응되는 정사각형에 지지대를 설치하는 것이다.

참고로 완전이분그래프  $K_{m,n}$ 의 생성수형도의 개수는  $m^{n-1}n^{m-1}$ 이다. 따라서 다음 팔립정리를 얻을 수 있다.

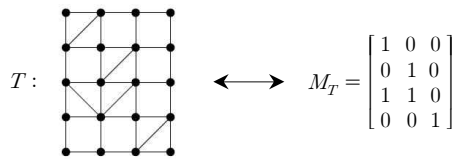
**팔립정리 8** 최소 개수  $m+n-1$ 의 지지대로  $R_{m,n}$ 이 비틀리지 않도록 지지대를 설치하는 방법의 개수는  $m^{n-1}n^{m-1}$ 이다.

#### IV. 알고리즘

주어진 행의 수가  $m$ 이고 열의 수가  $n$ 인 직사각형 구조물(이하  $m \times n$  직사각형 구조물)  $T$ 에 지지대가 있으면 1의 값을 없으면 0의 값을 가지는  $m \times n$ 행렬  $M_T$ 를 만들자. 즉,

$$M_T = [a_{ij}]_{m \times n}, \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & T \text{에서 } i\text{행 } j\text{열에 지지대가 있는 경우} \\ 0 & T \text{에서 } i\text{행 } j\text{열에 지지대가 없는 경우} \end{cases}$$

편의상, 행렬  $M_T$ 를 직사각형 구조물  $T$ 에 대응되는 **직사각형 구조물 행렬**이라고 부르자 ([그림 IV-1] 참조).



[그림 IV-1] 직사각형 구조물과 행렬

**정의.** 직사각형 구조물  $T$ 에 대응되는 행렬  $M_T$ 의 두 열 벡터  $c_k$ 와  $c_l$ 에 대해서,

$$c_k \cdot c_{j_1} \neq 0, c_{j_1} \cdot c_{j_2} \neq 0, \dots, c_{j_w} \cdot c_l \neq 0$$

를 만족하는  $M_T$ 의 열벡터들의 열  $c_{j_1}, c_{j_2}, \dots, c_{j_w}$ 이 존재할 때  $c_k$ 와  $c_l$ 는  $c$ -**연결가능**이라고 부른다. 여기서  $\cdot$ 은



내적(inner product)을 의미한다.<sup>1)</sup> 예를 들어, 다음의 행렬  $M$ 에서

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$c_1 \cdot c_2 \neq 0, c_2 \cdot c_4 \neq 0$ 이기 때문에,  $c_1$ 과  $c_4$ 는  $c$ -연결가능이다.  $c_3$ 는 다른 어느 열과도 연결가능이 아니다. 실제로, 행렬  $M$ 에서 열들의  $c$ -연결성분은 두 개  $\{c_1, c_2, c_4\}$ 와  $\{c_3\}$ 임을 알 수 있다.

**보조정리 9.**  $M_T = [a_{ij}]_{m \times n} = [c_1 c_2 \cdots c_n]$ 을 직사각형 구조물  $T$ 에 대응되는 행렬이라고 하자.  $c_k \cdot c_l \neq 0$ 일 필요충분조건은  $T$ 에 대응되는 이분그래프  $G_T$ 에서 꼭짓점  $r_i (1 \leq i \leq m)$ 가 존재하여  $r_i$ 와  $c_k, r_i$ 와  $c_l$ 이 변으로 연결되어 있는 것이다.

**증명.** 정의에 의해서 당연하다.

**정리 10.**  $T$ 가 견고한 구조물일 필요충분조건은 행렬  $M_T = [a_{ij}]_{m \times n}$ 가 다음 두 조건을 만족하는 것이다.

- (1) 성분이 모두 0인 행이 없다.
- (2) 모든 열들이  $c$ -연결가능이다.

**증명.** 편의상  $T$ 에 대응되는 이분그래프를  $G_T$ 라 하자. 먼저,  $T$ 가 견고한 구조물이면, 당연히 (1)을 만족하고,  $G_T$ 는 연결그래프이다. 이제  $G_T$ 가 연결이분그래프이기 때문에, 임의의  $c_w$ 와  $c_z$ 에 대해서  $G_T$ 에서  $c_w$ 와  $c_z$ 을 연결하는 경로  $c_w r_{i_1} c_{j_1} \cdots c_{j_k} r_{i_{k+1}} c_z$ 이 존재한다. 보조정리 9에 의해서  $c_w \cdot c_{j_1} \neq 0, c_{j_1} \cdot c_{j_2} \neq 0, \dots, c_{j_k} \cdot c_z \neq 0$ 이고 따라서  $c_w$ 와  $c_z$ 는  $c$ -연결가능이며 (2)가 성립한다.

역으로  $M_T = [a_{ij}]_{m \times n}$ 가 (1)과 (2) 만족한다고 하자.  $M_T$ 의 임의의 두 열  $c_w$ 와  $c_z$ 가  $c$ -연결가능이면  $c_w \cdot c_{j_1} \neq 0, c_{j_1} \cdot c_{j_2} \neq 0, \dots, c_{j_k} \cdot c_z \neq 0$ 를 만족하는 열  $c_{j_1}, c_{j_2}, \dots, c_{j_k}$ 가 존재한다. 따라서 보조정리 9에 의해서 두 열  $c_w$ 와  $c_z$ 는  $G_T$ 에서 연결가능이다. 한편, 조건 (1)에 의해서  $G_T$ 에서 임의의  $r_i$ 는 적당한  $c_j$ 와 연결되어 있다. 따라서  $G_T$ 는 연결그래프가 되고,  $T$ 는 견고한 구조물이다.

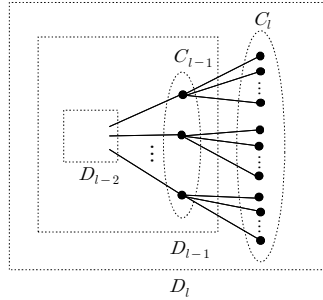
이제 앞선 장의 정리들을 이용하여 직사각형 틀 구조물  $T$ 의 견고성 여부를 판단할 수 있는 알고리즘을 만들어 보자.  $M_T = [a_{ij}]_{m \times n} = [c_1 c_2 \cdots c_n]$ 을 직사각형 틀 구조물  $T$ 에 대응되는 행렬이라 하자.

**단계 1.**  $s = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij}$ 를 계산하라. 만일  $s < m+n-1$ 이면,  $T$ 는 견고한 구조물이 아니다 (STOP). 만일  $s \geq m+n-1$ 이면, 단계 2로 간다.

1) 교육과정에서 행렬과 벡터의 개념이 도입되지 않을 때, 수학용어의 설명의 관점에서 서술하면 된다. 예를 들어 행렬은 '직사각형 틀 구조물의 상태를 나타내는 직사각형 배열', 벡터는 '유클리드 공간의 좌표'의 관점으로 보고 내적은 '두 좌표에서 같은 위치에 있는 성분들의 곱들의 합'

**단계 2.** 만일  $M_T$ 에서 성분이 모두 0인 행이 있으면,  $T$ 는 견고한 구조물이 아니다 (STOP). 만일 성분이 모두 0인 행이 없으면, 단계 3으로 간다.

**단계 3.** 어느 한 열  $c_j$ 를 선택하고,  $D_0 = \{c_j\} = C_0$ 라 하자. 임의의  $l=1, 2, \dots$ 에 대하여,  $C_l$ 은  $C_{l-1}$ 에 속한 어떤 원소와 직접적으로(directly)  $c$ -연결된(내적이 0이 아닌)  $\{c_1, c_2, \dots, c_n\} \setminus D_{l-1}$ 의 모든 열들의 집합이라 하고,  $D_l = D_{l-1} \cup C_l$ 이라 하자.

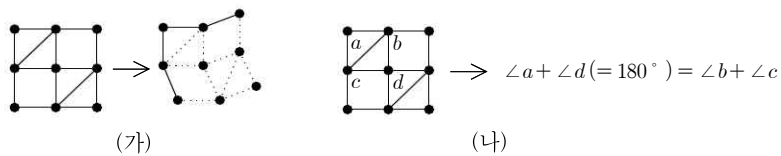


$C_k = \emptyset$ 이 되는 최소의  $k$ 를 찾아라.

- a)  $D_{k-1} = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ 이면  $T$ 는 견고한 구조물이다. (STOP).
- b)  $D_{k-1} \neq \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ 이면  $T$ 는 견고한 구조물이 아니다 (STOP).

### V. 결론 및 교육적 시사점

이 논문에서는 직사각형 틀 구조물의 견고성 문제와 관련된 ‘평행사변형 변형’을 이용한 기존의 증명법 (Bolker & Crapo, 1979, 그림 5, 그림 6과 그림 7; Laine, 2006, 그림 4.5와 그림 4.7) 대신 직사각형 틀 구조물의 변형에 따른 ‘각수열’을 이용한 새로운 증명법을 제공하고 있다(그림 V-1 참조). 이미 증명된 명제를 새로운 관점을 중심으로 증명해보는 수학적인 경험은 수학화의 과정을 중시하는 수학교육의 입장에서는 매우 중요한 것이다.

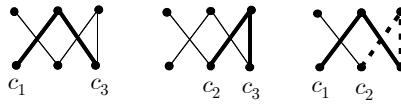


[그림 V-1] 평행사변형 변형과 각수열

한편, 세계는 지금 정보화 시대에 맞는 인재양성을 위한 다양한 노력을 하고 있다. 이러한 흐름에 편승하여 우리나라도 최근 소프트웨어 교육을 강화하는 내용을 발표하였다(최숙영, 2015). 알고리즘은 소프트웨어 교육 및 컴퓨터교육에서 중요한 역할을 한다. 기존에 잘 알려진 이산수학에서의 문제를 분석하고 컴퓨터 프로그래밍하기에 적절한 알고리즘을 만들어보는 경험은 컴퓨터교육에서 강조해야할 중요한 측면 중 하나이다. 이러한 관점에서 직사각형 틀 구조물의 견고성 문제와 관련된 ‘이분그래프의 연결성’을 간단히 ‘곱셈과 덧셈만으로 판단’할 수

있는 알고리즘을 고찰해 보았다. 이 논문에서 소개하고 있는 알고리즘은 다년간(2003년부터 현재까지)의 영재교육 프로그램을 운영하면서 학생 및 프로그램 강사들과 함께 도출되었고 점진적으로 수확화된 것이다. 구체적으로 이 알고리즘의 발견과정은 다음과 같다. 먼저, 영재 기초과정에서는 주로 직사각형의 틀 구조물에 이분그래프를 대응시키고 분류의 관점에서 구조물의 견고성과 연결성을 귀납적인 방법을 통해서 발견하도록 하였다. 그 후, 영재 심화 또는 사사과정에서 연역적 증명의 과정을 좀 더 활동적으로 조직화하기 위해서 학생들로 하여금 연결 이분그래프에서 다음과 같은 두 가지 사실을 발견하도록 하였다.

- (1) 임의의 행은 어느 한 열과 연결되어 있다.
- (2) 임의의 두 열이  $\wedge$ -연결 가능하다 ([그림 V-2] 참조).



[그림 V-2] 이분그래프의 연결성과  $\wedge$ -연결

끝으로 최근의 영재프로그램(제주대학교 영재교육원 2015학년도 프로그램)에서 이를 컴퓨터 프로그램화하기 용의하게 직사각형 틀 구조물에 대응되는 성분이 0과 1로 구성된 행렬에서의  $c$ -연결 문제로 환원하였다. 실제로, 위에서 (1)은 ‘성분이 모두 0인 행이 없다는 것’이고, (2)는 ‘임의의 두 열은  $c$ -연결가능성’을 의미한다.

### 참 고 문 헌

남승인 · 류성림 · 권성룡 · 김남균 · 신준식 · 박성선 · 박만구 · 최근배 · 권점례 (2012). 2009 개정교육과정에 의한 초등수학교육론, 서울: 경문사.

Nam, S. I., Ryu, S. R., Kwon, S. Y., Kim, N. G., Shin, J. S., Park, S. S., Park, M. G., Choi, K. B., & Gwon, J. R., (According to the 2009 revised curriculum) *Elementary Mathematics Education*, Seoul: Kyungmoon Press.

최숙영 (2015). 초중고에서의 소프트웨어 교육 강화에 따른 문제점과 그 해결방안, 한국컴퓨터교육학회 논문지, **18(3)**, 93-104.

Choi, S. Y. (2015). A Study of Problems and their Solving Strategies Consequent upon Software Education Reinforcement in Primary and Secondary Schools, *The Journal of Korean Association of Computer Education*, **18(3)**, 93-104.

Bolker, E. D. & Henry Crapo. (1997). Bracing Rectangular Frameworks. I, *SIAM J. Appl. Math.* **36(3)**, June, 473-490.

Graver, J. E. (2001). *Counting on frameworks: Mathematics to Aid the design of Rigid Structures*, the Mathematical Association of America, United States of America.

Laine, S. T. (2006). *The Grid Bracing Problem and a Generalization*, Master's Thesis of Worcester Polytechnic Institute, United States of America.

Servatius, Brigitte. (1995). Graphs, Digraphs, and the Rigidity of Grids, *The UMAP Journal*, **16**, 37-63.

Wilson, R. J. & Wakens, J. J. (1990). *Graphs: An introductory Approach*, John Wiley & Sons, Inc.

## A Study on the Bracing Rectangular Frameworks

**Ja Eun Lee**

Dept. of Mathematics, Yeungnam University, Kyongsan 712-749, Korea  
E-mail : julee@yu.ac.kr

**Young Soo Kwon**

Dept. of Mathematics, Yeungnam University, Kyongsan 712-749, Korea  
E-mail : ysookwon@yumail.ac.kr

**Keunbae Choi<sup>†</sup>**

Dept. of Math. Edu., Teachers College, Jeju National University, Jeju 690-781, Korea  
E-mail : kbchoe@jejunu.ac.kr

In this paper, we investigate the bracing rectangular frameworks problem and provide a new proof of this problem using the angle sequence according to deformed rectangular frameworks in a view of mathematising. And also we provide the algorithm to determine the rigidity of braced rectangular frameworks.

---

\* ZDM Classification : K35, N85

\* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U70

\* Key Words : mathematising, rectangular frameworks, bipartite graph, matrix, spanning tree

<sup>†</sup> Corresponding author