韓國數學教育學會誌 시리즈 E <數學教育 論文集>
http://dx.doi.org/10.7468/jksmee.2016.30.2.199
제 30집 제 2호, 2016. 5. 199-223

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 30, No. 2, May. 2016. 199-223

통합적 이해의 관점에서 중학교 학생들의 함수 개념 이해 분석[1)]

이 영 경 (금천중학교)
김 은 숙 (복대중학교)
이 하 우 (청주중학교)
조 완 영 (충북대학교)†

본 연구의 목적은 중학교 1, 2학년 학생들이 함수 개념을 통합적으로 이해하고 있는지를 알아보는데 있다. 함수 개념의 통합적 이해란 함수에 관한 다양한 상황과 표현을 함수의 정의와 유기적으로 연결하여 이해하는 것을 의미한다. 본 연구를 위하여 청주시에 소재한 A와 B 중학교 1, 2학년 학생 160명을 대상으로 선정하여 함수 개념의 통합적 이해 정도를 조사하였다. 통합적 이해의 관점에서 중학교 교과서와 다른 참고문헌을 참고하여 검사지를 개발한 후 현장 교사들과 전문가의 검토를 받아 수정·보완하였다. 연구 결과는 다음과 같다. 첫째, 함수 상황을 표와 식으로 번역하는 것보다 그래프로 번역하는 것을 어려워하였다. 둘째, 함수 여부의 판단에 대한 정답률은 학생들에게 익숙한 상황에서는 비교적 높았지만, 익숙하지 않은 상황에서는 낮게 나타났다. 셋째, 학년, 함수 상황에 따라 함수 판단에 대한 근거가 차이가 있다. 익숙한 상황에 대해서는 1학년은 정의, 2학년은 식의 관점으로 함수여부를 판단하려는 경향을 보였다. 또한 익숙하지 않은 상황에서는 정의와 식보다는 규칙성과 변화의 관점에서 함수를 판단하려는 경향이 나타났다. 넷째, 다양한 상황이나 표현을 일관되게 정의와 연결시킨 학생은 1학년이 12명(14.6%)이고 2학년은 한 명도 없었다. 즉 대부분의 학생들은 함수 개념을 통합적으로 이해하지 못한 것으로 나타났다.

Ⅰ. 서론

함수 개념은 실세계 현상의 변화를 해석하고 설명하는데 중요한 개념일 뿐만 아니라 거의 모든 수학의 영역에 산재해 있는 현대 수학의 기본 아이디어 중의 하나이고(Eisenberg, 1991), 수학의 여러 영역을 통합하기 위해서나 현실 세계의 상황을 이해하기 위해서나 중요한 영역으로(Klein, 1968), 학교수학에서도 함수 개념은 매우 강조되고 있으며 초등학교에서 고등학교에 이르기까지 함수와 관련된 내용이 매우 많은 편이다(우정호, 2003).

그러나 학교 수학에서 함수 개념을 중시하고 다양한 함수적 사고 활동을 강조함에도 불구하고, 학생들은 함수 개념을 매우 어려워한다. 학생들이 함수 개념을 어려워하는 이유 중의 하나는 함수 개념의 계층구조가 복잡하고 관련된 많은 하위 개념이 존재하기 때문이다. 기본적인 수준의 함수조차도 다양한 상황에서 접근될 수 있으며 어떤 방법을 취하느냐에 따라 어려움 또한 다양하다(Eisenberg, 1991).

학생들이 함수 개념을 어려워하는 또 다른 이유는 함수 개념의 구조가 복잡함에도 불구하고 단순히 과제를 계열화하는 관점에서 함수를 가르쳐 왔기 때문이다. 설명을 잘하고 개념의 다양한 측면을 잘 드러내는 구조화된

* 접수일(2016년 3월 30일), 심사(수정)일(2016년 4월 29일), 게재확정일(2016년 5월 9일)
* ZDM 분류 : D34
* MSC2000 분류 : 97D70
* 주제어 : 통합적 이해, 함수 개념
† 교신저자 : wycho@cbu.ac.kr
1) 이 논문은 2013학년도 충북대학교 학술연구지원사업의 연구비 지원에 의해 연구되었음

연습 문제를 풀게 하면 학생들은 그 개념을 이해하고, 내면화하며, 익힐 수 있을 것이라고 생각해 과제를 계열화하였으나 그것은 이론에 불과하다(Tall, 2003).

중학교에서는 종속성의 관점에서 함수를 정의하고 함수의 예와 아닌 것을 확인하는 활동을 한 후 관련된 용어와 기호를 도입한다. 이어서 함수의 그래프를 정의하고 실생활과 관련된 활용 문제를 다룬다. 이러한 학교 수학의 과제 계열화에 따른 형식주의 접근법은 어떤 개념이 한 상황에서 잘 이해되면 다른 상황으로 전이될 것이라는 예상과 달리 어떤 상황에서 함수 개념에 관한 아이디어를 잘 이해한 학생이 다른 상황에서는 그 아이디어를 어떻게 적용해야 할지 모르는 경우가 많아(Eisenberg, 1991), 중학교 1학년에서 함수를 정의하고 관련 용어와 기호학습을 하지만 학생들은 함수의 본질적인 면이 왜곡된 채 함수를 단순한 수식인 $y=f(x)$ 라는 독립된 공식으로써 이해하려는 경향이 있다(Vinner, 1983). 학생들이 함수 개념을 이해하기 위해서는 함수 개념과 관련된 현상을 다양한 표현으로 번역·해석할 수 있어야 하며, 그 안에서 함수의 본질을 찾을 수 있어야 한다.

복잡한 계층구조를 지닌 함수 개념을 단순히 과제를 계열화하여 함수를 가르치면 함수 개념의 칸막이 현상이 발생하게 된다. 이에 조완영(2012)은 통합적 이해를 제안했는데, 통합적 이해란 수학 개념을 이해할 때 맥락, 표현과 정의의 연결, 수학개념과 간단한 응용상황과의 연결을 포함하여 수학을 이해하는 것을 의미한다. 수학의 맥락과 본질을 함께 가르치면 수학의 유용성과 가치뿐만 아니라 수학 개념의 이해가 잘 되므로, 맥락 없이 수학의 본질을 정의하고 응용문제를 다루는 현 수학 교육 현실에서 통합적 이해의 관점에서의 접근이 필요하다.

본 연구의 목적은 통합적 이해의 관점에서 학생들이 함수 개념을 어떻게 이해하고 있는지를 분석하는데 있다. 이를 위해 일상생활을 소재로 한 정비례, 반비례 상황을 표, 식, 그래프로 표현하는지, 학생들에게 익숙하지 않은 상황을 포함한 다양한 상황을 표, 식, 그래프, 언어로 제시하여 함수인지 아닌지를 판단하고 그 이유를 어떻게 설명하는지를 분석하였다.

Ⅱ. 함수 개념의 통합적 이해

1. 함수 개념 이해에 관한 선행연구 분석

함수와 관련된 연구는 크게 함수개념 이해와 지도방법에 대한 연구와 표현 사이의 번역에 관한 연구로 구분할 수 있다. 먼저 함수개념 이해와 지도방법에 대한 연구를 정리하여 <표 Ⅱ-1>로 제시하였다.

<표 Ⅱ-1>에 나타난 연구 결과에 따르면 학생들의 함수 개념 이해에는 몇 가지 특징이 있다. 첫째, 일반적으로 학생들은 개념정의보다는 개념이미지에 의존하여 함수 개념을 이해하려는 경향이 강하다(<표 Ⅱ-1>의 모든 논문). 일반적으로 학생들은 함수 개념을 비례, 식, 규칙성 등과 동일시하려는 경향이 있으며(김명진, 2000; 양재식, 2003; 우미령, 2005; 이예란, 2012; 노영순, 2009), 함수의 그래프는 체계적이고 규칙적이어야 한다고 생각하기도 한다(김예진, 2009; 우미령, 2005). 둘째, 일반적으로 학생들은 함수 개념 특히 함수의 정의를 잘 이해하지 못하고 있다. 학생들은 자신들이 경험한 함수 상황의 예에서 형성된 개념이미지에 의존하는 경향이 있어 경험이 부족하거나 경험하지 못한 함수 상황을 함수로 생각하지 않는 경향이 있다(김명진, 2000; 김예진, 2009; 이예란, 2012). 함수를 정의로 이해하고 있는 비율이 중학교 2학년 학생보다 중학교 1학년 학생이 더 높게 나타난 것(장혜영, 2002)도 학생들의 학습경험과 관련이 있는 것으로 보인다. 이를 해결하기 위한 방법으로 교사들은 집합 개념을 토대로 대응의 관점에서 함수개념을 도입할 것을 희망하기도 하지만(노영순, 2009) 대응 관점에서 함수를 도입하면 여러 가지 변화 현상을 함수로 조직화하는 경험을 하기 어렵다는 문제를 야기할 수 있다. 또한 함수에 관한 다양한 예와 상황을 활용한 교과서를 만들어(김예진, 2009; 이예란, 2012) 학생들이 다양한 함수상황에 대한 경험을 풍부하게 할 필요가 있지만 이것만으로도 충분하지 않다. 셋째, 상수함수를 함수로 생각하지 않는 경

<표 II-2> 함수 표현 사이의 번역에 관한 연구

연구자 (년도)	연구 제목	연구결과	시사점/ 제언 사항
이승민 (2010)	중학교 1학년 학생들의 함수표현과 번역에서의 인식론적 장애 연구	- 함수 표현 사이의 번역 능력이 낮음 - 특히 그래프로의 번역 능력이 낮음: 정비례와 반비례, 종속변수와 독립변수, 규칙성 등의 영향	- 표현사이의 번역과정에 대한 다양한 경험이 요구됨
이나현 (2009)	중학교 2학년 학생들의 일차함수 그래프 과제 해결능력	- 경험하지 못한 그래프 과제 어려워함 - 비례관계, 함수, 일차함수 사이의 관계를 이해하지 못함 - 그래프 과제 해결시 독립변수와 종속변수에 대한 이해부족으로 어려워함	- 다양한 상황의 그래프를 제시할 필요가 있음
문혜선 (2015)	함수 상황과 그래프 사이의 번역활동에서 나타나는 고등학교 1학년 학생들의 특징 분석: 공변추론 중심으로	- 하수준 학생들은 정비례와 반비례의 의미를 이해하지 못해 그래프 표현을 어려워함 - 좌표축 설정을 어려워함:독립, 종속변수 혼동 - 개념이미지에 의존하여 그래프를 그리려고함	
김춘희 (2007)	그래프를 활용한 함수지도와 함수 개념 형성에 관한 연구	- 함수개념 도입시 번역활동이 도움이 됨 - 질적 그래프와 비선형 그래프 관찰 활동이 함수 정의 이해를 높임	
김다예 (2014)	2009 개정 중1 교과서 분석을 통한 함수의 그래프 지도의 문제점과 개선 방안	- 그래프 해석활동, 연속이 아닌 그래프, 실생활 그래프 활용 예 제시 - 함수의 그래프를 통해 함수 관계를 확인하는 활동 예 제시	

향이 있다(양재식, 2003; 우미란, 2009; 이예란, 2012). 이러한 현상은 함수를 정의보다 개념이미지에 의존하는 현상과 관련이 있다. 넷째, 중학생의 경우 학생의 수준에 따라 함수여부를 판단하는 문제에 대한 정답률은 차이가 있지만 판단 근거는 유사한 성향을 보이는 것(이예령, 2012)과 달리 상수준의 고등학생들은 정의에 의해 판단하려는 경향이 나타났다(김예진, 2009).

<표 Ⅱ-2>는 언어, 표, 식, 그래프 등 함수의 대표적인 표현 사이의 번역에 관한 연구를 정리한 것이다. 함수의 다양한 표현 사이의 번역활동에서 학생들은 특히 함수 상황을 그래프로 번역하는 것을 어려워하며, 그 이유로는 정비례와 반비례 등 이전의 학습경험, 독립변수와 종속변수 사이의 관계에 대한 이해 부족 등이 있는 것으로 나타났다(이승민, 2015; 이나현, 2009; 문혜선, 2015). 또한 함수의 표현 사이의 번역 활동, 특히 질적 그래프 또는 비선형 양적 그래프를 관찰하는 활동이 함수 개념을 이해하는데 도움이 되며(김춘희, 2007), 전형적인 그래프 외에 다양한 그래프를 그리거나 해석하는 활동, 이를 통해 함수관계를 확인하는 활동이 필요하다(김다예, 2014). 그러나 고등학교와 달리 중학교 수준에서 함수 개념을 가르칠 때 다양한 함수의 표현과 함수의 정의를 연결시키는 활동을 도입하는데 제약이 따른다. 표, 식, 그래프를 이용하여 2009 개정 수학과 교육과정 중학교 수준에서는 함수의 정의역을 다루지 않기 때문에 함수의 정의를 확인하는 활동은 가능하지만, 정의역에 따라 함수와 함수의 그래프가 다르게 나타날 수 있음을 다루기는 어렵다.

2. 중학교 함수 개념의 통합적 이해

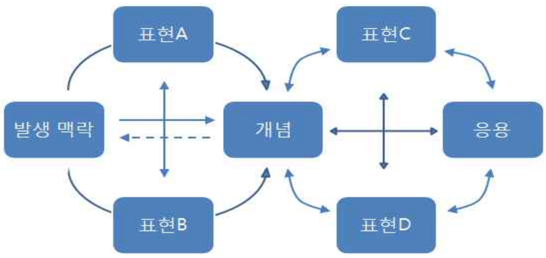
함수 개념을 이해했다는 말은 어떤 의미인가? 함수 개념 일반적으로 수학 개념을 이해한다고 말할 때, 이해

의 의미는 사람마다 다르다. 이종희(1999)에 따르면 이해 개념은 다면적이고 심리적 과정이 내재해 있어 그 본질을 파악하기 어렵고, 인식론에 따라 기본 입장이 달라 학자마다 이해를 다르게 정의하고 있다.

이해가 무엇인지를 다양하게 논의할 수 있지만, 본 논문에서는 교수·학습의 측면에서 이해의 의미를 조완영(2012)이 제시한 통합적 이해(Integrated Understanding)의 관점에서 정의하고자 한다. 조완영(2012)은 통합적 이해를 '맥락, 표현, 정의, 간단한 응용 상황을 유기적으로 연결하여 아는 것'으로 정의하였다. 통합적 이해는 다양한 표현을 이용한 맥락과 수학과의 연결, 수학과 응용의 연결을 강조한다는 점에서 프로이덴탈의 현상과 본질의 교대 작용을 통한 수학화 학습 이론과 밀접한 관련이 있다. 이는 "수학의 구조를 이해하면 응용할 수 있다."는 현재의 수학 교육의 가정과는 다른 관점이며, 또한 수학을 하위 요소를 학습한 후 연합하고자 시도하는 연합주의 심리학의 주장과도 다르다. 교수·학습의 관점에서 '인지구조의 칸막이' 현상이 발생하지 않도록 개념의 요소들을 통합하여 가르치자는 의미가 통합적 이해의 관점이다.

중학교 수준에서 함수 개념을 통합적으로 이해한다는 것은 다양한 상황을 표, 식, 그래프로 나타내보는 활동과 함수의 정의, 변수, 함수 기호, 함숫값 등 함수와 관련된 개념이 유기적으로 연결할 수 있고, 다시 함수 개념을 바탕으로 다양한 현상을 해석할 수 있는 것을 의미한다. 함수 단원의 지도상의 유의점에서 '함수를 도입할 때 정비례와 반비례 이외의 상황을 다룰 수 있다.'는 정비례와 반비례 상황 외에 다른 상황 즉 불규칙적인 표, 익숙하지 않은 식, 함숫값이 일정한 상수함수, 식으로 나타낼 수 없는 그래프 등 다양한 상황을 다룰 것을 권장하는 것으로 해석될 수 있으며 결과적으로 통합적 이해와 관련된다.

선행연구 분석에서 나타났듯이 많은 학생들이 함수의 정의를 정확하고 확실하게 이해하지 못할 뿐만 아니라 함수의 다양한 표현들을 이해하고 다양한 표현들 사이의 관계를 이해하는데 많은 어려움을 겪고 있다. 개념 정의를 잘못된 개념이미지와 연결시키고 있으며 개념의 응용상황과 개념을 연결시키지 못하고, 개념의 다양한 표현들 사이도 제대로 연결하고 있지 못한 것으로 나타났다. 이러한 현상은 함수 개념을 통합적으로 이해하지 못한 것으로 해석할 수 있다. 따라서 교수·학습 상황에서 이러한 문제점들이 발생하지 않도록 개념이미지와 개념정의 사이의 연결, 개념의 다양한 표현 사이의 연결, 개념의 응용상황과 개념의 연결 등에 더욱 주목할 필요가 있다. 함수 개념의 통합적 이해를 [그림 Ⅱ-1]과 같이 나타낼 수 있다.



[그림 Ⅱ-1] 함수 개념의 통합적 이해

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상

본 연구는 통합적 이해의 관점에서 중학교 학생들이 함수 개념을 어떻게 이해하고 있는지를 조사·분석하기 위한 연구이다. 이를 위해 충북 청주시에 소재하고 있는 B중학교와 C중학교 1, 2학년 중 각각 2학급씩 1학년 82

명, 2학년 78명 총 160명의 학생들을 연구대상으로 선정하였다.

B중학교와 C중학교 학생 가정의 사회·경제적 지위는 청주시에서 중위권이며, B중학교에서는 1, 2학년 모두 여학생으로 선정하였으며 C중학교에서는 1, 2학년 모두 남학생으로 선정하였다.

2. 검사도구 및 문항구성

중학교 수준에서 학생들이 함수 개념을 통합적으로 이해하고 있는지를 알아보기 위하여 현행 중학교 교과서와 다양한 자료를 참고하여 검사지를 개발하였다. 1, 2번 문항은 4개의 하위문항으로, 4번 문항은 2개의 하위문항으로 하여 총 14문항으로 구성되어 있으며, 함수의 번역 능력 6문항과 함수 판단 능력(이유 설명) 8문항으로 학생들이 함수 개념을 어떻게 이해하고 있는지를 알아보고자 하였다.

본 검사를 실시하기 전 개발된 검사문항의 적절성, 타당성, 응답률 등을 검토하고 잘못 해석되거나 모호한 부분이 있는지를 알아보기 위해 청주시에 있는 W중학교 1학년 일반학급과 2학년 수준별(상) 1학급 총 60명의 학생을 대상으로 예비검사를 실시하였다.

예비 검사 결과를 현직 교사 4인 및 전문가의 검토 및 자문을 거쳐 최종 검사지를 개발하였다. 예비 검사 결과 문항1과 문항2에서 모눈종이만을 제시한 것에서 좌표축이 있는 모눈종이로 수정하였으며, 문항 4의 경우 학생들에게 익숙한 식에서 비교적 익숙하지 않은 식으로 수정하였다. 또한 독립변수가 변할 때 종속변수가 일정한 두 변수 사이의 관계를 함수로 판단하는지를 알아보는 문항을 추가하였다. 상수함수는 고등학교에서 도입하고 있지만 토론문제로 제시한 교과서(김원경 외, 2015)를 참고하여 문항을 추가하였다. 각 문항을 요약하면 <표 Ⅲ-1>과 같다.

<표 Ⅲ-1> 문항의 내용요소

문항 번호	문항 내용	문항 형식	하위 문항	참고
1	정비례 관계	번역/판단 / 이유 설명	4	교과서A(2015)
2	반비례 관계	번역/판단 / 이유 설명	4	교과서B(2013)
3	표: 불규칙 상황	판단/ 이유 설명	1	기상청 정보
4	식: 일차/이차	판단/ 이유 설명	2	교과서A (2015)
5	상수함수	판단/ 이유 설명	1	교과서A (2015)
6	그래프: 불규칙 상황	판단/ 이유 설명	1	NCTM (2007)
7	함수가 아닌 상황	판단/ 이유 설명	1	교과서B (2013)

3. 분석방법

검사 결과는 문항별 분석, 함수 판단 근거 분석, 개인별 함수 판단 근거의 특징 분석으로 구분하여 분석하였으며, 각 문항에 대한 학생들의 반응을 반응 유형별 빈도수와 백분율로 제시하였다. 특히 학생들이 기술한 이유 설명을 바탕으로 함수 여부를 판단한 근거에 대한 반응을 <표 Ⅲ-2.와 같이 6개의 범주로 구분하여 범주화 하였다. 이를 토대로 문항별 분석을 한 후 전체적·개인적으로 함수 판단 근거의 특징을 분석하였다. 분석하는 과정에서 각 문항에서 특징적인 답안을 제시한 학생을 선정해 인터뷰를 실시하고 녹음·전사하여 분석의 타당성과 신뢰성을 높이고자 하였다.

<표 III-2> 판단유형 범주

범주	반응 유형
정의	교육과정 상의 정의인 '한 양이 변함에 따라 다른 양이 하나씩 정해지는 두 양 사이의 대응 관계'의 의미를 이용하여 서술한 경우
비례	정비례, 반비례 등 비례의 의미를 이용하여 서술한 경우
변화	x와 y의 변화, 증감 등의 의미를 이용하여 서술한 경우
규칙성	규칙적 또는 불규칙, 일정 등의 의미를 이용하여 서술한 경우
식	관계식 등의 의미를 이용하여 서술한 경우
기타	제시한 5가지 이외의 반응과 무반응

Ⅳ. 결과 분석

1. 문항별 분석

가. 정비례와 반비례 상황의 번역과 함수 판단 근거: <문항1>과 <문항2>

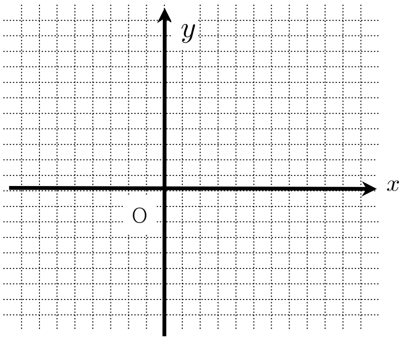
<문항1> 서현이네 가족은 적십자에 매달 2만 원씩을 6개월 동안 후원하기로 하였다. 후원 기간을 x개월, 총 후원 금액을 y만 원이라고 한다. 다음 물음에 답하시오.

1-1. x, y 사이의 대응 관계를 표로 나타내시오.

기간(x개월)						
금액(y만원)						

1-2. x, y 사이의 관계를 식으로 표현할 수 있다면 그 관계식을 구하시오.

1-3. x, y 사이의 관계를 그래프로 나타내시오.



1-4. y는 x의 함수인지 아닌지를 판단하고 그 이유를 설명하시오.

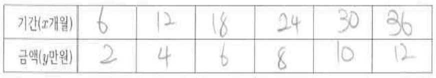
① 함수이다.	② 함수가 아니다.
이유 :	

<문항2> 민호는 집에서 $10km$ 떨어진 할머니 댁을 가려고 한다. 자동차를 타고 시속 xkm로 달릴 때, 걸리

는 시간을 y시간이라 한다. 다음 물음에 답하시오.

<문항1>과 <문항2>는 각각 정비례 상황과 반비례 상황을 표, 식, 그래프로 번역한 후 함수인지 아닌지를 판단하고 그 이유를 기술하는 문항이다. <문항2>도 <문항1>과 같이 4개의 하위 문항으로 구성되어 있다.

1-1. 2-1은 학생들에게 익숙한 정비례와 반비례 상황을 표로 나타내는 것으로 정답률은 각각 1학년은 85.4%와 79.3%, 2학년은 89.7%와 78.2%로 높게 나타났지만 반비례 상황인 <문항2>의 정답률이 낮게 나타났다. 표를 옳지 않게 작성한 학생은 1-1에서는 단위 개념을 잘못 이해하여 '매달 2만원씩 6개월 동안'을 '6개월에 2만원'으로 해석한 경우가 많았으며(10명), 2-1에서는 정비례로 해석하거나(8명), 반비례 상황을 표로 번역하지 못한 경우(27명)가 많았다.



기간(x개월)	6	12	18	24	30	36
금액(y만원)	2	4	6	8	10	12

[그림 Ⅳ-1] 1-1에 대한 반응 유형

속력(시속$x$km)	1	2	3	4	5	…
시간(y시간)	10	20	30	40	50	~~60~~

[그림 Ⅳ-2] 2-1에 대한 반응 유형

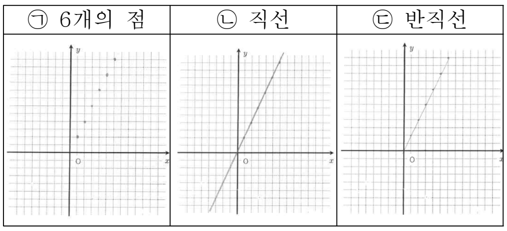
1-2, 2-2는 정비례 상황과 반비례 상황을 식으로 나타내는 문항으로 정답률은 각각 1학년은 70.7%와 63.4%, 2학년은 74.4 %와 66.7%로 높은 편으로 표로 번역하는 경우와 마찬가지로 반비례 상황에 대한 정답률이 더 낮게 나타났다.

식을 옳지 않게 구한 학생은 1-1에서는 1학년은 독립변수와 종속변수를 혼동한 경우(10명)가 많았으며, 2학년은 단위를 주목하지 못하여 $y=20000x$로 표현한 학생(6명)이 많았다. 2-2에서는 1학년은 관계식을 구하지 않고 언어로 서술한 경우(5명), $y=\frac{x}{10}$(5명)로 나타낸 경우가 있었으며, 2학년은 $x=y$로 나타낸 경우(5명)가 있었고 1, 2학년 모두 기타의 오류(각각 14명, 21명)가 1-2의 경우보다 많은 것으로 나타났다. 1학년의 경우 2학년과 달리(한 명도 없음) $y=ax$와 $y=\frac{a}{x}$에서 비례상수 a의 값만 구한 경우가 각각 4명, 6명으로 나타났다.

1-3. 2-3은 각각 정비례, 반비례 상황을 그래프로 나타내는 문항으로 학생들의 반응 유형별 범주는 각각 <표 Ⅳ-1>, <표 Ⅳ-2>와 같고, 가장 위에 있는 유형이 정답이다. <표 Ⅳ-1>에서 6개의 점, 직선, 반직선은 [그림 Ⅳ-3]처럼 그래프를 그린 것을 의미하고, <표 Ⅳ-2>에서 곡선(제1사분면), 쌍곡선(제1, 3사분면), 점(제1사분면)은 [그림 Ⅳ-4]처럼 그래프를 그린 것을 의미한다.

<표Ⅳ-1> 문항1-3의 반응 유형 범주

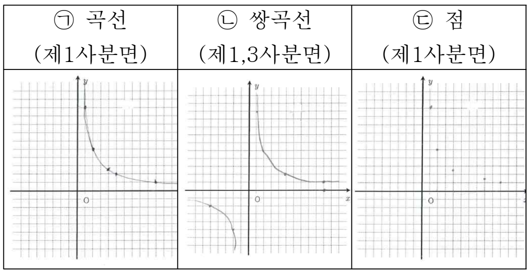
범주	반응 유형
6개의 점	(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 10), (6, 12)
직선	x값을 수 전체 범위에서 $y=2x$의 그래프
반직선 형태	원점부터 시작하여 양의 실수 범위에서 $y=2x$의 그래프
점(정수 전체)	x값을 정수 범위에서 $y=2x$의 그래프
기타	무반응, 무의미한 그래프



[그림 Ⅳ-3] 1-3 반응 유형

<표IV-2> 문항2-3의 반응 유형 범주

범주	반응 유형
곡선	x값을 양의 실수 범위에서 $y=\frac{10}{x}$의 그래프
쌍곡선	x값을 수 전체 범위에서 $y=\frac{10}{x}$의 그래프
점(정수 전체)	x값을 정수 범위에서 $y=\frac{10}{x}$의 그래프
점(제1사분면)	x값을 양의 정수 범위에서 $y=\frac{10}{x}$의 그래프
기타	무반응, 점과 점을 곡선이 아닌 선분으로 잇는 형태



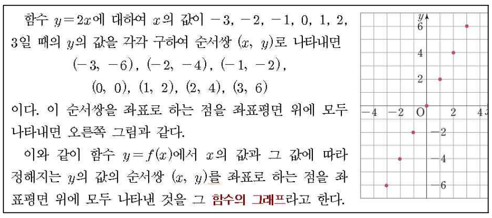
[그림 IV-4] 2-3 반응 유형

1-3에서 6개의 점을 찍어 그래프를 옳게 그린 학생은 1학년이 15.9%로 저조하게 나타났으며 2학년은 한 명도 없었다. 1학년의 경우 문제 상황을 고려하지 않고 그래프를 수 전체 범위에서 직선으로 그린 학생이([그림 IV-3]의 ㉡) 34.1%, 원점으로부터 양의 실수 범위에서 반직선으로 그린 학생이([그림 IV-3]의 ㉢) 26.8%로 매우 높게 나타났으며, 2학년의 경우 직선으로 그린 학생이 75.6%이고 반직선으로 그린 학생이 9%였다.

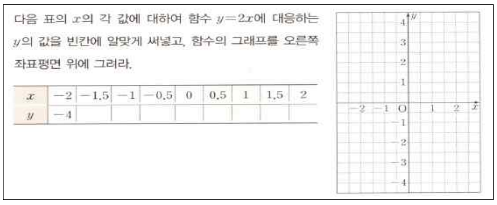
<표IV-3> 문항1-3의 반응 유형

문항	학년	정답률 (6개의 점)	반응 유형				
			직선	반직선	점(정수 전체)	기타	소계
1-3	1학년 (82명)	13명 (15.9%)	28명 (34.1%)	22명 (26.8%)	1명 (1.2%)	18명 (22%)	69명 (84.1%)
	2학년 (78명)	0명 (0%)	59명 (75.6%)	7명 (9%)	0명 (0%)	12명 (15.4%)	78명 (100%)

이러한 현상은 2009개정 수학과 교육과정과 그에 따른 교과서 그리고 함수의 그래프를 가르치는 방법에 그 원인이 있는 것으로 해석된다. 2009 개정 수학과 교육과정의 대부분의 교과서에서 함수의 그래프는 '함수 $y=f(x)$에서 x의 값과 그에 대응하는 함숫값 y의 순서쌍 (x,y)를 좌표로 하는 점 전체를 좌표평면 위에 나타낸 것'으로 정의한다. 그러나 대부분의 경우 함수의 그래프를 정의할 때, x의 값이 이산 변량으로 제한적인 경우를 간단히 다룬([그림 IV-5], [그림 IV-6]) 후, 수 전체의 경우만을 집중적으로 다루고 있다. 또한 함수의 그래프는 함수의 표현 중의 하나이지만 중학교에서는 함수의 정의역을 다루고 있지 않기 때문에 정의역인 x의 값의 범위를 고려하지 않고 수 전체의 범위에서 그래프를 그리는 경향이 있다. 이러한 것은 적어도 중학교에서 함수와 함수의 그래프를 연결하여 통합적으로 가르치고 있지 못하며 학생들은 함수와 함수의 그래프를 별개의 것으로 이해하고 있음을 의미한다.



[그림 Ⅳ-5] 함수의 그래프 정의(우정호 외, 2013)



[그림 Ⅳ-6] 함수의 그래프 문제(김원경 외, 2013)

2-3에서 반비례 상황을 그래프로 옳게 그린 학생은(1사분면의 쌍곡선) 1학년(36.6%)보다 2학년(62.8%)이 많았고 무응답 또는 시도를 하지 않은 학생도 1, 2학년 모두 각각 32.3%, 30.8%로 1-3보다 높게 나타났다. 특히 1학년은 수 전체에서 쌍곡선을 그린 경우가 16.6%였고, 1사분면에 점으로 나타낸 학생도 8.4%로 소수이긴 하지만 한 명도 없었던 2학년과 대조적이었다.

<표Ⅳ-4> 문항2-3의 반응 유형

문항	학년	정답률 (%)	반응 유형				
			쌍곡선 (제1,3사분면)	점 (정수 전체)	점 (제1사분면)	기타	소계
2-3	1학년 (82명)	30명 (36.6)	14명 (16.6)	5명 (6.1)	7명 (8.4)	26명 (32.3)	52명 (63.4)
	2학년 (78명)	49명 (62.8)	3명 (3.8)	2명 (2.6)	0명 (0)	24명 (30.8)	29명 (37.4)

2-3의 정답률이 1-3보다 전체적으로 높은 것으로 나타났는데, 이는 2-3이 x의 값을 제한된 범위에서 고려하고 있는 1-3과 달리 수 전체의 범위에서 그래프를 그리는 것이기 때문으로 해석된다. 그러나 2-3에서도 1학년의 경우 수 전체 범위에서 쌍곡선(1, 3사분면)으로 그래프를 그린 학생들은(16.6%) 1-3의 경우와 마찬가지로 주어진 상황에 내포되어 있는 x의 값의 범위에 주목하지 않은 것으로 보인다. 또한 무응답 또는 시도를 하지 않은 학생들이 많은 것은 반비례 상황이 정비례 상황보다 수학적으로 어렵기 때문으로 해석된다.

1-4. 2-4는 정비례 상황과 반비례 상황을 표, 식, 그래프로 번역하는 활동을 토대로 제시된 상황이 함수인지를 판단하는 문항으로 정답률은 각각 1학년은 98.8%와 80.5%, 2학년은 94.9%와 35.9%로 나타났다(<표 Ⅳ-5>, <표 Ⅳ-6>). 2학년 보다 1학년의 정답률이 매우 높은 이유는 1학년은 함수의 그래프에서 함수를 그리는 방법의 예로 정비례 함수와 반비례 함수를 중점적으로 다루고 있기 때문으로 해석된다. 특히 반비례의 경우 1학년과 2학년 사이의 정답률 차이가 큰 것은 2학년에서 일차함수의 그래프를 집중적으로 배워 그 영향으로 일차함수만을 함수로 보는 경향 때문으로 보인다.

<표Ⅳ-5> 문항1-4의 판단 근거

학년	정답률 (%)		판단근거 유형						
			정의	비례	변화	규칙성	식	기타	소계
1학년 (82명)	정답	81명 (98.8)	39명 (47.5)	15명 (18.3)	11명 (13.4)	8명 (9.8)	4명 (4.9)	4명 (4.9)	81명 (98.8)
	오답	1명 (1.2)	0명 (0)	0명 (0.0)	0명 (0.0)	0명 (0.0)	0명 (0.0)	1명 (1.2)	1명 (1.2)
계		82명 (100)	39명 (47.5)	15명 (18.3)	11명 (13.4)	8명 (9.8)	4명 (4.9)	5명 (6.1)	82명 (100)
2학년 (78명)	정답	74명 (94.9)	4명 (5.1)	5명 (6.4)	17명 (21.8)	15명 (19.2)	22명 (28.2)	11명 (14.1)	74명 (94.9)
	오답	4명 (5.1)	0명 (0.0)	0명 (0.0)	0명 (0.0)	1명 (1.3)	0명 (0.0)	3명 (3.8)	4명 (5.1)
계		78명 (100)	4명 (5.1)	5명 (6.4)	17명 (21.8)	16명 (20.5)	22명 (28.2)	14명 (17.9)	78명 (100)

<표Ⅳ-6> 문항2-4의 판단 근거

학년	정답률 (%)		판단근거 유형						
			정의	비례	변화	규칙성	식	기타	소계
1학년 (82명)	정답	66명 (80.5)	33명 (40.2)	15명 (18.3)	5명 (6.1)	6명 (7.3)	1명 (1.2)	6명 (7.3)	66명 (80.5)
	오답	16명 (19.5)	0명 (0.0)	3명 (3.7)	3명 (3.7)	4명 (4.9)	0명 (0.0)	6명 (7.3)	16명 (19.5)
계		82명 (100)	33명 (40.2)	18명 (22.0)	8명 (9.8)	10명 (12.2)	1명 (1.2)	12명 (14.6)	82명 (100)
2학년 (78명)	정답	28명 (35.9)	5명 (6.4)	6명 (7.7)	2명 (2.6)	4명 (5.1)	4명 (5.1)	7명 (9.0)	28명 (35.9)
	오답	50명 (64.1)	0명 (0)	1명 (1.3)	3명 (3.8)	3명 (3.8)	30명 (38.5)	13명 (16.7)	50명 (64.1)
계		78명 (100)	5명 (6.4)	7명 (9.0)	5명 (6.4)	7명 (9.0)	34명 (43.6)	20명 (25.6)	78명 (100)

<표 Ⅳ-5>, <표 Ⅳ-6>을 보면 1학년은 정의(각각 47.5%와 40.2%)와 비례(각각 18.3%와 22%)를 근거로 함수여부를 판단하려는 시도가 많았고, 2학년은 1-4에서는 식 28.2%, 변화 21.8%, 규칙성 20.5%의 순으로, 2-4에서는 식(43.6%)을 근거로 판단하려는 경향이 높았으며, 함수 판단의 근거로 정의를 제시한 학생 비율은 매우 낮았다(각각 5.1%와 6.4%).

학생들의 이러한 반응 배경을 교과서와 연결시켜 해석할 수 있다. 1학년은 함수의 정의를 배운지 얼마 되지 않았고 정비례와 반비례와 같이 비례의 관점에서 함수의 예를 많이 다루었기 때문에 정의와 비례를 근거로 함수여부를 판단한 것으로 보인다. 2학년 학생들은 일차함수를 '함수 $y=f(x)$에서 y가 x에 대한 일차식 $y=ax+b\,(a\neq 0, b=\text{상수})$으로 나타내어지는 함수'(류희찬 외, 2013)로 정의하고 일차함수인지를 판단하는 문제에서 함수인지를 판단하는 과정을 소홀히 한 채 일차식으로 표현되는가를 중점적으로 다루기 때문에 함수 판단의 근거를 식에 의존하는 것으로 해석할 수 있다.

2학년의 경우 2-4에서 식을 근거로 함수가 아니라고 판단하여 오류를 보인 학생들(38.5%)은 '일차식으로 나타낼 수 없어서'와 '분모에 x가 있어서'가 대부분이었다. 이러한 반응은 학생들의 검사지와 중학교 2학년 학생 2명과의 면담을 통해 부분적으로 확인하였다. 학생 S1은 함수를 일차함수 식인 $y=ax+b$와 동일시하는 경향이 있었으며, 학생 S2는 함수를 정비례 관계식인 $y=ax$와 동일시하는 경향이 있었다.

<학생 S1과의 면담>

T: 식으로 함수인지 아닌지 판단한 이유는 뭐지?

S1: $y=ax+b$로 표현할 수 있으면 일차함수잖아요. 일차함수도 함수니까요.

T: 그럼 $y=ax+b$로 표현할 수 없으면 함수가 아니라고 생각하니?

S1: 네

T: 왜 그런지 설명해 줄 수 있어?

S1: 음... 일차함수식으로 쓸 수 없으면 일차함수가 아니니까 함수가 아니라고 생각해요.

<학생 S2와의 면담>

T: 함수는 다 식으로 표현할 수 있다고 생각하니?

S2: 네.

T: 왜 그렇게 생각하니?
S2: 원래 함수 관계식은 $y=ax$인데... 함수식으로 쓸 때 다 $y=ax$라고 쓰니까요.
T: 언제 그렇게 배웠는데?
S2: 1학년 때요.
T: 그럼, $y=\frac{10}{x}$도 1학년 때 함수라고 배웠고 식으로 표현할 수 있는데, 왜 함수가 아니라고 했니?
S2: 배우긴 했는데, 그래도 이거는 $y=ax$꼴이 아니니까 함수가 아닙니다.

나. 표로 제시된 불규칙적 상황에 대한 함수 판단 근거: <문항3>

<문항3> 다음 표는 기상청의 지역별 일기예보에 따른 2015년 7월 10일부터 16일까지 충북의 낮 최고기온을 나타낸 것이다. y는 x의 함수인지 아닌지를 판단하고 그 이유를 설명하시오.

날짜 (x일)	10	11	12	13	14	15	16
기온 (y도)	32	33	28	27	31	33	28

<문항3>에 대한 정답률과 함수 판단근거 유형은 <표 Ⅳ-7>과 같이 나타났다.

<표Ⅳ-7> <문항3>의 판단 근거

학년	정답률 (%)		판단근거 유형						
			정의	비례	변화	규칙성	식	기타	소계
1학년 (82명)	정답	22명 (26.8)	19명 (23.2)	0명 (0.0)	2명 (2.4)	1명 (1.2)	0명 (0.0)	0명 (0.0)	22명 (26.8)
	오답	60명 (73.2)	2명 (2.4)	6명 (7.3)	6명 (7.3)	35명 (42.7)	3명 (3.7)	8명 (9.8)	60명 (73.2)
계		82명 (100)	21명 (25.6)	6명 (7.3)	8명 (9.8)	36명 (43.9)	3명 (3.7)	8명 (9.8)	82명 (100)
2학년 (78명)	정답	7명 (9.0)	0명 (0.0)	0명 (0.0)	0명 (0.0)	0명 (0.0)	3명 (3.8)	4명 (5.1)	7명 (9.0)
	오답	71명 (91.0)	0명 (0.0)	3명 (3.8)	2명 (2.6)	43명 (55.1)	15명 (19.2)	8명 (10.3)	71명 (91.0)
계		78명 (100)	0명 (0.0)	3명 (3.8)	2명 (2.6)	43명 (55.1)	18명 (23.1)	12명 (15.4)	78명 (100)

<문항3>은 불규칙적 상황을 표로 제시한 문항으로 정답률이 1학년 26.8%, 2학년이 9%로 매우 낮은 편이었다. 특히 2학년의 경우는 정의에 의해서 함수를 판단한 학생은 한 명도 없었으며, 다른 문항과 달리 '기온이 규칙적이지 않고 매일 다르기 때문'과 같이 규칙성의 관점에서 함수가 아니라고 판단한 학생이 55.1%로 매우 높은 것으로 나타났다. 이런 경향은 1학년에서도 나타났는데, 비례의 관점(7.3%)보다 규칙성의 관점(43.9%)에서 함수 여부를 판단하려는 경향을 보였다. 이는 '학생들은 함수를 규칙으로 보는 경향이 강하다'는 선행연구 결과(이예란, 2012; 우미령, 2004); 양재식, 2003)와 일치한다. 교과서에 제시된 함수 상황이 대부분 규칙적인 상황이라는 것과 표를 보고 함수여부를 판단하는 활동 경험이 부족했기 때문인 것으로 해석된다.

다. 식으로 주어진 상황에 대한 함수 판단 근거: <문항4-1>과 <문항4-2>

<문항4-1> 길이가 $15.3cm$인 양초에 불을 붙였을 때, 매 초마다 양초의 길이가 $0.3cm$씩 줄어든다. 시간 t와

양초의 길이 l 사이의 관계식은 $l=15.3-0.3t$로 나타낼 수 있다. l은 t의 함수인지 아닌지를 판단하고 그 이유를 설명하시오.

<문항4-2> 한 변의 길이가 $x\,cm$인 정사각형의 넓이를 $y\,cm^2$이라 하자. 한 변의 길이 x와 정사각형의 넓이 y 사이의 관계식은 $y=x^2$으로 나타낼 수 있다. y는 x의 함수인지 아닌지를 판단하고 그 이유를 설명하시오.

<문항4-1>은 변수가 t와 l이지만 상수항이 있는 일차함수로 학생들에게 익숙한 식이서 함수를 판단하는 정답률이 1학년은 82.9%, 2학년은 89.7%로 많은 학생들이 함수라고 판단하였다. <문항4-1>에서는 2차함수 식으로 주어진 <문항4-2>와 달리 2학년이 1학년 보다 함수 판단 능력이 높게 나타난 것은 2학년들은 일차함수를 배웠기 때문에 자연스러운 현상으로 보인다(<표 Ⅳ-8>).

<표Ⅳ-8> <문항4-1>의 판단 근거

학년	정답률 (%)		판단근거 유형						
			정의	비례	변화	규칙성	식	기타	소계
1학년 (82명)	정답	68명 (82.9)	34명 (41.5)	7명 (8.5)	4명 (4.9)	18명 (22.0)	1명 (1.2)	4명 (4.9)	68명 (82.9)
	오답	14명 (17.1)	0명 (0.0)	4명 (4.9)	0명 (0.0)	2명 (2.4)	1명 (1.2)	7명 (8.5)	14명 (17.1)
계		82명 (100)	34명 (41.5)	11명 (13.4)	4명 (4.9)	20명 (24.4)	2명 (2.4)	11명 (13.4)	82명 (100)
2학년 (78명)	정답	70명 (89.7)	3명 (3.8)	4명 (5.1)	3명 (3.8)	33명 (42.3)	19명 (24.4)	8명 (10.3)	70명 (89.7)
	오답	8명 (10.3)	0명 (0.0)	1명 (1.3)	0명 (0.0)	0명 (0.0)	1명 (1.3)	6명 (7.7)	8명 (10.3)
계		78명 (100)	3명 (3.8)	5명 (6.4)	3명 (3.8)	33명 (42.3)	20명 (25.6)	14명 (17.9)	78명 (100)

<표Ⅳ-9> <문항4-2>의 판단 근거

학년	함수 판단		반응 유형(이유))						
			정의	비례	변화	규칙성	식	기타	소계
1학년 (82명)	정답	66명 (80.5)	37명 (45.1)	7명 (8.5)	3명 (3.7)	13명 (15.9)	3명 (3.7)	3명 (3.7)	66명 (80.5)
	오답	16명 (19.5)	0명 (0.0)	2명 (2.4)	0명 (0.0)	4명 (4.9)	1명 (1.2)	9명 (11.0)	16명 (19.5)
계		82명 (100)	37명 (45.1)	9명 (11.0)	3명 (3.7)	17명 (20.7)	4명 (4.9)	12명 (14.6)	82명 (100)
2학년 (78명)	정답	50명 (64.1)	5명 (6.4)	5명 (6.4)	4명 (5.1)	14명 (17.9)	19명 (24.4)	3명 (3.8)	50명 (64.1)
	오답	28명 (35.9)	0명 (0.0)	0명 (0.0)	0명 (0.0)	2명 (2.6)	19명 (24.4)	7명 (9.0)	28명 (35.9)
계		78명 (100)	5명 (6.4)	5명 (6.4)	4명 (5.1)	16명 (20.5)	38명 (48.7)	10명 (12.8)	78명 (100.0)

문항4-2는 학생들에게 익숙하지 않은 이차함수 상황을 식으로 제시하여 함수를 판단하는 정답률은 문항4-1의 정답률보다 낮았지만 1학년은 80.5%(1학년), 2학년은 64.1%(2학년)로 높게 나타났으며, 1학년의 정답률이 특히 높았다(<표 Ⅳ-9>).

<문항4-1>과 <문항4-2>에서 정의를 근거로 함수를 판단한 학생은 1학년은 각각 41.5%와 45.1%로 유사하게 높게 나타났지만 2학년은 각각 3.8%, 6.4%로 매우 낮았다. 식이 주어졌음에도 불구하고 규칙성의 관점에서 함수여부를 판단한 학생이 1학년은 각각 24.4%와 20.7%, 2학년은 각각 42.3%와 20.5%로 비교적 높게 나타났다. 특히 2학년의 경우 이차식으로 제시된 <문항4-2>에 대해 식의 관점에서 함수를 판단하려고 시도한 학생이 48.7%로 높게 나타났으며, '이차식이라서 함수이다'와 '이차식이라서 함수가 아니다'라는 반응이 24.4%로 일치하였다. 전자의 경우는 식으로 나타낼 수 있으면 함수라고 생각하는 것이고 후자의 경우는 반비례 관계는 식으로 나타낼 수 있어도 함수가 아니라고 생각하는 것과 같이 이차식에 대해서도 함수가 아니다 즉 일차식으로 나타낼 수 있을 때만 함수라고 생각하는 것으로 판단된다. 이러한 이유는 일차함수를 고르는 문제를 해결하는 과정([그림 Ⅳ-7] 참조)의 영향을 받은 오류로 해석되며 통합적 이해의 관점에서 함수를 가르칠 필요가 있음을 시사한다.

문제 1 다음 중에서 일차함수를 모두 찾아라.

(1) $y=x+1$ (2) $y=\frac{2}{3}x$

(3) $y=\frac{2}{x}$ (4) $y=-2x^2+4x$

[그림 Ⅳ-7] 함수의 그래프 문제(류희찬 외, 2013)

일차함수가 아닌 것을 함수가 아닌 것으로 동일시하려는 경향은 학생들과의 면담과정에서도 나타났다. 다음은 ‘이차식이라 함수이다’(학생 S3)이고 ‘이차식이라 함수가 아니다’(학생 S4)라고 판단한 2학년 학생들과 인터뷰한 내용이다. 학생 S3는 이차식으로 나타내어지는 이차함수에 대해 이미 들어 알고 있었으며, 학생 S4는 일차함수에 대해서만 배운 것으로 보인다.

<학생 S3과의 면담>

T: 이차식이기 때문에 함수라고 생각하니?
S3: 네
T: 학교에서 배웠니?
S3: 음... 학원에서 배우기도 했고요. 수업시간에도 선생님께서 지나가는 말로 하셨어요.

<학생 S4와의 면담>

T: 이차식이라서 함수가 아니라고 했는데, 왜 그렇게 생각하니?
S: x의 제곱은 안 나온다고 수업시간에 배워서요.
T: 그건 일차함수 아니야? 그럼 일차함수가 아니라고 판단한 거니?
S: 네. 일차함수가 아니라고 한 거예요.
T: 그럼, 이건 함수야? 함수가 아니야?
S: 함수에 대해서는 잘 몰라서...

라. 종속변수가 일정한 상황에 대한 함수 판단 근거: <문항5>

<문항5> 순환하는 지하철의 요금은 거리와 관계없이 항상 1250원이라고 한다. 지하철을 $x\,km$ 탔을 때의 요금을 y원이라고 하자. 이 때, y는 x의 함수인지 아닌지를 판단하고 그 이유를 설명하시오.

<문항5>는 독립변수(x)인 거리가 변하여도 지하철 요금인 종속변수(y)가 일정한 함숫값으로 정해지는 상수함수 상황으로 1학년은 37.8%, 2학년은 19.2%로 전체적으로 정답률이 낮게 나타났으며 특히 2학년의 정답률이 1학년보다 더 낮았다(<표 Ⅳ-10>).

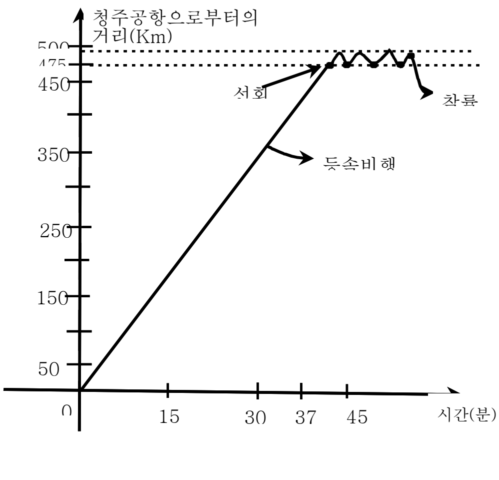
<표Ⅳ-10> <문항5>의 판단 근거

학년		정답률 (%)	판단근거 유형						
			정의	비례	변화	규칙성	식	기타	소계
1학년 (82명)	정답	31명 (37.8)	21명 (25.6)	0명 (0.0)	3명 (3.7)	3명 (3.7)	1명 (1.2)	3명 (3.7)	31명 (37.8)
	오답	51명 (62.2%)	0명 (0.0)	1명 (1.2)	38명 (46.3)	8명 (9.8)	0명 (0.0)	4명 (4.9)	51명 (62.2)
계		82명 (100)	21명 (25.6)	1명 (1.2)	41명 (50.0)	11명 (13.4)	1명 (1.2)	7명 (8.5)	82명 (100.0)
2학년 (78명)	정답	15명 (19.2)	2명 (2.6)	0명 (0.0)	1명 (1.3)	2명 (2.6)	8명 (10.3)	2명 (2.6)	15명 (19.2)
	오답	63명 (80.8)	0명 (0.0)	1명 (1.3)	34명 (43.6)	11명 (14.1)	12명 (15.4)	5명 (6.4)	63명 (80.8)
계		78명 (100)	2명 (2.6)	1명 (1.3)	35명 (44.9)	13명 (16.7)	20명 (25.6)	7명 (9.0)	78명 (100)

<문항5>에 대해 1학년 46.3%, 2학년 43.6%의 학생들이 순환하는 지하철 요금이 거리(xkm)와 관계없이 요금(y원)이 일정하다는 것을 두 변수 사이에 변화가 없어서 즉, 독립변수 변함에 따라 종속변수가 변하지 않아서 함수가 아니라고 반응하였다. 특히 2학년 학생들의 경우 정의에 의해 판단하려는 학생들은 2명(2.6%)에 불과했으며 변화 외에 식(25.6%), 규칙성(16.7%)에 근거하여 판단하려는 경향이 나타났다. 학생들은 '한 양이 변함에 따라 다른 양도 함께 변하는 두 양 사이의 대응 관계'라는 함수 개념에서 '변화'에 주목하여 이해한 것으로 보인다. 이러한 결과는 '학생들은 상수함수는 함수가 아니다'라고 보는 경향이 강하다는 선행연구 결과와 비슷하다(이예란, 2012; 우미령, 2004; 조완영·양재식, 2013).

마. 익숙하지 않은 그래프로 제시된 상황에 대한 함수 판단 근거: <문항6>

<문항6> 다음은 청주 공항에서 출발한 비행기가 제주 공항에 도착하여 몇 번 순회하다 착륙할 때까지의 시간 x(분)에 대한 청주공항으로부터의 거리 y(마일)의 그래프이다. 두 변수 x, y에 대하여 y가 x의 함수인지 아닌지를 판단하고 그 이유를 설명하시오.



<문항6>은 학생들에게 불규칙적으로 보이는 그래프 상황에 대해 함수여부를 판단하는 문항으로 1학년 41.5%, 2학년 16.7%가 옳게 판단하였다(<표 Ⅳ-11>.

<표Ⅳ-11> <문항6>의 판단 근거

학년	정답률 (%)		판단근거 유형						
			정의	비례	변화	규칙성	식	기타	소계
1학년 (82명)	정답	34명 (41.5)	21명 (25.6)	1명 (1.2)	1명 (1.2)	6명 (7.3)	0명 (0.0)	5명 (6.1)	34명 (41.5)
	오답	48명 (58.5)	0명 (0.0)	2명 (2.4)	3명 (3.7)	22명 (26.8)	1명 (1.2)	20명 (24.4)	48명 (58.5)
계		82명 (100)	21명 (25.6)	3명 (3.7)	4명 (4.9)	28명 (34.1)	1명 (1.2)	25명 (30.5)	82명 (100)
2학년 (78명)	정답	13명 (16.7)	1명 (1.3)	1명 (1.3)	2명 (2.6)	1명 (1.3)	3명 (3.8%	5명 (6.4%)	13명 (16.7)
	오답	65명 (83.3)	0명 (0.0)	0명 (0.0)	3명 (3.8)	32명 (41.0)	11명 (14.1)	19명 (24.4)	65명 (83.3)
계		78명 (100)	1명 (1.3)	1명 (1.3)	5명 (6.4)	33명 (42.3)	14명 (17.9)	24명 (30.8)	78명 (100)

<문항6>에서 학생들은 '규칙적이지 않아서 함수가 아니다'와 같이 규칙성 관점에서 함수를 판단하려는 경향이 나타났다. 1학년은 34.1%, 2학년은 42.3%의 학생들이 규칙성의 관점에서 함수여부를 판단하려고 시도하였으며 대부분 오답으로 나타났다(1학년 26.8%, 2학년 41%). 이러한 학생들은 그래프가 불규칙적으로 변하기 때문에 함수가 아니라고 판단했으며 그래프 상황에서도 함수는 규칙적이어야 된다고 생각하는 것으로 판단된다. 정의의 관점에서 함수여부를 판단한 학생이 1학년이 21명(25.6%)인데 반해 2학년은 1명(1.3%)밖에 없었다. 또한 학생들에게 익숙하지 않은 그래프라는 점 때문에 '모르겠다', '꼬불꼬불해서', '처음 보는 그래프다' 등 기타 반응이 1학년은 30.5%, 2학년은 30.7%로 다른 문항에 비해 높게 나타나 '학생들은 그래프의 모양을 중시하고 경험한 그래프 표상만을 함수라고 생각하여 불규칙한 그래프는 함수가 아니다'라는 선행연구 결과와 일치하였다(이예란, 2012; 우미령, 2004; 박지현, 2009; 조완영·양재식, 2013).

바. 함수가 아닌 상황에 대한 함수 판단 근거: <문항7>

<문항7> 저금통에 10원, 50원, 100원짜리 동전이 각각 1개씩 들어있다. 동전 x개를 꺼내었을 때, 그 금액을 y원이라 한다. 두 변수 x, y에 대하여 y가 x의 함수인지 아닌지를 판단하고 그 이유를 설명하시오.

<문항7>은 동전을 x개 꺼낼 때 그 금액 y가 하나로 정해지지 않아 함수가 아닌 상황으로, 정답률이 1학년 87.8%, 2학년 79.5%로 높게 나타났다(<표 Ⅳ-12>)

<표Ⅳ-12> <문항7>의 판단 근거

<table>
<tr><th rowspan="2">학년</th><th rowspan="2" colspan="2">정답률
(%)</th><th colspan="7">판단근거 유형</th></tr>
<tr><th>정의</th><th>비례</th><th>변화</th><th>규칙성</th><th>식</th><th>기타</th><th>소계</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1학년
(82명)</td><td>정답</td><td>72명
(87.8)</td><td>46명
(56.1)</td><td>2명
(2.4)</td><td>5명
(6.1)</td><td>11명
(13.4)</td><td>0명
(0.0)</td><td>8명
(9.8)</td><td>72명
(87.8)</td></tr>
<tr><td>오답</td><td>10명
(12.2)</td><td>0명
(0.0)</td><td>0명
(0.0)</td><td>2명
(2.4)</td><td>0명
(0.0)</td><td>0명
(0.0)</td><td>8명
(9.8)</td><td>10명
(12.2)</td></tr>
<tr><td colspan="2">계</td><td>82명
(100)</td><td>46명
(56.1)</td><td>2명
(2.4)</td><td>7명
(8.5)</td><td>11명
(13.4)</td><td>0명
(0.0)</td><td>16명
(19.5)</td><td>82명
(100)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2학년
(78명)</td><td>정답</td><td>62명
(79.5%)</td><td>11명
(14.1)</td><td>0명
(0.0)</td><td>2명
(2.6)</td><td>25명
(32.1)</td><td>7명
(9.0)</td><td>17명
(21.8)</td><td>62명
(79.5)</td></tr>
<tr><td>오답</td><td>16명
(20.5%)</td><td>0명
(0.0)</td><td>0명
(0.0)</td><td>1명
(1.3)</td><td>1명
(1.3)</td><td>2명
(2.6)</td><td>12명
(15.4)</td><td>16명
(20.5)</td></tr>
<tr><td colspan="2">계</td><td>78명
(100.0%)</td><td>11명
(14.1)</td><td>0명
(0.0)</td><td>3명
(3.8)</td><td>26명
(33.3)</td><td>9명
(11.5)</td><td>29명
(37.2)</td><td>78명
(100.0)</td></tr>
</table>

<문항7>에서 정의의 관점에서 판단을 시도한 경우가 1학년은 56.1%인데 반해 2학년은 14.1%로 매우 낮게 나타났다. 2학년의 경우 1학년과 달리(13.4%) 규칙성(33.3%)의 관점에서 함수여부를 판단하려는 경향을 보였다. 또한 2학년의 기타의 응답에서 '이것은 경우의 수이기 때문이다'와 같이 종속변수가 하나로 정해지지 않는다는 것을 경우의 수가 다양하다는 확률 개념의 관점에서 기술한 경우가 많았다. 학생들의 함수개념에 대한 이해도를 조사한 시점이 확률 단원을 배우는 과정이라서 '경우의 수' 라고 반응한 것으로 보인다. 학생들은 경험, 직관에 의존하여 함수를 판단하는 경향이 있는 것으로 해석할 수 있다.

2. 함수 판단 근거 분석

본 절에서는 중학교 1, 2학년 학생들이 함수의 개념을 어떻게 이해하고 있는지를 종합적으로 분석하였다. <표 Ⅳ-13>와 <표 Ⅳ-14>는 각각 1학년과 2학년 학생들이 함수여부를 판단할 때 제시한 근거를 정·오답을 구분하지 않고 집계한 것이다. 학생들이 제시한 함수 판단의 근거의 특징을 다음과 같이 정리할 수 있다.

<표Ⅳ-13> 전체문항에 대한 판단 근거(1학년)

학년	문항	정의	비례	변화	규칙성	식	기타	계
1학년 (656명)	1-4	**39명 (47.5)**	15명 (18.3	11명 (13.4)	8명 (9.8)	4명 (4.9)	5명 (6.1)	82명 (100)
	2-4	**33명 (40.2)**	18명 (22.0)	8명 (9.8)	10명 (12.2)	1명 (1.2)	12명 (14.6)	82명 (100)
	3	21명 (25.6)	6명 (7.3)	8명 (9.8)	**36명 (43.9)**	3명 (3.7)	8명 (9.8)	82명 (100)
	4-1	**34명 (41.5)**	11명 (13.4)	4명 (4.9)	20명 (24.4)	2명 (2.4)	11명 (13.4)	82명 (100)
	4-2	**37명 (45.1)**	9명 (11.0)	3명 (3.7)	17명 (20.7)	4명 (4.9)	12명 (14.6)	82명 (100)
	5	21명 (25.6)	1명 (1.2)	**41명 (50.0)**	11명 (13.4)	1명 (1.2)	7명 (8.5)	82명 (100)
	6	21명 (25.6)	3명 (3.7)	4명 (4.9)	**28명 (34.1)**	1명 (1.2)	25명 (30.5)	82명 (100)
	7	**46명 (56.1)**	2명 (2.4)	7명 (8.5)	11명 (13.4)	0명 (0.0)	16명 (19.5)	82명 (100)
계(명/%)		**252 (38.2)**	65 (9.9)	86 (13.2)	**141 (21.5)**	16 (2.5)	96 (14.7)	656 (100)

<표Ⅳ-14> 전체문항에 대한 판단 근거(2학년)

학년	문항	정의	비례	변화	규칙성	식	기타	계
2학년 (624명)	1-4	4명 (5.1)	5명 (6.4)	17명 (21.8)	16명 (20.5)	**22명 (28.2)**	14명 (17.9)	78명 (100)
	2-4	5명 (6.4)	7명 (9.0)	5명 (6.4)	7명 (9.0)	**34명 (43.6)**	20명 (25.6)	78명 (100)
	3	0명 (0.0)	3명 (3.8)	2명 (2.6)	**43명 (55.1)**	18명 (23.1)	12명 (15.4)	78명 (100)
	4-1	0명 (0.0)	3명 (3.8)	5명 (6.4)	3명 (3.8)	**33명 (42.3)**	20명 (25.6)	14명 (17.9)
	4-2	5명 (6.4)	5명 (6.4)	4명 (5.1)	16명 (20.5)	**38명 (48.7)**	10명 (12.8)	78명 (100)
	5	2명 (2.6)	1명 (1.3)	**35명 (44.9)**	13명 (16.7)	20명 (25.6)	7명 (9.0)	78명 (100)
	6	1명 (1.3)	1명 (1.3)	5명 (6.4)	**33명 (42.3)**	14명 (17.9)	24명 (30.8)	78명 (100)
	7	11명 (14.1)	0명 (0.0)	3명 (3.8)	**26명 (33.3)**	9명 (11.5)	29명 (37.2)	78명 (100.0)
계(명/%)		31 (5)	27 (4.3)	74 (11.9)	**187 (30)**	**175 (28)**	130 (20.8)	624 (100)

첫째, 함수 여부를 판단할 때 중학교 1학년 학생들은 정의(38.2%), 중학교 2학년 학생들은 규칙성(30%)과 식(28%)의 관점을 근거로 제시하는 경향이 나타났다. 1, 2학년 전체를 통합할 때 규칙성(25.6%)을 근거로 제시한 경우가 가장 많았지만(표 Ⅳ-15>), 이것은 두 변수 사이의 대응이 불규칙적인 문항3(불규칙적인 표로 제시된 상황)과 문항6(불규칙적인 그래프로 제시된 상황)의 영향 때문이라 볼 수 있다.

<표Ⅳ-15> 전체문항에 대한 판단 근거

구분 (명)	정의 (%)	비례 (%)	변화 (%)	규칙성 (%)	식 (%)	기타 (%)
1학년 (656)	252명 (38.2)	65명 (9.9)	86명 (13.2)	141명 (21.5)	16명 (2.5)	96명 (14.7)
2학년 (624)	31명 (5)	27명 (4.3)	74명 (11.9)	187명 (30)	175명 (28)	130명 (20.8)
계	**283명 (22.1)**	**92명 (7.2)**	**160명 (12.5)**	**328명 (25.6)**	**191명 (14.9)**	**226명 (17.7)**

<표Ⅳ-16> 판단 근거(정의와 식)

구분	정의	식
1학년(656명)	252명 (38.2%)	16명 (2.5%)
2학년(624명)	31명 (5%)	175명 (28%)

조사 시기와 학습경험 역시 학년별 함수 판단 근거에 영향을 미친 것으로 해석된다(<Ⅳ-16>). 1학년 학생들은 함수 자체 즉 함수의 정의를 학습하였지만 2학년 학생들은 식으로 정의하는 일차함수를 학습하였다. 즉 2학년 학생들은 함수와 연결시켜 일차함수를 배우기보다는 '일차식'과 관련하여 일차함수를 배운 영향으로 식을 근거로 제시한 경우(28%)가 많은 것으로 해석된다.

둘째, 제시된 함수 상황이 함수 판단의 근거에 많은 영향을 끼친 것으로 나타났다. 중학교 1학년의 경우 학생들에게 비교적 익숙한 상황(<표 Ⅳ-13>의 문항1, 2, 4-1, 4-2)에서는 정의를 근거로 함수를 판단하려는 경향이 있었지만, 두 변수 사이의 관계가 불규칙적이고 학생들에게 익숙하지 않은 상황(<표 Ⅳ-13>의 문항3과 문항6)에서는 정의보다 규칙성에 의존하는 경향이 강하게 나타났다. 중학교 1학년의 경우도 학생들에게 비교적 익숙한 상황(<표 Ⅳ-14>의 문항1, 2, 4-1, 4-2)에서는 식을 근거로 함수를 판단하려는 경향이 있었지만, 두 변수 사

이의 관계가 불규칙적이고 학생들에게 익숙하지 않은 상황(<표 Ⅳ-14>의 문항3과 문항6)에서는 식보다 규칙성에 의존하는 경향이 강하게 나타났다. 문항5의 경우 1, 2학년 학생 모두 '함숫값이 변하지 않아서' 등과 같이 변화의 관점에서 함수여부를 판단하려는 시도가 가장 많았다. 이러한 결과는 학생들이 다양한 함수 상황을 경험하고, 다양한 상황과 표현을 함수의 본질적인 측면 즉 함수의 정의와 연결시키는 경험이 필요함을 시사한다. 특히 2학년에서 일차함수를 지도할 때 함수인지를 먼저 확인한 후 일차함수인지를 판단하는 활동 등을 강조할 필요가 있다.

3. 개인별 함수 판단 근거의 특징

함수 판단의 근거에 대한 개인별 특징은 다양한 상황과 표현과 함수의 정의 사이를 일관되게 연결시킨 학생들을 중심으로 분석하였다. 분석 결과는 다음과 같다.

첫째, 8개 문항에 대해서 일관된 근거로 함수를 판단한 학생은 1학년 13명(15.9%), 2학년 2명(2.6%)으로 나타났다. 1학년 13명 중 12명(14.6%)은 8개 문항 모두 함수의 '정의'를 이용하여 함수를 판단하였고 1명(1.2%)은 8개 문항 모두 '비례'의 관점으로 함수를 판단하였다. 2학년 2명(2.6%)은 모두 '식'의 개념으로 함수를 판단하였다. 둘째, 여섯 문항 이상을 '정의'의 개념으로 함수를 판단한 경우로 확대하면, 7개 문항의 경우는 1학년 6명(7.3%), 2학년 1명(1.2%), 6개 문항의 경우는 1학년 24명(15%), 2학년 2명(2.6%)으로 나타났다(<표Ⅳ-17>).

<표Ⅳ-17> 정의로 판단한 문항 수

구분	8문항	7문항	6문항	계
1학년 (82명)	12명 (14.6)	6명 (7.3)	6명 (7.3)	24명 (15)
2학년 (78명)	0명 (0)	1명 (1.3)	1명 (1.3)	2명 (2.6)
계	12명 (7.5)	7명 (4.4)	7명 (4.4)	26명 (16.3)

<표Ⅳ-18> 7문항에 대한 판단 근거

구분	문항 1-4	문항 2-4	문항3	문항 4-1	문항 4-2	문항5	문항6	문항7
S4 (2학년)	정의	정의	정의	정의	**기타**	정의	정의	정의
S5 (1학년)	정의	정의	정의	정의	정의	**규칙성**	정의	정의
S6 (1학년)	정의	정의	정의	정의	정의	정의	**기타**	정의

셋째, 7개 문항을 함수의 '정의'를 이용하여 판단한 학생 3명(S4, S5, S6)을 대상으로 면담을 하였다. 이 학생들은 함수 판단 근거를 묻는 8개 문항 중 7개 문항을 함수의 '정의'로 판단하였으나, 1개 문항에 대해서만 기타와 규칙성으로 판단하였다(<표Ⅳ-18>). 이 학생들은 함수의 정의를 알고 있었지만 익숙하지 않은 상황과 함수의 정의를 연결시키지 못하였다. 그러나 교사와의 면담을 통해 어렵지 않게 정의를 이용하여 함수여부를 판단할 수 있었다. 2학년 학생인 S4는 이차함수 상황을 식으로 제시한 문항4-2에 대해서만 기타 반응을 보인 학생으로 함수의 정의를 알고는 있었지만 일차함수만을 함수로 생각하고 있었다.

T: 문항4-2에서 $y=x^2$은 함수가 아니라고 했는데 왜 그랬는지 설명해줄 수 있어?
S4: 이해가 안 되었어요.
T: 어떤 점이 이해가 안 되니?
S4: 식에 제곱이 있잖아요.
T: 왜 제곱이 있으면 함수가 아니니?
S4: 일차함수는 제곱이 없잖아요.
T: 그래? 그럼 x값에 1을 넣어볼래?

S4: y는 1이 되요.
T: 함수 정의가 뭐지?
S4: 하나의 x값에 y가 하나씩 정해지는 거예요.
T: 그렇지? 그럼 다시 한 번 문항4-1을 생각해볼래?
S4: 아.. 함수가 되네요. x에 1을 넣으니 y값이 1이 되고 x에 2를 넣으니 y값이 4가 되네요.

1학년 학생인 S5는 함숫값이 일정한 상수함수를 제시한 문항5에 대해서만 함수여부를 규칙성의 관점에서 판단하려고 시도한 학생이다. 이 학생은 함숫값이 변하지 않으면 함수가 아니라고 생각하였다.

T: 문항5에서 지하철 요금에 관한 문제인데 왜 함수가 아니라고 했는지 설명해줄래?
S5: y값 모두가 1250원이잖아요
T: y값 모두가 1250원이면 함수가 안 되니?
S5: 네. x값 하나에 y값도 변해야 하는데, y값이 모두 같아서 함수가 아니에요.
T: 함수가 되려면 y값이 변해야 한다고 생각하니?
S5: y값이 규칙적이어야 한다고 생각해요.
T: 너 함수의 정의를 한번 얘기해 볼래?
S5: x 하나에 y가 하나씩 정해지는 거예요.
T: $1km$에 얼마지?
S5: 1250원요.
T: $2km$에 얼마지?
S5: 1250원요.
T: 그렇지? 그럼 다시 한 번 문항5를 함수의 정의를 생각하며 풀어볼래?
S5: (잠시 머뭇거림) 아 함수네요. 함숫값이 같아도 함수가 되네요.

1학년 학생인 S6은 불규칙적으로 변하는 것으로 생각되는 상황을 그래프로 제시한 문항6에 대해서만 기타 반응(무응답)을 보인 학생으로 함수의 정의를 알고 있었지만 시간이 부족하였다고 응답하였다. 면담과정에서 스스로 함수의 정의를 이용하여 주어진 상황이 함수라고 판단하였다.

T: 6번만 '몰라요'라고 썼던데, 왜 그랬어?
S3: 시간이 없어서요.
T: 그럼, 다시 한 번 풀어볼래?
S3: 어.. 함수 맞네요.
T: 왜 그렇게 생각하니?
S3: 그래프를 보면 x값과 y값이 하나씩 점으로 만들 수 있으니까, x값 하나에 y값이 하나씩 결정되니까 함수예요.
T: 그렇구나.

위 세 학생은 함수의 정의를 알고 있었지만 비교적 익숙하지 않은 상황과 함수의 정의를 연결시키는데 어려움을 느낀 것으로 보인다. 그러나 학생들은 교사의 몇 가지 질문을 통해 어렵지 않게 함수의 정의를 이용하여 함수여부를 옳게 판단하였다. 면담 결과 우리는 함수 교수・학습에서 다양한 상황과 표현을 함수의 정의와 연결시키는 활동의 중요성을 다시 확인할 수 있었다.

V. 결론

본 연구의 목적은 통합적 이해의 관점에서 중학교 1, 2학년 학생들이 함수 개념을 어떻게 이해하고 있는지를 알아보는 데 있다. 함수 개념을 통합적으로 이해한다는 것은 다양한 상황과 표, 식, 그래프 등 다양한 표현, 함수의 정의, 변수, 기호, 함숫값 등 함수와 관련된 하위 개념을 유기적으로 연결하여 이해하는 것을 의미한다.

본 연구의 목적을 달성하기 위해 함수개념의 이해를 조사하기 위한 검사지를 개발하고, 청주시에 소재한 B 중학교, C 중학교 1, 2학년 학생 160명을 조사 대상으로 선정하였다. 검사지는 함수의 개념 이해도, 함수의 표현과 번역 능력에 관한 선행 연구와 2009 개정 수학과 교육과정 교과서와 교사용 지도서 등을 참고하여 <함수 개념 이해 검사지>를 만든 후 현장 교사들과 전문가의 검토를 받아 수정·보완하였다. 함수의 번역 능력에 관한 6개 문항과 함수 판단 능력(이유 설명)에 관한 8개 문항으로 구성하여 함수 개념을 어떻게 이해하고 있는지 알아보고자 하였다.

연구결과는 다음과 같다. 첫째, 함수의 번역 능력을 측정하기 위한 문항에서 표와 식으로의 번역 능력은 높았으나, 그래프로의 번역 능력은 저조하였다. 함수인지 아닌지를 판단하는 정답률은 학생들에게 익숙한 상황에서는 대체로 높았으나, 표와 그래프와 같이 학생들에게 익숙하지 않은 상황에서는 낮게 나왔다. 다양한 함수 표현 사이의 번역 능력은 함수를 이해하는 데 중요하지만, 함수를 이해하고 있다는 것을 의미하지는 않는다. 그뿐만 아니라 함수의 다양한 표현 자체가 함수 개념의 본질을 나타내는 것은 아니다. 다양한 함수의 표현 사이를 연결하는 활동을 통해서 함수가 가진 불변의 의미를 파악함으로써 함수를 이해할 수 있다.

둘째, 제시된 상황과 표현에 따라 함수 여부를 판단하는 이유를 설명하는 반응이 다양하였고 학년별로 판단하는 근거가 달랐다. 1학년은 함수를 정의(38.2%)와 규칙성(21.5%)의 개념으로, 2학년은 규칙성(30%)과 식(28%)의 개념으로 주로 함수를 판단하였다. 1학년은 함수의 정의를 포함하여 함수를 다루고 2학년은 일차함수를 주로 다루기 때문에 1학년 학생들은 함수 여부를 주로 정의를 근거로 판단하였고 2학년 학생들은 함수의 정의를 고려하지 않고 일차함수에 대한 개념 이미지에 의존해서 함수 여부를 판단한 것으로 볼 수 있다. 이러한 결과는 학생들이 함수의 개념이미지와 개념정의를 연결시키지 못해 함수 개념을 통합적으로 이해하지 못한 것으로 해석할 수 있다.

셋째, 다양한 상황이나 표현에 영향을 받지 않고 함수를 '정의'로 판단한 학생은 많지 않았다. 학생 개인별로 다양한 상황에 대해서 8개 문항 모두 함수를 '정의'로 판단한 경우는 1학년이 12명(14.6%)이고 2학년은 한 명도 없었다. 또한, 8개 문항 중 6개 문항 이상을 함수의 '정의'에 의해서 판단한 경우는 1학년 24명(15%), 2학년 2명(2.6%)이다. 많은 학생이 제시된 다양한 상황과 표현을 함수의 정의를 이용해서 판단한 것으로 볼 수 없다는 점에서 함수 개념을 통합적으로 이해한 것으로 보기 어렵다.

본 연구를 통해 중학교 1, 2학년 학생들이 함수 개념을 통합적으로 이해하지 못하고 있음을 확인할 수 있었다. 이러한 원인 중 하나는 학생들이 함수 개념을 어떻게 배우는지와 관련이 있다. 함수를 학습하는 과정에서의 경험이 학생들의 함수 개념 이해에 영향을 끼친다. 이와 관련하여 몇 가지 제언을 하고자 한다. 첫째, 통합적 이해는 이해를 교수·학습의 관점에서 해석한 개념이다. 함수 개념의 통합적 이해를 위해서는 수업목표, 수학과제의 구성과 배열이 달라질 필요가 있다. 통합적 이해의 관점에서 중학교 함수와 관련된 수업목표와 수학과제 구성과 배열을 어떻게 할 수 있는지에 대한 후속연구가 필요하다. 둘째, 중학교 학생들을 대상으로 통합적 이해의 관점에서 수업을 실행한 후 학생들이 함수 개념을 어떻게 이해하는지에 대한 후속연구가 요구된다.

참 고 문 헌

강병용 (2012). 중학교 1학년 수학 교과서의 함수 단원의 비교연구 : 함수 개념을 중심으로. 공주대학교 교육대학원 석사학위 논문.

Kang, B. Y. (2012). *Comparative Study of the Chapters Titled Function in the First-Year Middle School Mathematics Textbooks -Focussed on the Concept of Function,* Master's thesis, Kongju National University.

강옥기 외 8인 (2015). 중학교 수학1. 서울, 동아출판.

Kang, O. K. other 8. (2015). *Middle School Math 1,* Seoul: Dong-A publishing.

교육인적자원부 (2007). 수학과 교육과정, 교육인적자원부 고시 제2007-79호 별책8. 서울, 대한 교과서 주식회사.

Ministry of Education & Human Resources Development. (2007). *Mathematics Curriculum,* Seoul: Daehan Textbooks Co.

김남희 외 5인 (2013). 수학교육과정과 교재연구. 서울, 경문사.

Kim, N. H. other5. (2013). *The Study of Mathematics Curriculum and Textbooks,* Seoul: Gyeongmunsa

김다예 (2014). 2009 개정 중1 교과서 분석을 통한 함수의 그래프 지도의 문제점과 개선 방안. 한양대학교 교육대학원 석사학위 논문.

Kim, D. Y. (2014). *An Analysis of 2009 Middle School Mathematics Texts in Their Presentation of Graphs of Functions. - The Drawbacks and Proposal of Ways of Improving,* Master's thesis, Hanyang University.

김명진 (2000). 중학교 2학년 학생들의 함수 개념에 대한 실태조사. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위 논문.

Kim, M. J. (2000). *A Survey on The Concept of Function in Middle School Second Grade Students,* Master's thesis, Korea National University of Education.

김미숙 (2002). 함수개념의 역사적 발달 과정에 대하여. 중앙대학교 교육대학원 석사학위 논문.

Kim, M. S. (2002). *The Historical Development of Function Concepts,* Master's thesis, Chungang University.

김연식・박교식 (1992). 함수 개념 지도의 교수현상학적 접근. 대한수학교육학회 논문집, 2(1), 1-15.

Kim, Y. S., Park, K. S. (1992). The Didactically Phenomenological Approach in Instruction of Function Concept, *The journal of educational research in mathematics,* 2(1), 1-15.

김예진 (2009). 학업성취도에 따른 고등학교 2학년 학생들의 함수 개념이해 및 개념이미지 조사. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위 논문.

Kim, Y. J. (2009). *Investigation of Notions of Function and Image According to Scholastic Achievements of Second Grade of High School Students,* Master's thesis, Korea National University of Education.

김원경 외 8인(2015). 중학교 수학1. 서울, 비상교육.

Kim, W. K. other 8. (2015). *Middle School Math 1,* Seoul: visang education.

김춘희 (2007). 그래프를 활용한 함수지도와 함수 개념 형성에 관한 연구. 한국교원대학교 대학원 석사학위 논문.

Kim, C. H. (2007). *Study on The Using Graphs to Introduce Function and Forming The Concept of Function,* Master's thesis, Korea National University of Education.

노영순 (2009). 중학교 수학에서 함수 지도에 관한 연구. 공주대학교 교육연구소, 교육연구, 23, 53-65.

Ro, Y. S. (2009). A Study on The Teaching of Function in a Middle School, *Kongju National University Education Laboratory, The Journal of Educational Research,* 23, 53-65.

문혜선 (2015). 함수적 상황과 그래프 사이의 번역활동에서 나타나는 고등학교 1학년 학생들의 특징 분석 : 공변추론 중심으로, 한국교원대학교 대학원 석사학위 논문.

Moon, H. S. (2015). *An Analysis of High School Students' Characteristics in Translating between Functional Situations and Graphical Representations : Centered on Covariational Reasoning,* Master's thesis, Korea National University of Education.

박교식 (1993). 함수 개념의 역사적 발달에 관한 연구, 과학수학교육연보, 9, 53-79.

Park, K. S. (1993). A Study on The Historical Development of Function Concepts, *Science and Mathematics yearbook of Education,* 9, 53-79.

박지현 (2009). 학습자의 오개념과 오류에 대한 교사들의 PCK 사례연구 : 중학교 1학년 함수 영역을 중심으로, 이화여자대학교 교육대학원 석사학위 논문.

Park, J. H. (2009) *A Case Study on Pedagogical Content Knowledge about Students' Misconceptions and Errors : Focused on The 7th Grade Function Part,* Master's thesis, Ewha Womans University.

변희현・주미경 (2012). 우리나라 중학생의 함수 개념화 특성, 수학교육학연구, 22(3), 353-370.

Byun, H. H., Ju, M. K. (2012). Korean Middle School Students' Conception of Function, *The Journal of Educational Research in Mathematics,* 22(3), 353-370

양기열・장유선 (2010). 고등학생들의 함수단원 학습과정에서 나타나는 오류유형 분석과 교정. 한국학교수학회논문집, 13(1), 23-43.

Yang, K. Y., Jang, Y. S. (2010). Analysis of Highschool Students' Error types and Correction in Learning Function, *Journal of the Korean School Mathematics,* 13(1), 23-43.

양재식 (2003). 중학교 1, 2학년 학생들의 함수 개념 이미지와 함수 능력. 충북대학교 교육대학원 석사학위 논문.

Yang, J. S. (2003). *The Concept Image and Ability of Function of The* Middle School Students in First and Second Grade, Master's thesis, Chungbuk National University.

우미령 (2005). 중학생의 함수 개념 이해에 관한 연구 : 함수의 표현방법에 따른 문제해결의 차이 비교, 고려대학교 교육대학원 석사학위 논문.

Woo, M. R. (2005). *The Study on The Understanding of Middle School Students About The Concept of Function,* Master's thesis, Korea University.

우정호 (2003). 학교수학의 교육적 기초. 서울: 서울대학교출판문화원.

Woo, J. H. (2003). *Educational Foundation of the School Mathematics,* Seoul: Seoul National University Press.

우정호 외16인(2014). 중학교 수학1. 서울: 두산동아.

Woo, J. H. other 16. (2014). *Middle School Math 1,* Seoul: Doosandonga.

이나현(2009). 중학교 2학년 학생들의 일차함수 그래프 과제 해결능력. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위 논문.

Lee, N. H. (2009). *(A) Study on Eighth Graders' Ability to Solve Linear Function Graph-related Tasks,* Master's thesis, Korea National University of Education.

이승민 (2010). 중학교 1학년 학생들의 함수 표현과 번역에서의 인식론적 장애에 관한 연구. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위 논문.

Lee, S. M. (2010). *Epistemological Obstacles of Middle School First Grade Students on the Expression of Function and Its Translation,* Master's thesis, Korea National University of Education.

이영경 (2016). 통합적 이해의 관점에서 중학교 학생들의 함수 개념 이해 분석. 충북대학교 대학원 석사학위 논문.

Lee, Y. K. (2016). *An Analysis on the Understanding of Middle School Students about the Concept of Function Based on Integrated Understanding,* Master's thesis, Chungbuk National University.

이영숙 (2013). 함수 개념 교육을 위한 인식론적 참조 모델에 관한 연구. 부산대학교 대학원 박사학위 논문.

Lee, Y. S. (2013). *Epistemological Reference Models for the Teaching of the Concept of Function,* Doctoral thesis, Busan national University.

이예란 (2012). 함수 개념 이해도 향상을 위한 지도 방법 고찰 : 중학교 1학년 함수 개념을 중심으로. 부산대학교 대학원 석사학위 논문.

Lee, Y. R. (2012). *Consideration of Teaching Method to Improve the Understanding of the Concept of Function: Focusing* *on the Concept of Function at the First Grade of Middle School,* Master's thesis, Busan national University.

이종희 (1999). 이해에 대한 수학교육적 고찰. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

Lee, J. H. (1999). *A Study on Understanding in Mathematics Education,* Doctoral thesis, Seoul National University.

이현주・류중현・조완영 (2015). 통합적 이해의 관점에서 본 고등학교 학생들의 미분계수 개념 이해 분석. 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육 논문집>, 29(1), 131-155.

Lee, H. J., Ryu, J. H., Cho, W. Y. (2015).An Analysis on the Understanding of High School Students about the Concept of a Differential Coefficient Based on Integrated Understanding, *Communications of mathematical education,* 29(1), 131-155.

장혜영 (2002). 7차 교육과정 개정에 따른 함수 개념 이해 실태 조사. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위 논문.

Jang, H. Y. (2002). *(A) Study to understand on the concept of function accrding to the reform of the 7th curriculum,* Master's thesis, Korea National University of Education.

정영옥 (1997). Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

Chong, Y. O. (1997). *(A) Study on Freudenthal's mathematising instruction theory,* Doctoral thesis, Seoul National University.

조완영 (2012). 예비교사의 미분영역에 관한 내용지식의 분석. 학교수학, 14(2), 233-253.

Cho, W. Y. (2012). Analysis of Prospective Teachers' Mathematical Content Knowledge about Differential area, *School Mathematics,* 14(2), 233-253.

최승현 (2014). 고등학생들의 함수 개념에 대한 이해 분석. 충북대학교 교육대학원 석사학위 논문.

Choi, S. H. (2014). *Analysis on the Understanding of High School Students About The Concept of Functions,* Master's thesis, Chungbuk National University.

한국과학창의재단 (2011). 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정 연구.

Korea Foundation for the Advancement of Science and Creativity. (2011). *The 2009 Revised Mathematics Curriculum.*

Eisenberg, T. (1991). 함수 그리고 함수와 관련된 학습 장애. In D. Tall (Ed), Advanced mathematical thinking. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 류희찬·조완영·김인수(공역)(2003), 고등수학적 사고. 서울: 경문사.

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In Hiebert, J. (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics,* 1-23. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Klein, F. (1968). Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, vierte Auflage, Bd. 1. Verlag von Julius Springer.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the Function Concept : A Brief Survey, *The College Mathematics Journal, 20(4)*, 187-206.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* New York : Oxford University Press.

NCTM (1989). 수학교육 과정과 평가의 새로운 방향[Curriculum and evaluation standards for school Mathematics]. 구광조·오병승·류희찬 (공역) (2003). 서울, 경문사.

Tall, D.(류희찬·조완영·김인수 옮김) (2003), 고등수학적 사고, 서울, 경문사.

Vinner, S.(1983). Concept Definition, Concept Image and the Notion of Function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14(3)*, 293-305.

________(1992). The function concept as a prototype for problems in mathematics learning. In E. Dubinsky, & G. Harel (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy, 25*, 195-214.

Washington, DC: MAA
Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20(4)*, 356-366.
http://www.kma.go.kr/weather/main.jsp 기상청 사이트에서 지역별 중기예보를 참고함.

An Analysis on the Understanding of Middle School Students about the Concept of Function Based on Integrated Understanding

Lee, Young Kyoung
Geumcheon Middle School, Chongju-si, Chungchongbukdo, 360-803, Korea
E-mail : yklee33@hanmail.net

Kim, Eun Sook
Bokdae Middle School, Chongju-si, Chungchongbukdo, 28416, Korea
E-mail : eskim0913@hanmail.net

Lee, Ha Woo
Cheongju Middle School, Chongju-si, Chungchongbukdo, 28541, Korea
E-mail : sockrain@hanmail.net

Cho, Wan Young†
Dept. of Mathematics Education, Chungbuk National Univeristy, Chongju-si, Chungchongbukdo, 28644, Korea
E-mail : wycho@cbu.ac.kr

The purpose of this study is to investigate how first and second graders in middle school take in integrated understanding about the concept of function.

The data was collected through the questionnaire conducted by the first and second-year students at A, B middle school in Cheongju. The questionnaire consisted of 14 questions related to the extent of understanding a concept of function, the ability to express function and to translate function. The results are summarized as follows.

First, the percentage of correct answer made a difference according to the types of representation. Questions leading students to translate a task into a table or an equation showed quite high correct response rates. However, questions asking students to translate a task into graphs showed high incorrect responses.

Second, the result shows that students have the different viewpoints depending on their grades when they have to determine whether the suggested situation belongs to function. The first-year students tended to consider function as the concept of 'definition'. On the other hand, the second-year students emphasized 'equation' of function.

Finally, only a few students can distinguish the various situations and representations into the definition of function. This result shows that students didn't get the integrated understanding of the concept of function.

* ZDM Classification : D34
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D70
* Key Words : integrated understanding, the concept of function
† Corresponding author