

# 전달행렬법을 이용하여 비틀림 각과 회전관성을 고려한 보의 진동해석

## Analysis of Vibration for the Pre-twisted Beam Considering the Effect of Rotary Inertia Using the Transfer Matrix Method

이 정 윤<sup>†</sup>

Jung Youn Lee

(Received February 25, 2016 ; March 21, 2016 ; Accepted March 21, 2016)

**Key Words :** Transfer Matrix Method(전달행렬법), Coupled Bending-bending Vibration(연성된 굽힘-굽힘 진동), A Twisted Rayleigh Beam(비틀림 각을 갖는 레일리 보), Hamilton's Principle(해밀턴 원리), Rotary Inertia(회전관성)

### ABSTRACT

In this study, a transfer matrix method (TMM) for a twisted uniform beam considering the effect of rotary inertia is developed, and the differential equation and the displacements and forces are derived from Hamilton's principle. The particular transfer matrix is derived by applying the distributed mass and transcendental function while using a local coordinate system. In addition, the results obtained from this method are independent for a number of subdivided elements, and this method can determine the exact solutions for the free vibration characteristics of a twisted uniform Rayleigh beam. To validate the accuracy of the proposed TMM, the computed results are compared with those reported in the existing literature, and the comparison results indicate notably good agreement. In addition, the method is used to investigate the effects of rotary inertia for a twisted beam.

### 1. 서 론

지난 수십 년 동안, 터빈 블레이드, 펌프 임펠러, 헬리컬 기어, 드릴, 헬리콥터의 로터 블레이드와 같이 초기 비틀림 각을 가지는 구조물들이 많이 사용되어왔다. 따라서 초기 비틀림 각을 갖는 보의 동특성 해석은 매우 중요하다고 할 수 있다. 이러한 보의 동특성을 구하기 위해 유한요소법, 전달행렬법과 같은 다양한 수치해석방법들이 연구되었고 지금까지도 많은 연구자들이 연구를 수행하고 있다.

Murthy<sup>(1)</sup>은 전달행렬법을 사용하여 비균일 로터 블레이드를 집중질량으로 모델링하여 동특성을 구하였으며 Banerjee<sup>(2)</sup>는 동강성법을 사용하여 비틀림 각을 갖는 보의 동특성을 정확하게 해석하였다. Lin<sup>(3)</sup> 등은 오일러 보 대한 비틀림의 효과를 확인하기 위해 집중 질량을 이용하여 전달행렬법을 사용하였으며 Rosen<sup>(4)</sup> 등은 비틀림 각을 갖는 보에 대한 연구 논문들은 정리하였고 Yoo 등<sup>(5)</sup>은 복합 변형 변수 기반의 모델링 방법을 이용하여 집중질량을 갖고 초기 비틀림 각을 가지며 회전하는 블레이드의 진동해석을 수행하였다. Yardimoglu 등<sup>(6)</sup>은 비틀림

<sup>†</sup> Corresponding Author; Member, School of Mechanical System Design Engineering, Kyonggi University  
E-mail : jylee@kyonggi.ac.kr

<sup>‡</sup> Recommended by Editor Gi-Woo Kim

© The Korean Society for Noise and Vibration Engineering

각을 갖는 보의 연성 굽힘 진동을 가우스 르장 수치 적분을 사용하여 유한요소 모델을 해석하였다. Ho 등<sup>(7)</sup>은 축 방향 하중을 받고 불균일하고 비틀림 각을 갖는 티모셴코 보의 자유 횡 진동을 해석하기 위해 해밀턴의 원리에 기초한 미분변환법을 사용하였다. Attar 등<sup>(8)</sup>은 전달행렬법을 사용하고 Hallauer 등<sup>(9)</sup>과 Gupta<sup>(10)</sup>는 동강성법을 사용하여 보의 자유 굽힘 진동 해석하였다. 최근에 Lee 등<sup>(11)</sup>이 전달행렬법을 사용하여 초기 비틀림 각을 갖는 오일러 보의 굽힘 진동의 완전해를 해석하였지만 아직까지 회전관성을 고려한 레일리 보의 완전해는 없는 실정이다.

따라서, 여기서는 전달행렬법을 사용하여 초기 비틀림각을 갖고 회전관성이 고려된 레일리 보 (Rayleigh beam)에 대한 동특성의 정확 해를 구하는 방법을 제안한다. 전달행렬법은 유한요소법에 비해 계산의 과정이 단순하며 상태 벡터 전달 과정을 명확하게 해석할 수 있어 보와 같은 일차원 구조물의 진동해석을 매우 단순하고 효과적으로 빠르게 해석할 수 있는 방법이기 때문이다.

제안된 방법은 기존의 장행렬(field matrix)와 점행렬(point matrix)로 구성된 전달행렬법과는 다르게 통합된 전달행렬만이 존재하므로 1개의 요소를 사용하여도 무한한 고유진동수를 정확하게 얻을 수 있다. 이 방법의 검증하기 위하여 기존의 논문의 결과와 비교하였다.

## 2. 이론

### 2.1 미분 방정식

Fig. 1에 길이가  $L$ 인 비틀림 각을 갖는 보의 사용된 기호를 나타내었다. 여기서,  $XYZ$ 는 전체 좌표계이고  $xyz$ 는 국부 좌표계이며,  $O$ 점에서의 비틀림 각은  $0^\circ$ 이고 길이  $L$ 에서의 비틀림 각은  $\beta$ 이다. 비틀림 각을 갖는 보의 미분 방정식은 해밀턴의 원리 (Hamilton's Principle; 부록 (A.8),(A.9) 참조)사용

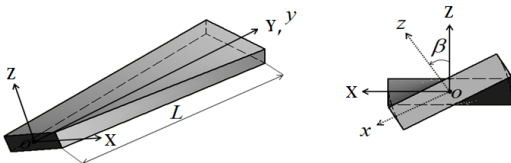


Fig. 1 Coordinate system and notation

하여 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$EI_{ZZ}(u'''' + 2kw''' - 2k^2u'' - 2k^3w' + k^4u) + 2kEI_{XX}(w'''' - 2ku''' - k^2w'') - k^2w' + \rho A\ddot{u} - \rho I_{XX}\ddot{w}'' = 0 \tag{1}$$

$$EI_{XX}(w'''' - 2ku''' - 2k^2w'' + 2k^3u' + k^4w) - 2kEI_{ZZ}(u''' + 2kw'' - k^2u') + \rho I_{YY}\ddot{w} - \rho I_{YY}\ddot{u}'' = 0 \tag{2}$$

여기서 '와 °는 거리  $y$ 와 시간  $t$ 에 대한 미분이며  $k = \beta/L$ 로 길이에 따른 비틀림률이다.  $x$ 방향 변위  $u$ 와  $z$ 방향 변위가  $w$ 가 각속도  $\omega$ 로 조화운동을 한다고 가정하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{cases} u(y, t) = U(y)e^{i\omega t} \\ w(y, t) = W(y)e^{i\omega t} \end{cases} \tag{3}$$

식 (3)을 식 (1)과 식 (2)에 대입하면 다음 식과 같이 유도할 수 있다.

$$EI_{ZZ}U'''' - 2k^2(EI_{ZZ} + 2EI_{XX})U'' + k^4EI_{ZZ}U + 2k(EI_{XX} + EI_{ZZ})W'''' - 2k^3(EI_{XX} + EI_{ZZ})W'' - \rho A\omega^2U + \rho I_{XX}\omega^2U'' = 0 \tag{4}$$

$$EI_{XX}W'''' - 2k^2(EI_{XX} + 2EI_{ZZ})W'' + k^4EI_{XX}W - 2k(EI_{XX} + EI_{ZZ})U'''' + 2k^3(EI_{XX} + EI_{ZZ})U' - \rho A\omega^2W + \rho I_{XX}\omega^2W'' = 0 \tag{5}$$

식 (4)와 식 (5)는 정리하면 다음과 같이 유도된다.

$$D^8\Psi + 4k^2(1+c)D^6\Psi + (6-a-b-8c-8c/r-8rc+4c^2)k^4D^4\Psi + \{4+6(a+b)+4c-2ac-2bc\}k^6D^2\Psi + (1-a)(1-b)k^8\Psi = 0 \tag{6}$$

여기서  $\Psi = U$  or  $W$ ,  $D = \frac{d}{dy}$ ,  $a = \frac{\rho A\omega^2}{EI_{ZZ}k^4}$ ,  $b =$

$\frac{\rho A\omega^2}{EI_{XX}k^4}$ 이며  $r = EI_{XX}/EI_{ZZ}$ 은 강성 비이고  $c = \rho\omega^2/(2Ek^2)$ 이다. 식 (6)의 해를 다음과 같이 가정하고

$$\Psi = e^{\lambda y} \tag{7}$$

식 (7)을 식 (6)에 대입하면 다음과 같이 8계 상미분방정식이 유도된다.

$$\lambda^8 + 4k^2(1+c)\lambda^6 + (6-a-b-8c-8c/r-8rc+4c^2)k^4\lambda^4 + \{4+6(a+b)+4c-2ac-2bc\}k^6\lambda^2 + (1-a)(1-b)k^8 = 0 \quad (8)$$

식 (8)의 일반해는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U(y) = \sum_{j=1}^8 A_j e^{\lambda_j y} = A_1 e^{\lambda_1 y} + A_2 e^{\lambda_2 y} + A_3 e^{\lambda_3 y} + A_4 e^{\lambda_4 y} + A_5 e^{\lambda_5 y} + A_6 e^{\lambda_6 y} + A_7 e^{\lambda_7 y} + A_8 e^{\lambda_8 y} \quad (9)$$

$$W(y) = \sum_{j=1}^8 B_j e^{\lambda_j y} = B_1 e^{\lambda_1 y} + B_2 e^{\lambda_2 y} + B_3 e^{\lambda_3 y} + B_4 e^{\lambda_4 y} + B_5 e^{\lambda_5 y} + B_6 e^{\lambda_6 y} + B_7 e^{\lambda_7 y} + B_8 e^{\lambda_8 y} \quad (10)$$

한편  $x$  축과  $z$  축에 대한 굽힘 회전각은 각각  $\theta_x$  와  $\theta_z$  이다<sup>(2)</sup>.

$$\theta_x = \frac{dW}{dy} - \frac{\beta}{L} U(y) = kW' - kU \quad (11)$$

$$\theta_z = -\frac{dU}{dy} - \frac{\beta}{L} W(y) = -kU' - kW \quad (12)$$

따라서 전단력과  $V_x, V_z$ 와 굽힘 모멘트인  $M_x, M_z$ 는 부록에 있는 식 (A.10)~식 (A.13)으로부터 다음 식과 같이 유도할 수 있다.

$$V_x = -EI_{ZZ}[U''' + 2k(1+r)W' - k^2(1+4r + \frac{\omega^2 \rho r}{k^2 E})U' - 2k^3 r W] \quad (13)$$

$$V_z = -EI_{ZZ}[rW''' - 2k(1+r)U' - k^2(4+r + \frac{\omega^2 \rho}{k^2 E})W + 2k^3 U] \quad (14)$$

$$M_x = -EI_{XX}(W'' - 2kU' - k^2 W) \quad (15)$$

$$M_z = EI_{ZZ}(U'' + 2W' - U) \quad (16)$$

**2.2 회전관성을 고려한 전달행렬법**

초기 비틀림 각을 갖는 레일리 보(Rayleigh beam)의

전달행렬을 구하기 위해 양쪽 경계조건을 이용하여 보의 변위, 기울기, 굽힘모멘트, 전단력을 구하면 다음과 같이 된다.

$$y=0: U=U_1, W=W_1, \theta_x=\theta_{x_1}, \theta_z=\theta_{z_1} \quad (17)$$

$$y=l: U=U_2, W=W_2, \theta_x=\theta_{x_2}, \theta_z=\theta_{z_2} \quad (18)$$

$$y=0: V_x=V_{x_1}, V_z=V_{z_1}, M_x=M_{x_1}, M_z=M_{z_1} \quad (19)$$

$$y=l: V_x=-V_{x_2}, V_z=-V_{z_2}, M_x=-M_{x_2}, M_z=-M_{z_2} \quad (20)$$

$\{Z\}_k = [U, W, \theta_x, \theta_z, M_x, M_z, V_x, V_z]^T$ 와  $\{Z\}_{k+1} = [U, W, \theta_x, \theta_z, M_x, M_z, V_x, V_z]^T$ 를 각각  $k$ 번째 초기 비틀림 각을 갖는 보요소의  $y=0$ 와  $y=l$ 에서 상태벡터라고 하면 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$\{Z\}_{k+1} = [T_{ij}]_k \{Z\}_k \quad (21)$$

여기서  $[T_{ij}]_k$ 는  $k$ 번째 초기 비틀림 각을 갖는 보요소의 전달행렬이다. 초기 비틀림 각을 갖는 보가  $n$ 개의 요소로 구성되어 있을 때 한쪽 끝단에서 다른 쪽 끝단까지 순차적으로 연산을 행하면 전체 전달행렬식은 다음과 같이 된다.

$$\{Z\}_{n+1} = [T_{ij}] \{Z\}_1 \quad (22)$$

여기서  $[T_{ij}] = [T_{ij}]_n [T_{ij}]_{n-1} \dots [T_{ij}]_k \dots [T_{ij}]_2 [T_{ij}]_1$ 으로 초기 비틀림 각을 갖는 보의 전체 전달행렬이다. 이와 같은 방법을 통하여 초기 비틀림 각을 가지는 레일리 보에 대한 전달 행렬을 얻을 수 있으며 이를 이용하여 보의 동특성에 대한 정확 해를 구할 수 있다. 다양한 경계조건에 대한 초기 비틀림 각을 갖는 보의 동특성해석이 가능하지만, 여기서는 초기 비틀림 각을 갖는 외팔보의 동특성을 구한다.

외팔보의 고정단(1점)과 자유단( $n+1$ ) 길이가  $L$  이면 경계조건은 다음과 같다.

$$U(0), W(0), \theta_x(0), \theta_z(0) = 0 \quad (23)$$

$$V_x(L), V_z(L), M_x(L), M_z(L) = 0 \quad (24)$$

식 (23)과 식 (24)를 식 (22)에 대입하면

$$\begin{bmatrix} T_{55} & T_{56} & T_{57} & T_{58} \\ T_{65} & T_{66} & T_{67} & T_{68} \\ T_{75} & T_{76} & T_{77} & T_{78} \\ T_{85} & T_{86} & T_{87} & T_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_x(L) \\ V_z(L) \\ M_x(L) \\ M_z(L) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (25)$$

식 (25)이 유용해(nontrivial solution)를 갖기 위한 조건으로부터 고유진동수에 관한 방정식은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{vmatrix} T_{55} & T_{56} & T_{57} & T_{58} \\ T_{65} & T_{66} & T_{67} & T_{68} \\ T_{75} & T_{76} & T_{77} & T_{78} \\ T_{85} & T_{86} & T_{87} & T_{88} \end{vmatrix} = 0 \quad (26)$$

식 (26)을 이용하여 비틀림 각을 갖는 레일리 보에 대한 고유진동수의 정확 해를 구할 수 있다.

### 3. 결과 및 고찰

먼저 기존 논문<sup>(11)</sup>에서 사용된 보로 모델링하여 검토하였으며 제원은 Table 1과 같다.

외팔 보인 오일러 보와 회전관성이 고려된 레일리

**Table 1** Material properties for Euler beam

Notation	Description	Value
$EI_{zz}$	Bending stiffness of in-plane	2869.7 Nm <sup>2</sup>
$EI_{yy}$	Bending stiffness of out-of-plane	57393 Nm <sup>2</sup>
$m$	The mass per unit length	34.47 kg/m
$L$	The length of beam	3.048 m
$A$	The cross-sectional area	0.001483 m <sup>2</sup>
$\rho$	Density of the beam material	2700 kg/m <sup>3</sup>

**Table 2** The comparison results between Euler and Rayleigh theory

Mode	Natural frequencies(rad/s)					
	$\beta = 0^\circ$			$\beta = 40^\circ$		
	Present		Ref. (11)	Present		Ref. (11)
	Rayleigh	Euler	Euler	Rayleigh	Euler	Euler
1	3.452	3.453	3.453	3.471	3.471	3.471
2	15.440	15.442	15.442	13.340	13.341	13.341
3	21.638	21.640	21.640	25.163	25.167	25.167
4	60.586	60.594	60.594	56.358	56.368	56.368
5	96.685	96.779	96.779	103.173	103.263	103.263

보의 고유진동수를 5차까지 해석하였으며 이를 기존의 결과와 비교하여 Table 2에 나타내었고 이 때 끝단의 비틀림 각은 0°와 40°로 두 가지로 하였다. 해석 결과 오일러 보의 경우 기존 논문의 결과와 잘 일치하였으며 레일리 보가 오일러 보보다 고유진동수가 낮은 이유는 회전관성을 고려하였기 때문이다.

Table 3은 동일한 보를 한 개의 요소로 모델링한 경우와 균일하게 백분등하여 백 개의 요소로 모델링한 보의 고유진동수를 비틀림 각에 따라 비교한 것으로 두 경우 모두 일치하였다. 따라서 제안한 전달행렬법이 동일한 보인 경우 보를 나눈 개수와 무관하게 고유진동수가 일치하므로 완전해임을

**Table 3** The comparison of the natural frequency of a twisted blade obtained using different numbers of elements

Mode	Natural frequencies(rad/s)			
	$\beta = 0^\circ$		$\beta = 40^\circ$	
	1 element	100 elements	1 element	100 elements
1	3.452	3.452	3.471	3.471
2	15.440	15.440	13.340	13.340
3	21.638	21.638	25.163	25.163
4	60.586	60.586	56.358	56.358
5	96.685	96.685	103.173	103.173

**Table 4** Effect of stiffness ratio on the non-dimensional natural frequencies of a Rayleigh twisted beam,  $\beta = 0^\circ$

$r$	Non-dimensional natural frequency					
	Mode					
	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
1	2.269	2.269	7.365	7.365	13.890	13.890
10	2.636	3.693	9.177	11.155	17.982	19.270
20	2.734	4.114	9.780	12.382	19.384	21.107
30	2.789	4.365	10.145	13.121	20.240	22.244
40	2.826	4.546	10.409	13.658	20.864	23.082
50	2.854	4.688	10.617	14.082	21.357	23.750
60	2.876	4.807	10.788	14.434	21.765	24.308
70	2.895	4.908	10.934	14.736	22.115	24.790
80	2.910	4.997	11.061	15.001	22.420	25.214
90	2.924	5.076	11.174	15.238	22.692	25.593
100	2.936	5.147	11.276	15.451	22.938	25.937

알 수 있었다.

Table 4 ~ Table 6에 비틀림 각  $\beta$ 가  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  일 때 무차원 보의 고유진동수를 강성비  $r = I_{zz}/I_{xx}$ 의 변화에 따라 모드 별로 나타내었다. 보의 길이는  $L=1$ , 단위 질량은  $m=1$ , 세로탄성계수는  $E=1$ , 단면이차모멘트는  $I_{xx}=1$ ,  $I_{zz}=r$ 로 하였다. 강성

**Table 5** Effect of stiffness ratio on the non-dimensional natural frequencies of a Rayleigh twisted beam,  $\beta = 45^\circ$

r	Non-dimensional natural frequency					
	Mode					
	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
1	2.269	2.269	7.365	7.365	13.890	13.890
10	2.092	4.449	8.739	11.618	18.050	19.376
20	1.914	5.276	9.280	12.930	19.848	21.085
30	1.785	5.707	9.775	13.590	21.246	21.985
40	1.685	5.932	10.282	13.968	22.417	22.595
50	1.604	6.040	10.790	14.199	22.857	23.632
60	1.537	6.081	11.283	14.350	23.094	24.663
70	1.480	6.081	11.748	14.461	23.250	25.617
80	1.430	6.058	12.172	14.560	23.351	26.492
90	1.386	6.021	12.541	14.670	23.414	27.288
100	1.347	5.975	12.842	14.814	23.451	28.003

**Table 6** Effect of stiffness ratio on the non-dimensional natural frequencies of a Rayleigh twisted beam,  $\beta = 90^\circ$

r	Non-dimensional natural frequency					
	Mode					
	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
1	2.269	2.269	7.364	7.366	13.890	13.890
10	1.656	4.502	9.392	11.449	18.741	19.249
20	1.392	4.663	10.685	12.709	19.580	22.538
30	1.241	4.555	10.960	14.134	19.835	24.665
40	1.137	4.405	10.882	15.429	20.011	25.751
50	1.060	4.257	10.708	16.392	20.320	26.200
60	0.999	4.120	10.508	16.953	20.871	26.357
70	0.950	3.995	10.304	17.178	21.626	26.391
80	0.909	3.882	10.105	17.201	22.454	26.389
90	0.873	3.779	9.915	17.131	23.431	26.497
100	0.842	3.684	9.733	16.989	23.871	26.577

비  $r=1$ 일 때 비틀림 각에 관계없이 1차, 2차 고유진동수와 3차, 4차 고유진동수 그리고 5차, 6차 고유진동수가 동일 한 것은 보의 단면이 정사각형이어서  $x$ 방향과  $z$ 방향의 진동 모드가 같기 때문이다. 여기서 1차, 3차, 5차는  $x$ 방향 진동 모드이고 2차, 4차, 6차는  $z$ 방향의 진동 모드이다.

Table 4의 비틀림 각  $\beta=0^\circ$ 인 경우 강성비가 적을 때는 모든 차수의 고유진동수가 빠르게 증가하다가 강성비가 클수록 증가속도가 감소하였다.

Table 5의 비틀림 각  $\beta=45^\circ$ 인 경우 강성비 증가에 따라 1차 고유진동수는 감소하였고 2차 고유진동수는 초기에는 증가하다가 감소하였으며 나머지 차수의 고유진동수는 증가함을 알 수 있었다.

Table 6의 비틀림 각  $\beta=90^\circ$ 인 경우는 강성비 증가에 따라 1차 고유진동수는 감소하였고 2차, 3차 고유진동수는 초기에는 증가하다가 감소하였으며 나머지 차수의 고유진동수는 증가함을 알 수 있었다. 이는 비틀림 각이 증가됨에 따라  $x$ 방향과  $z$ 방향의 진동 모드가 강하게 연성(coupling)이 되었기 때문이다.

Fig. 2 ~ Fig. 4는 비틀림 각  $\beta$ 가  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ 일 때 강성비  $r = I_{zz}/I_{xx}$ 의 변화에 따라 회전관성을 고려한 레일리 보의 고유진동수를 동일한 조건인 오일러 보의 고유진동수로 나누어 나타낸 그림이다. 비틀림 각  $\beta$ 에 관계없이  $r=1$ 일 때 고유진동수의 꼭 지점이 발생한 것은  $I_{zz} = I_{xx}$ 이므로  $x$ 방향과  $z$ 방향의 고유진동수가 같았기 때문이다.

Fig. 2에서 1, 3, 5차 고유진동수 보다 2, 4, 6차 고유진동수가 강성비  $r$ 증가에 따라 급격히 감소한 이유는  $z$ 방향의 강성이 증가로 인해 회전관성의 영향이 더 크기 때문이다.

Fig. 3에서는 강성비  $r$ 의 증가에 따라 1차 고유진동수는 점차 감소하였고 2차 고유진동수는 처음에는 급격히 감소하였다가 강성비 증가에 따라 고유진동수 변화가 거의 없었다. 나머지 차수의 고유진동수 들은 강성비  $r$ 에 큰 변화를 보이지 않았으며 이는 비틀림 각의 영향으로 판단된다.

Fig. 4는 비틀림 각  $\beta=90^\circ$ 인 경우로 1차 및 2차 고유진동수는 점진적으로 감소하였으며 나머지 차수의 고유진동수는 강성비  $r$ 에 큰 변화를 보이지 않았고 고차일수록 회전관성의 영향을 많이 받음을 알 수 있었다.

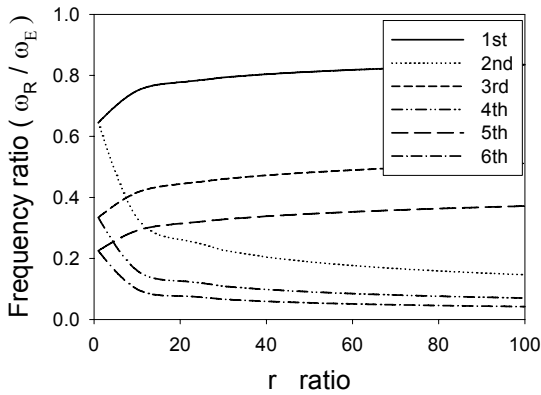


Fig. 2 Effect of stiffness ratio on the non dimensional natural frequencies of a twisted beam,  $\beta = 0^\circ$

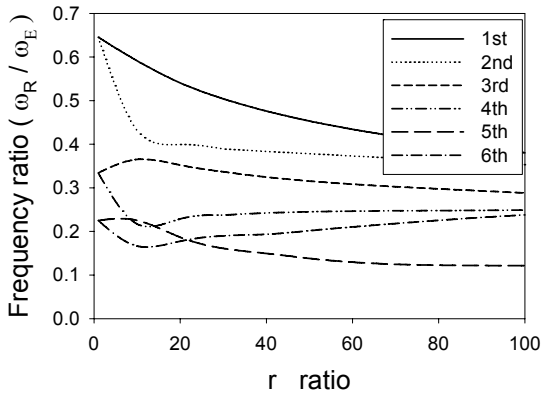


Fig. 3 Effect of stiffness ratio on the non dimensional natural frequencies of a twisted beam,  $\beta = 45^\circ$

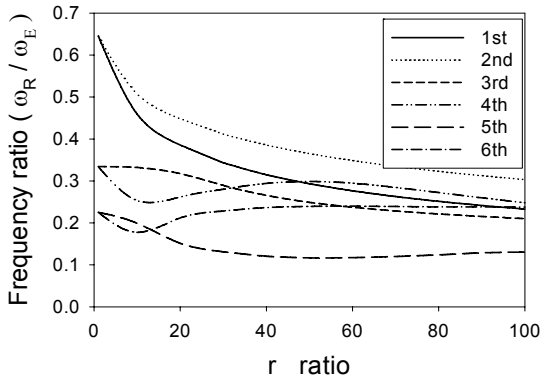


Fig. 4 Effect of stiffness ratio on the non dimensional natural frequencies of a twisted beam,  $\beta = 90^\circ$

따라서 비틀림 각  $\beta$ 와 강성비  $r$ 에 관계없이 모든 고유진동수가 오일러 보의 고유진동수 보다 낮아짐을 알 수 있었다. 이는 보의 회전관성이 진동에 영향을 주었기 때문이다.

### 5. 결 론

이 연구에서 제안된 방법은 단 한 개의 요소만으로 회전관성이 고려된 레일리 보(Rayleigh beam)의 정확한 고유진동수와 모드형상을 얻을 수 있었다.

(1) 해밀턴 원리를 사용하여 초기 비틀림 각을 갖는 레일리 보의 동특성을 구할 수 있는 미분 방정식을 나타내었다.

(2) 전달행렬법을 사용하여 초기 비틀림 각을 갖는 레일리 보의 동특성을 정확히 얻을 수 있는 방법을 제시하였다.

(3) 질량이 집중 질량(lumped mass)이 아닌 등분포 질량을 고려하는 방법을 제시하였다.

(4) 제안된 방법을 통하여 초기 비틀림 각과 회전관성이 있을 경우 보의 고유진동수가 감소하는 것을 알 수 있었다.

### 후 기

이 연구는 2013학년도 경기대학교 교내연구 지원에 의하여 수행되었음.

### References

- (1) Murthy, V. R., 1976, Dynamic Characteristics of Rotor Blades, Journal of Sound and Vibration, Vol. 49, No. 4, pp. 483~500.
- (2) Banerjee, J. R., 2001, Free Vibration Analysis of a Twisted Beam Using the Dynamic Stiffness Method, International Journal of Solids and Structures, Vol. 38 No. 38-39, pp. 6703~6722.
- (3) Lin, S. M., 1997, Vibrations of Elastically Restrained Nonuniform Beams with Arbitrary Pretwist, AIAA, Vol. 35, No. 11, pp. 1681~1687.
- (4) Rosen, A., 1991, Structural and Dynamic Behavior of Pretwisted Rods and Beams, Applied Mechanics Reviews, Vol. 44, No. 12, pp. 483~515.
- (5) Yoo, H. H, Kwak, J. Y. and Chung, J., 2001,

Vibration Analysis of Rotating Pre-twisted Blades with a Concentrated Mass, Journal of Sound and Vibration, Vol. 240, No. 5, pp. 891~908.

(6) Yardimoglu, B. and Yildirim, T., 2004, Finite Element Model for Vibration Analysis of Pre-twisted Timoshenko Beam, Journal of Sound and Vibration, Vol. 273, No. 4-5, pp. 741~754.

(7) Ho, S. H. and Chen, C. K., 2006, Free Transverse Vibration of an Axially Loaded Non-uniform Spinning Twisted Timoshenko Beam Using Differential Transform, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 48, No. 11, pp. 1323~1331.

(8) Attar, M. A., 2012, Transfer Matrix Method for Free Vibration Analysis and Crack Identification of Stepped Beams with Multiple Edge Cracks and Different Boundary Conditions, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 57, No. 1, pp. 19~33.

(9) Hallauer, Jr. W. L. and Liu, R. Y. L., 1982, Beam Bending-torsion Dynamic Stiffness Method for Calculation of Exact Vibration Modes, Journal of Sound and Vibration, Vol. 85, No. 1, pp. 105~113.

(10) Gupta, K. K., 1976, On a Finite Dynamic Element Method for Free Vibration Analysis of Structures, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 9, No. 1, pp. 105~120.

(11) Lee, J. W. and Lee, J. Y., 2016, Development of a Transfer Matrix Method to Obtain Exact Solutions for the Dynamic Characteristics of a Twisted Uniform Beam, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 105, pp. 215~226.

**부 록**

초기 비틀림 각을 갖는 보의 굽힘에 의한 변형 에너지와 단면이차모멘트는 다음과 같이 표현된다<sup>(2)</sup>.

$$\begin{aligned}
 U_b &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \varepsilon_y^2 E dA dy \\
 &= \frac{1}{2} EI_{XX} \int_0^L (w'' - 2ku' - k^2w)^2 dy \\
 &\quad + \frac{1}{2} EI_{ZZ} \int_0^L (u'' + 2kw' - k^2u)^2 dy
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

여기서  $I_{XX}$ 와  $I_{ZZ}$ 는 국부 좌표계  $x, z$ 에서의 단면 이차모멘트로 다음과 같다.

$$I_{XX} = \int_A z^2 dA \tag{A.2}$$

$$I_{ZZ} = \int_A x^2 dA \tag{A.3}$$

또한 초기 비틀림 각을 갖는 보의 운동에너지  $T$ 는 다음과 같이 유도된다.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \rho I_x \dot{\theta}_x^2 + \rho I_z \dot{\theta}_z^2 dy \tag{A.4}$$

해밀턴 원리를 사용하면 다음과 같다.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U - T) dt = 0 \tag{A.5}$$

식 (A.1)과 식 (A.4)을 식 (A.5)에 대입하고 변분량  $\delta$ 를 사용하면 다음 식이 유도된다.

$$\begin{aligned}
 \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \{ &EI_{XX}(w'' - 2ku' - k^2w)(\delta w'' - 2k\delta u' - k^2\delta w) \\
 &+ EI_{ZZ}(u'' + 2kw' - k^2u)(\delta u'' + 2k\delta w' - k^2\delta u) \\
 &- \rho A \dot{u} \delta \dot{u} - \rho A \dot{w} \delta \dot{w} - \rho I_x \dot{\theta}_x \delta \dot{\theta}_x - \rho I_z \dot{\theta}_z \delta \dot{\theta}_z \} dy dt = 0
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

식 (A.6)을 부분 적분하여 정리하면 다음과 유도된다.

$$\begin{aligned}
 \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \{ &EI_{XX}(w'''' - 2ku''' - k^2w'')\delta w + 2kEI_{XX}(w''' \\
 &- 2ku'' - k^2w')\delta u - k^2EI_{XX}(w'' - 2ku' - k^2w)\delta w + EI_{ZZ} \\
 &(u'''' + 2kw''' - k^2u'')\delta u - 2kEI_{ZZ}(u''' + 2kw'' - k^2u')\delta w \\
 &- k^2EI_{ZZ}(u'' + 2kw' - k^2u)\delta u + \rho A \dot{u} \delta u + \rho A \dot{w} \delta w \\
 &- \rho I_{XX} \ddot{u} \delta u - \rho I_{ZZ} \ddot{w} \delta w \} dy dt \\
 &+ \int_0^L [-\rho A \dot{u} \delta u - \rho A \dot{w} \delta w - \rho I_{XX} \dot{u}' \delta u' - \rho I_{ZZ} \dot{w}' \delta w']_{t_1}^{t_2} dy \\
 &+ \int_{t_1}^{t_2} [EI_{XX}(w'' - 2ku' - k^2w)\delta w' - EI_{XX}(w''' - 2ku'' \\
 &- k^2w')\delta w + EI_{ZZ}(u'' + 2kw' - k^2u)\delta u' - EI_{ZZ}(u''' + 2kw'' \\
 &- k^2u')\delta u - 2kEI_{XX}(w'' - 2ku' - k^2w)\delta u + 2kEI_{ZZ}(u'' \\
 &+ 2kw' - k^2u)\delta w + \rho I_{XX} \ddot{u}' \delta u + \rho I_{ZZ} \ddot{w}' \delta w]_0^L dt = 0
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

식 (A.7)로부터  $\delta u$ 와  $\delta w$ 는 임의이므로 초기 비틀림 각을 갖는 레일리 보의 미분방정식과 전단력 모멘트는 다음과 같이 유도된다.

$$EI_{ZZ}(u'''' + 2kw'''' - 2k^2u'' - 2k^3w' + k^4u) + 2kEI_{XX}(w'''' - 2ku'' - k^2w') + \rho A\ddot{u} - \rho I_{XX}\ddot{u}'' = 0 \tag{A.8}$$

$$EI_{XX}(w'''' - 2ku'''' - 2k^2w'' + 2k^3u' + k^4w) - 2kEI_{ZZ}(u'''' + 2kw'' - k^2u') + \rho A\ddot{w} - \rho I_{ZZ}\ddot{w}'' = 0 \tag{A.9}$$

$$V_x = -EI_{ZZ}(u'''' + 2kw'' - k^2u') - 2kEI_{XX}(w'' - 2ku' - k^2w) + \rho I_{XX}\ddot{u}' \tag{A.10}$$

$$V_z = -EI_{XX}(w'''' - 2ku'' - k^2w') + 2kEI_{ZZ}(u'' + 2kw' - k^2u) + \rho I_{ZZ}\ddot{w}' \tag{A.11}$$

$$M_x = -EI_{XX}(w'' - 2ku' - k^2w) \tag{A.12}$$

$$M_z = EI_{ZZ}(u'' + 2kw' - k^2u) \tag{A.13}$$



**Jung Youn Lee** is Professor of Dept. of Mechanical System Engineering at Kyonggi University, where he has been since 1996. He received a B.S., an M.S. and his Ph.D. from Hanyang University in 1979, 1989 and 1992 respectively.

His research interests are in System Identification, Structural Modification, Inverse Problem, Modal Analysis and Sensitivity Analysis of Vibration.