

## A Study of Three-Dimensional Measurement By Transmission Deflectometry and Hilbert Transform

Silin Na and Younghun Yu<sup>†</sup>

Department of Physics, Jeju National University, Jeju 63243, Korea

(Received October 19, 2015; Revised manuscript March 31, 2016; Accepted April 8, 2016)

We used transmission deflectometry to measure the three-dimensional shapes of optical components, and we used the Hilbert transform to retrieve the phases from measured deformed fringe images. Deflectometry is useful for measuring large-scale samples, and specular samples. We have retrieved the phases from deformed fringe images and Hilbert-transformed images, and have used the least-squares method to find the height information. We have verified that phase retrieval using Hilbert transform is useful by computer simulation and experiment.

Keywords: Deflectometry, Phase measuring deflectometry, Hilbert transform

OCIS codes: (120.0120) Instrumentation, measurement, and metrology; (120.2650) Fringe analysis; (120.3940) Metrology

## Hilbert 변환과 투과형 편향법을 이용한 3차원 측정연구

나실인 · 유영훈<sup>†</sup>

제주대학교 물리학과

☎ 63243 제주시 아라1동 1번지

(2015년 10월 19일 받음, 2016년 3월 31일 수정본 받음, 2016년 4월 8일 게재 확정)

광학 부품 표면의 3차원 측정을 위하여 투과형 편향법을 이용하였다. 한 장의 영상으로부터 변화된 위상을 추출하기 위하여 Hilbert 변환을 이용하였다. 편향법은 면적이 비교적 크고 거울과 같이 산란이 거의 없는 물체의 3차원 측정을 하는데 유용하다. 편향법을 통해 얻은 왜곡 무늬와 hilbert 변환한 영상을 이용하여 위상을 구했으며, 이로부터 파면의 기울기를 측정하고, 구한 기울기로부터 3차원 프로파일을 구하기 위해 최소자승법을 이용하였다. 전산기 시뮬레이션과 실험을 통해 Hilbert 변환을 이용한 3차원 측정법이 유용함을 확인하였다.

Keywords: 편향법, 위상측정 편향법, 힐버트 변환

OCIS codes: (120.0120) Instrumentation, measurement, and metrology; (120.2650) Fringe analysis; (120.3940) Metrology

### I. 서 론

3차원 측정 방법은 매우 다양하게 개발되었고 현재 꾸준히 연구 중이다. 현재 개발된 측정 방법은 크게 2가지 방법, 즉 파면을 측정하는 방법과 파면의 기울기를 측정하는 방법이 있다<sup>[1-3]</sup>. 파면을 직접 측정하는 방법 중 대표적인 것이 간섭 방법이다. 간섭방법은 매우 정밀하게 3차원 형상을 측정 할 수 있는 방법이다. 그러나 간섭 방법은 굴곡이 매우 크거나 시료의 크기가 매우 큰 경우에는 측정에 어려움이 많다. 그리고 파면의 기울기를 측정하는 방법으로는 편향법 및 shear interferometry 방법 등이 있다. 편향법으로 잘 알려진 방법은

모아레, 론치 와 Shark-Hartmann 방법이 있다<sup>[4-9]</sup>. 편향법은 일반적으로 외부 환경에 덜 민감하다는 장점이 있고 시료의 크기가 커도 측정에 어려움이 덜한 장점이 있다.

최근 편향법 중에서 측정 정밀도가 상대적으로 높고, 주사 방법을 사용하지 않고 일정 면적을 한번에 측정 할 수 있고, 비교적 측정 시스템이 간단하며 외부환경에 덜 민감한 3차원 측정법으로 위상 측정 편향법 (PMD:Phase measuring deflectometry or fringe reflection method)이 제안되고 연구 되고 있다<sup>[10-13]</sup>. 위상 측정 편향법은 투과형과 반사형이 있는데 둘 다 기준 패턴 모양이 시료에 의해 변형된 모양을 분석하여 시료의 3차원 형상을 측정하는 방식이다.

<sup>†</sup>E-mail: [yyhyoung@jejunu.ac.kr](mailto:yyhyoung@jejunu.ac.kr)

Color versions of one or more of the figures in this paper are available online.

위상측정 편향법에서 위상을 추출하는 방법으로는 Fourier 변환을 이용하는 방법, 여러 패턴을 순차적으로 조사하고 측정하는 시간위상추적법 (TPU:Temporal Phase Unwrapping) 등이 연구되었다<sup>[14-16]</sup>. TPU 경우에는 위상을 추출하기 위해 여러 장의 영상을 필요로 하나, Fourier 변환을 이용하는 경우에는 단 1장의 영상만을 필요로 해서 빠른 측정이 가능하다는 장점이 있다. 최근 위상을 추출하는 방법으로 Hilbert 변환법이 제시 되었다<sup>[17-20]</sup>. Hilbert 변환 법 역시 Fourier 변환법과 같이 1장의 영상만으로 위상을 추출할 수 있는 장점이 있다. 그리고 Fourier 변환법은 주파수 공간으로 변환한 후 위상 추출을 하나, Hilbert 변환법은 주파수 공간으로 변환하지 않고 측정된 영상만으로 위상을 추출할 수 있는 장점이 있다. Hilbert 변환의 특성은 모든 주파수에서 크기는 변하지 않고 위상만 음의 주파수에선 +90도, 양의 주파수에선 -90도로 변화시켜주는 필터이다. 즉 어떤 주파수의  $\cos(\omega t)$  신호가 들어가면 항상  $\sin(\omega t)$  신호로 변환된다. 이를 이용하여 위상을 추출할 수 있다.

본 연구에서는 위상 측정 투과형 편향법과 Hilbert 변환을 이용하여, 일반렌즈와 코닉 렌즈의 3차원 형상을 측정하는 연구를 하였다.

## II. 이론적 배경 및 전산기 시능

### 2.1. 편향법 과 Hilbert 변환

Figure 1은 기본적인 투과형 편향법 실험의 측정 모델이다. 기본패턴은 모니터에 구현되고 이 패턴을 시료를 통해 CCD (Charged Coupled Device)로 기본 패턴의 변화를 측정 하는 방식이다.

투과형 광학 부품이 측정 경로에 놓인 경우 CCD에 맺히는 영상은 (1)식과 같이 주어진다<sup>[10,11]</sup>.

$$I(x,y) = a + b \cos \left[ \frac{2\pi x}{p} + \phi(x,y) \right] \quad (1)$$

식 (1)에서 a와 b는 각각 백그라운드 향과 빛 세기 변조 명암 비이고,  $p$ 는 스크린에 형성된 패턴의 주기,  $\phi(x,y)$ 는 시료에 의해 변형된 위상이다. 만일 시료면이 완벽히 평면이면  $\phi(x,y)$ 는 "0" 이다. 시료에 의해 변형된 위상  $\phi(x,y)$ 는 (2) 식과 같이 주어진다.

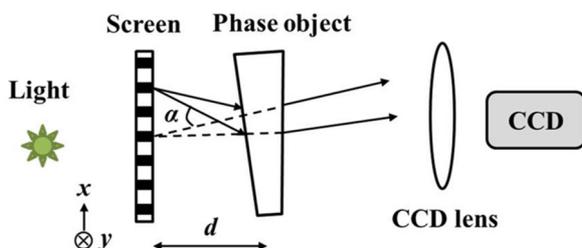


FIG. 1. Schematic diagram of transmission deflectometry.

$$\phi(x,y) = \frac{2\pi d}{p} \frac{\partial W}{\partial x} \quad (2)$$

식 (2)에서  $d$ 는 시료와 스크린까지의 거리이고,  $W$ 는 광경로차이다. 그러므로 시료에 의한 광경로차 기울기가 위상에 영향을 준다. 편향법에서  $\phi(x,y)$ 를 측정하기 위해 푸리에변환 방법(Fourier Transform method) 혹은 위상 이동 방법(Phase-shift method)이 많이 사용된다<sup>[14-16]</sup>. 본 연구에서는 hilber 변환 방법을 이용하여  $\phi(x,y)$ 를 측정하였다. Hilbert 변환은 식 (1)에서 위상항만  $\pi/2$ 만큼 이동시킨다. 즉  $f(x,y) = \cos(\phi(x,y))$ 의 Hilbert 변환결과는,

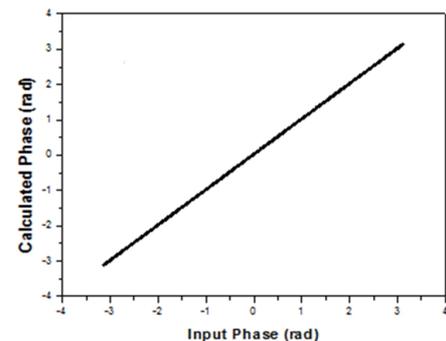
$HT(f(x,y)) = \sin(\phi(x,y))$ 와 같다. 그러므로 Hilbert 변환된 이미지와 실험적으로 얻은 이미지를 이용하여 얻은 위상  $\phi'$ 는 식 (3)과 같이 주어진다.

$$\phi' = \text{atan} \left[ \frac{HT\{f(x,y)\}}{f(x,y)} \right] \quad (3)$$

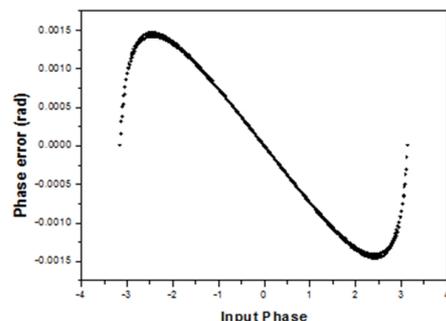
식 (3)에서 얻은  $\phi'$ 와 실제 위상  $\phi$ 와 약간의 차이가 있다. 이러한 차이는 Hilbert 변환 시 유한 영역에서 이루어지기 때문에 생기는 것이다<sup>[18,19]</sup>. 그 차이 값은 Fig. 2(b)와 같다.

그러므로 차이 값 ( $\epsilon$ )을 보정해 주어야 한다. 즉 Hilbert 변환을 통해 얻은 값을 식 (4)과 같이 보정해 주어야한다.

$$\phi = \phi' + \epsilon \quad (4)$$



(a)



(b)

FIG. 2. Calibration curve. (a) calibration curve between the input phase and calculated phase, and (b) phase error.

측정한  $\phi(x,y)$ 는 wrapped 위상으로 시료의 기울기를 얻기 위해서는 위상 펼침을 하여야 한다. 이로부터 시료의 기울기 데이터를 얻을 수 있으며, 이를 이용하여 식 (5)와 같이 최소자승법을 이용하여 시료의 3차원 형상을 계산할 수 있다 [21-23].

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{ij} = (H_{i+1,j} - H_{i,j})/h \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (5)$$

$$j = 1, 2, \dots, N$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{ij} = (H_{i,j+1} - H_{i,j})/h \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$j = 1, 2, \dots, N-1$$

식 (5)에서  $\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{ij}, \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{ij}$  는 각각 국소 위치  $(i,j)$ 의 x 축 및 y축 기울기이고  $h$ 는 데이터 간격,  $N$ 는 데이터 개수이고,  $H$ 는 시료의 높이이다.

### 2.2. 전산기 시늉

Figure 3은 reference pattern에 대한 Hilbert 변환 결과이다. Figure 3(a)는 reference pattern 영상이고 Fig. 3(b)는 Hilbert 변환한 영상이다. Figure 3(c)는 Fig. 3(a), (b) 내의 점선의 프로파일이다. Figure 3(c) 내의 실선은 기준 패턴의 프로파일이고 점선은 Hilbert 변환 한 패턴의 프로파일이다. Figure 3(c)에서 보면 예상 한 것과 같이 위상이  $\pi/2$  만큼 이동 한 것을 확인 할 수 있으나, 영상의 끝 부분에서 위상값이 달라진 것을 확인 할 수 있다. 이 값은 식 (4)를 이용하여 보정할 수 있다. 보정된 위상 값의 프로파일은 Fig. 3(d)와 같다. Figure 3(d) 내의 실선은 기준 패턴의 프로파일이고 점선은 Hilbert 변환 한 패턴의 프로파일이다. 보정 후 위상 값이 Hilbert 변환에 의해  $\pi/2$  만큼씩 이동 한 것을 확인 할 수 있다.

Figure 4는 투과형 편향법과 Hilbert 변환을 이용하여 시료의 기울기를 구하고, 최소자승법을 이용하여 시료의 3차원 형상을 구한 전산기 시늉 결과이다.

Figure 4(a)는 시료의 3차원 회색조 영상이고, Fig. 4(b)는 투과형 편향법에서 시료에 의해 왜곡된 줄무늬 패턴이다. Fig. 4(c)는 Fig. 4(b)를 Hilbert 변환한 영상이다. Figure 4(b)와 (c)를 비교하면 위상이  $\pi/2$  만큼 이동 한 것을 알 수 있다. Figure 4(d)는 위상 데이터인데, 이는 Fig. 4(b)(c)와 식 (3)을 이용하여 얻은 위상 데이터를 식 (4)를 이용하여 보정된 위상이다. Figure 4(d)의 위상 데이터와 기준면의 위상 데이터의 차이를 이용하여 시료의 위상을 얻을 수 있다<sup>[4,16]</sup>, 이렇게 구한 위상은 시료의 기울기를 나타낸다. 기울기와 식 (5)를 이용하여 얻은 형상의 회색조 영상은 Fig. 4(e)와 같다. Figure 4(f)는 Fig. 4(a) 및 (e) 내의 점선 부분의 프로파일이다. Figure 4(f)의 ●는 시료의 프로파일, ▼는 Hilbert 변환을 통해 얻은 위상을 이용하여 구한 프로파일이다. 두 프로파일 이 잘 일치 함 을 알 수 있다. Figure 4의 전산기 시늉으로부터 Hilbert 변환을 통해 위상을 추출 할 수 있고, 이를 이용하여 3차원 측정이 가능함을 확인할 수 있다.

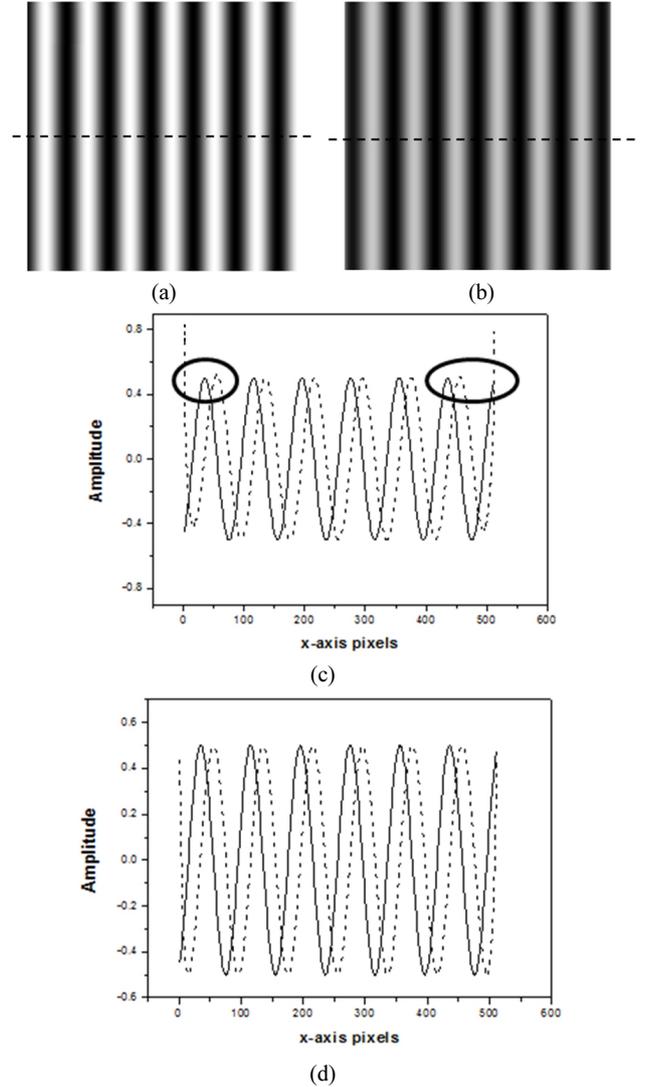


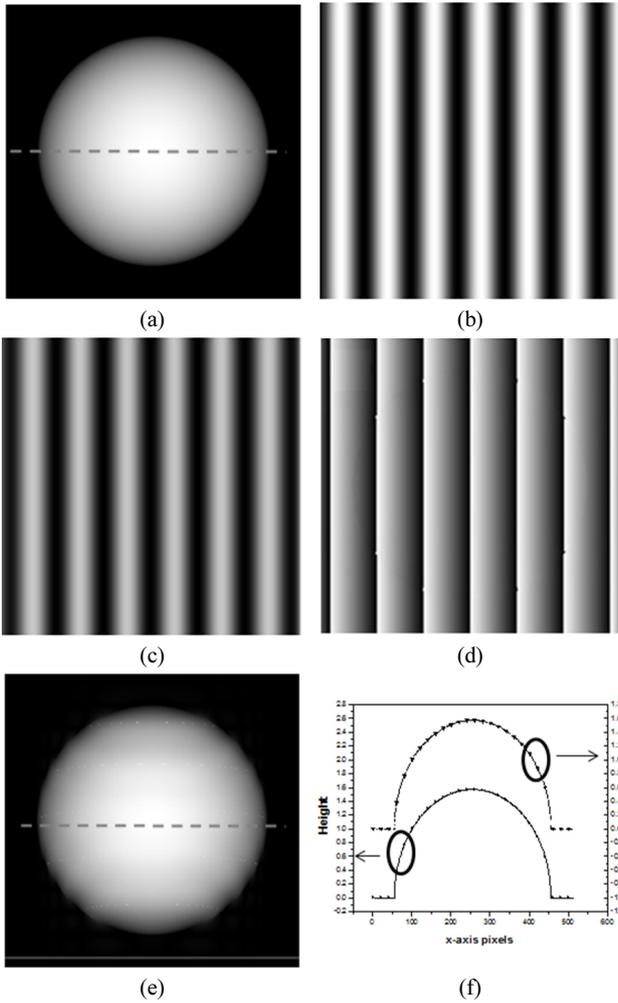
FIG. 3. Input image and hilbert transformed image. (a) input image, (b) hilbert transformed image, (c) profile of dotted line in Fig. 3 (a)(b), (d) calibrated profile

### III. 실험결과

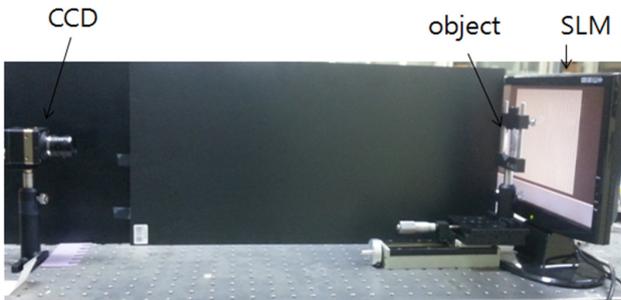
Figure 5는 실험장치의 도식도이다. 시료는 볼록렌즈(Edmund; PCX 32972)와 코닉렌즈 (Edmund;PCX Axicon 83783)를 사용하였다. 볼록렌즈의 직경은 50 mm, 곡률반경은 51.68 mm 이고, 코닉렌즈의 직경은 25.4 mm, apex 각도는  $170^\circ$ 이다. LCD에서 시료까지의 거리는 1cm, 시료에서 카메라까지의 거리는 78 cm이다.

Figure 6은 볼록렌즈를 이용하여 얻은 실험결과이다.

Figure 6(a),(c)는 시료에 의해 왜곡된 x-축 및 y-축의 패턴 이고 Fig. 6 (b),(d)는 Fig. 6(a),(c)를 hilbert 변환한 결과이다. 전산기 시늉 결과와 같이 줄무늬가  $\pi/2$  만큼 이동 한 것을 알 수 있다. 이를 이용하여 얻은 x축 및 y 축에 대한 위상은 각각 Fig. 6(e),(f) 이다. 이 위상의 범위는  $-\pi \leq \phi < \pi$ 이고, 이를 위상 펼침을 하여 기울기를 구할 수 있다. 기울기를 이

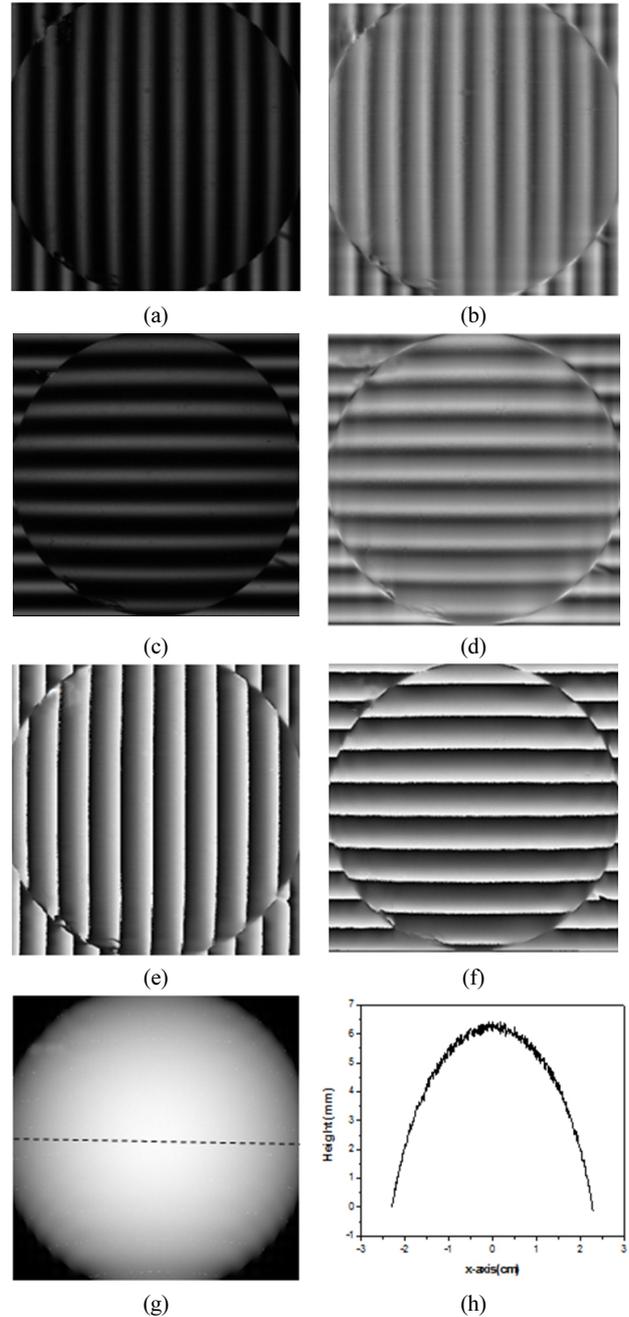


**FIG. 4.** Computer simulation result. (a) 3D grey level of object, (b) deformed fringe pattern, (c) hilbert transformed image of Fig. 2 (b), (d) calculated phase, (e) calculated 3D grey level image, (f) profile of object and calculated height.



**FIG. 5.** Transmission defelctometry experimental set-up. CCD: Charge Coupled Device, SLM: Spatial Light Modulator.

용하여 구한 시료의 3차원 높이에 대한 회색조 영상은 Fig. 6(g)와 같다. Figure 6(h)는 Fig. 6(g)내의 점선 부분의 프로파일이다. 이를 이용하여 얻은 시료의 곡률반경은  $51.71 \pm 0.05$  mm 이다, 본 실험이 투과형으로 이루어졌지만, 즉 시료의



**FIG. 6.** Experimental result of plano-convex lens. (a)(c) x-axis and y-axis deformed image, (b)(d) hilbert transformed image of Fig. 6(a)(c), (e)(f) calculated phase of x-axis and y-axis, (g) calculated 3D grey level image, (h) profile of dotted line in Fig. 6(g).

양면의 곡률반경의 영향을 측정 한 결과지만, 시료의 양면 중 한면의 곡률반경이 무한대 임으로 시료의 곡률 반경을 측정 한 것으로 간주 할 수 있다. 이 값은 렌즈 스펙 51.68 mm 값과 매우 유사함을 알 수 있다.

Figure 7은 코닉 렌즈에 대한 실험 결과이다. 코닉렌즈도 두 개의 면을 가지고 있는데, 본 실험에 사용된 코닉렌즈 한 면의 곡률 반경은 무한대이다. Figure 7(a)와 (b)는 코닉렌즈

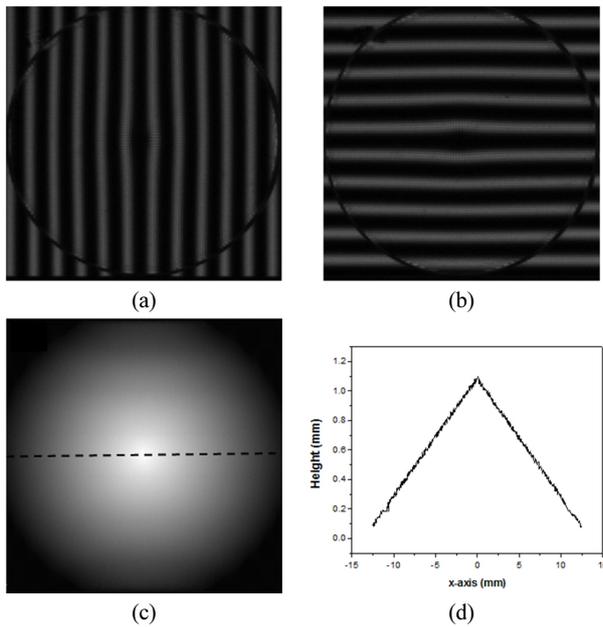


FIG. 7. Experimental result of plano-convex axicon lens. (a)(b) x-axis and y-axis deformed image, (c) calculated 3D grey level image, (d) profile of dotted line in Fig. 7(c).

에 의해 변형된 x축 및 y축의 줄무늬 영상이다. Figure 6와 같이 각각을 Hilbert 변환한 후 위상을 구하고 이를 이용하여 얻은 3차원 형상의 회색조 영상은 Fig. 7(c)와 같다. 코닉 렌즈의 기울기는  $4.98 \pm 0.03^\circ$  이었다. 이 값은 코닉렌즈의 스펙  $5^\circ$ 와 매우 유사하다.

#### IV. 결 론

3차원 측정 시 응용 분야에 따라 정확도 및 빠른 측정시간이 필요하다. 줄무늬 패턴을 이용한 3차원 측정 방법은 실험 장치가 간단하고, 진동과 같은 외부 환경에 덜 민감하기 때문에 3차원 측정에 많이 이용 된다. 줄무늬 패턴을 이용한 3차원 측정에서는 빠른 측정이 요구된다. 위상 변화를 측정하기 위해 일반적으로 푸리에변환법과 위상이동 방법을 많이 사용된다. 본 연구에서는 한 장의 영상을 이용하여 위상을 추출할 수 있는 Hilbert 변환법과 투과형 편향법을 이용하여 시료의 3차원 측정에 대한 연구를 하였다. 실험결과 Hilbert 변환과 이로부터 추출된 위상을 이론적으로 계산된 값을 이용하여 보정하면 3차원 측정이 가능함을 전산기 시뮬과 실험을 통해 확인하였다. Hilbert 변환을 이용하면 한 장의 측정 영상을 가지고 3차원 측정이 가능하기 때문에 빠른 3차원 측정이 가능하다.

#### 감사의 글

이 논문은 2014년도 “중소기업청 연구비 지원사업”에 의하여 연구되었음

#### References

1. D. Malacara, *Optical Shop Testing* (New York: Wiley Interscience; USA, 2007), Chapter 1-4.
2. G. G. Torales, M. Strojnik, and G. Paez, “Risley prisms to control wave-front tilt and displacement in a vectorial shearing interferometer,” *Appl. Opt.* **41**, 1380-1384 (2002).
3. G. G. Torales, G. Paez, M. Strojnik, J. Villa, J.L. Flores, and A.G. Alvarez, “Experimental intensity patterns obtained from a 2D shearing interferometer with adaptable sensitivity,” *Opt. Commun.* **257**, 16-26 (2006).
4. J. Pfund, N. Lindlein, J. Schwider, R. Burow, T. Blümel, and K.-E. Ellsner, “Absolute sphericity measurement: a comparative study of the use of interferometry and a Shack-Hartmann sensor,” *Opt. Lett.* **23**, 742-744 (1998).
5. H. Canabal and J. Alonso, “Automatic wavefront measurement technique using a computer display and a charge-coupled device camera,” *Opt. Eng.* **41**, 822-826 (2002).
6. C. Quan, W. Chen, and C. J. Tay, “Phase-retrieval techniques in fringe-projection profilometry,” *Opt. Lasers Eng.* **48**, 235-243 (2010).
7. C. D. Perciante and J.A. Ferrari, “Visualization of two-dimensional phase gradients by subtraction of a reference periodic pattern,” *Appl. Opt.* **39**, 2081-2083 (2000).
8. Z. Liu, X. Huang, and H. Xie, “A novel orthogonal transmission-virtual grating method and its applications in measuring micro 3-D shape of deformed liquid surface,” *Opt. Lasers Eng.* **51**, 167-171 (2013).
9. W. Shi, X. Huang, and Z. Liu, “Transmission-lattice based geometric phase analysis for evaluating the dynamic deformation of a liquid surface,” *Opt. Express*, **22**, 10559-10569 (2014).
10. M. C. Knauer, J. Kaminski, and G. Häusler, “Phase measuring deflectometry: a new approach to measure specular free-form surfaces,” *Proc. SPIE* **5457**, 366-376 (2004).
11. J. Horbach and T. Dang, “3D reconstruction of specular surfaces using a calibrated projector-camera setup,” *Mach. Vis. Appl.* **21**, 331-340 (2010).
12. Y. Tang, X. Su, Y. Liu, and H. Jing, “3d shape measurement of the aspheric mirror by advanced phase measuring deflectometry,” *Opt. Express* **16**, 15090-15096 (2008).
13. G. Häusler, C. Richter, K.H. Leitz, and M. C. Knauer, “Micro deflectometry a novel tool to acquire 3D micro topography with nanometer height resolution,” *Opt. Lett.* **33**, 396-398 (2008).
14. S. Shin and Y. Yu, “Determining the refractive index distribution of an optical component using transmission deflectometry with liquids,” *Korean J. Optics and Photonics*. **25**, 326-333 (2014).
15. M. Takeda and K. Mutoh, “Fourier transform profilometry for the automatic measurement of 3-D object shapes,” *Appl. Opt.* **22**, 3977-3982 (1983).
16. J. M. Huntley and H. O. Saldner, “Temporal phase unwrapping algorithm for automated interferogram analysis,” *Appl. Opt.* **32**, 3047-3052 (1993).

17. M. A. sutto, W. Zhao, S. R. McNeill, H. W. Schreier, and Y. J. Chao, "Development and assessment of single-image fringe projection method for dynamic application," *Exp. Mech.* **42**, 205-217 (2001).
18. V. D. Madjarova and H. kadono, "Dynamic electronic speckle pattern interferometry phase analyses with temporal hilbert transform," *Opt. Express* **11**, 617-623 (2003).
19. U. P. Kumar, N. K. Mohan, and M. P. Kothiyal, "Time average vibration fringe analysis using hilbert transformation," *Appl. Opt.* **49**, 5777-5786 (2010).
20. M. M. Hasan, K. Teramoto, and S. Tanemura, "Windowed fourier assisted two-dimensional hilbert transform for fringe phase extraction," *Optik* **124**, 3996-4000 (2013)
21. W. H. Southwell, "Wave-front estimation from wave-front slope measurements," *J. Opt. Soc. Am.* **70**, 998-1006 (1980).
22. L. Huang and A. Asundi, "Improvement of least-squares integration method with iterative compensations in fringe reflectometry," *Appl. Opt.* **51**, 7459-7465 (2012).
23. B. Rappaz, P. Marquet, E. Cuche, Y. Emery, C. Depeursinge, and P. J. Magistretti, "Measurement of the integral refractive index and dynamic cell morphometry of living cells with digital holographic microscopy," *Opt. Express* **13**, 9361-9373 (2005).