

전달행렬법을 이용하여 폭이 테이퍼진 회전하는 외팔보의 정확한 굽힘 진동해석

Exact Solution for Bending Vibration of Rotating Cantilever Beam with Tapered Width Using Transfer Matrix Method

이 정 우** · 광 종 훈** · 이 정 윤†

Jung Woo Lee, Jong Hoon Kwak and Jung Youn Lee

(Received November 20, 2015 ; Revised December 22, 2015 ; Accepted December 22, 2015)

Key Words : Bending Vibration(굽힘진동), Transfer Matrix Method(전달행렬법), Bernoulli-Euler Beam(베르누이-오일러 보), Rotating Beam(회전 보), Power Series(멱급수)

ABSTRACT

In this study, a transfer matrix method in which can produce an infinite number of accurate natural frequencies using a single element for the bending vibration of rotating Bernoulli-Euler beam with linearly reduced width, is developed. The roots of the differential equation in the proposed method are calculated using the Frobenius method in the power series solution. To demonstrate the accuracy of the method, the calculated natural frequencies are compared with the results given by using the commercial finite element analysis program(ANSYS), and the comparison results between these two methods show the excellent agreement. Based on the comparison results, a parametric study is performed to investigate the effect of the centrifugal forces on the non-dimensional natural frequencies for rotating beam with the variable width.

1. 서 론

지난 수십 년 동안 회전하는 보에 대한 연구는 실제 구조물의 설계에서 보다 정확한 결과들을 산출하기 위해 많은 연구자들에 의해 연구되었다⁽¹⁻⁴⁾. 회전하는 보의 코리올리 효과(Coriolis Effect), 전단변형, 회전관성 그리고 회전속도와 같은 고차 항들을 포함하고 있기 때문에 상당히 복잡하다. 하지만 적절한 가정을 통하여 이들의 영향을 무시할 수 있고 Bernoulli-Euler 보 문제로 단순화 할 수 있다^(5,6).

또한 터빈 블레이드, 헬리콥터 로터 블레이드, 풍력 터빈 블레이드와 같이 회전하는 보는 테이퍼진 단면을 가지고 있으며 많은 연구자들에 의하여 테이퍼진 보에 대한 형상 함수들이 연구되었다⁽⁵⁻⁷⁾. 특히 Lee 등⁽⁸⁾은 근사화된 복합 변형 변수를 이용하여 회전하는 테이퍼진 외팔보의 동적 특성의 변화를 연구하였으며 Banerjee⁽⁹⁾는 테이퍼진 보와 같이 불균일한 단면을 가지는 보의 균일한 계단 보(steped beam)를 사용하여 계산하였다.

형상함수를 가정하면 비교적 정확한 결과들을 산출할 수 있기 때문에 대부분의 연구에서 형상함수

† Corresponding Author; Member, School of Mechanical System Design Engineering, Kyonggi University
E-mail : jylee@kyonggi.ac.kr

* Member, KEPKO KPS Technology Research & Development Institute
** Mechanical Engineering, Kyonggi University

‡ Recommended by Editor Heung Soo Kim

© The Korean Society for Noise and Vibration Engineering

를 사용하였다. Banerjee⁽¹⁾와 Spyros⁽³⁾, Banerjee⁽⁹⁾ 등은 동강성 행렬을 사용한 유한요소법을 연구하였고, Chaudhari 등⁽²⁾은 Frobenius 방법을 사용한 직접해법을 연구하였다. Zhou 등⁽⁴⁾은 Rayleigh-Ritz 법을, Wang 등⁽⁵⁾은 스펙트럴 유한요소법, Gunda 등⁽⁶⁾은 3차와 5차 다항식 형상함수를 사용한 유한요소법을, Gunda 등⁽⁷⁾은 유리형 함수를 사용한 유한요소법을 테이퍼진보에 대한 동특성을 연구하기 위하여 사용하였다.

그러나 단면의 높이가 테이퍼진 보에 대한 연구가 대부분이고 폭이 테이퍼를 갖는 회전하는 보에 대한 연구는 제한적이며 정확해를 구하는 전달행렬법은 아직까지 연구되지 않았다.

여기서는 전달행렬법을 이용하여 선형적으로 테이퍼진 폭을 갖고 회전하는 보의 면내 굽힘 진동에 대한 정확해를 검토한다. 이를 위해 미분방정식의 해는 멱급수 해법 중 Frobenius 방법을 사용하였으며^(2,10) 제안된 방법의 타당성을 알아보기 위해 ANSYS를 사용하여 얻은 결과들과 비교하였다.

2. 이론

2.1 지배미분 방정식

Fig. 1은 감소된 폭을 갖고 회전하는 보를 나타낸 것으로 보 요소의 길이가 단면의 치수에 비해 충분히 길다고 가정하여 회전관성과 전단변형의 영향을

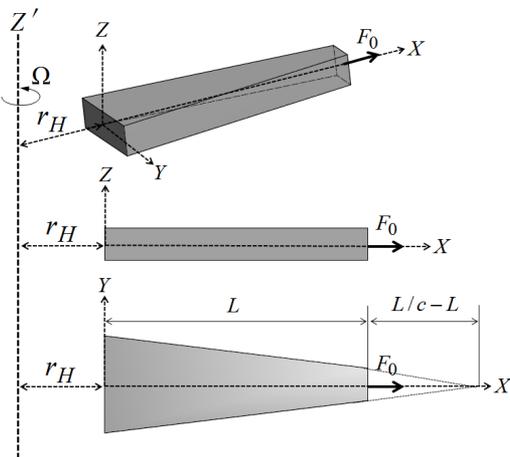


Fig. 1 Geometry of a rotating beam with linearly reduced width: (a) 3-D coordinate system, (b) side view, and (c) top view

무시하였다. 그림에서 XYZ는 전체 좌표계이고 L은 보의 총 길이, c는 테이퍼 비, r_H는 허브 반경이다. 테이퍼 비는 감소된 보의 폭을 보의 길이로 나눈 값이다. 또한, F₀는 보의 끝단에 작용하는 축력이고, Z'는 회전 중심축이고, Ω는 각 회전 속도이다.

다양한 변분의 원리를 사용하여 폭이 테이퍼진 회전하는 보의 미분방정식과 굽힘 모멘트, 전단력은 다음과 같다⁽¹⁰⁾.

$$(EI(x)w'')'' - (F(x)w')' + m(x)\ddot{w} = 0 \tag{1}$$

$$V = (EI(x)w'')' - F(x)w' \tag{2}$$

$$M = -EI(x)w'' \tag{3}$$

여기서 V는 전단력이고 M은 굽힘 모멘트이며 EI(x)와 m(x)는 테이퍼비의 영향으로 길이를 따라 변화하는 굽힘 강성과 단위 길이 당 질량이다⁽¹⁾.

$$EI(x) = EI_0 \left(1 - c \frac{x}{L}\right)^m \tag{4}$$

$$m(x) = m_0 \left(1 - c \frac{x}{L}\right)^n \tag{5}$$

여기서, c = (1 - b_i/b₀)이고, EI₀와 m₀는 c=0일 때의 굽힘 강성과 단위 길이 당 질량이다. 보의 높이가 일정하고 폭이 선형적으로 감소하는 경우는 m=1, n=1이며 동특성의 해⁽¹⁰⁾가 존재하고, 보의 높이가 선형적으로 감소하고 폭이 일정한 경우는 m=3, n=1이며 최근에 Lee 등⁽¹¹⁾에 의해 동특성의 해가 구해졌다. 또한 보의 높이와 폭이 선형적으로 변하는 원뿔 요소(conical element)인 m=4, n=2의 경우에도 Boiangiu 등⁽¹²⁾에 의해 동특성의 해가 베셀 함수(Bessel function)로 구해졌다.

보의 끝단에 작용하는 축력을 포함한 원심력은 다음과 같이 표현되고, F₀는 0으로 가정하여 무시할 수 있다.

$$F(x) = \int_x^L m_0 \Omega^2 (r_H + x) dx + F_0 \tag{6}$$

식(1)이 각 주파수(ω)를 갖는 조화진동이라고 가정한다면

$$w(x,t) = W(x)\cos \omega t \tag{7}$$

식 (1)에 식 (7)을 미분하여 대입하고 분수 분리 후 식 (4), (5)와 식 (6)의 미분을 대입하면 아래의 무차원 형태의 미분 방정식을 얻을 수 있다.

$$(1-\zeta)W'''' - 2W''' + \left\{ D_1 \left(\frac{\zeta^2}{2} - \frac{\zeta^3}{3} \right) + D_2 \left(\zeta - \frac{\zeta^2}{2} \right) + D_3 \right\} W'' + \{ D_1(\zeta - \zeta^2) + D_2(1-\zeta) \} W' + D_4(1-\zeta)W = 0 \tag{8}$$

여기서, $D_1 = \frac{m_0 \Omega^2 L^4}{EI_0 c^4}$, $D_2 = r_H \frac{m_0 \Omega^2 L^3}{EI_0 c^3}$ 이고 $D_3 = -D_1 \left(\frac{c^2}{2} - \frac{c^3}{3} \right) - D_2 \left(c - \frac{c^2}{2} \right) - \frac{F_0 L^2}{EI_0 c^2}$, $D_4 = -\frac{m_0 \omega^2 L^4}{EI_0 c^4}$ 이며 식 (8)을 단순화하면 다음과 같이 된다.

$$(\zeta-1)W'''' + 2W''' + \{ \overline{D}_1 \zeta^3 + \overline{D}_2 \zeta^2 + \overline{D}_3 \zeta + \overline{D}_4 \} W'' + \{ \overline{D}_5 \zeta^2 + \overline{D}_6 \zeta + \overline{D}_3 \} W' + \overline{D}_7(\zeta-1)W = 0 \tag{9}$$

여기서, $\overline{D}_1 = \frac{D_1}{3}$, $\overline{D}_2 = \left(\frac{D_2}{2} - \frac{D_1}{2} \right)$, $\overline{D}_3 = -D_2$, $\overline{D}_4 = -D_3$, $\overline{D}_5 = D_1$, $\overline{D}_6 = (D_2 - D_1)$, $\overline{D}_7 = D_4$ 이다.

2.2 미분방정식의 일반해

식 (9)의 근은 Frobenius Method을 사용하여 해석하였으며 일반해는 다음과 같다.

$$W(\zeta, k) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+1} \zeta^{k+i} \tag{10}$$

여기서 a_{i+1} 은 Frobenius 계수이다.

식 (10)의 미분을 식 (9)에 대입하면 지수 k 와 계수 a_{i+1} 값들과 결정방정식(indicial equation)은 다음과 같다.

$$k(k-1)(k-2)(k-3)a_1 = 0 \tag{11}$$

순환관계식(recurrence relationship)은 다음과 같이 주어진다.

$$a_{i+5} = \frac{(k+i+2)}{(k+i+4)} a_{i+4} + \frac{\overline{D}_4}{(k+i+3)(k+i+4)} a_{i+3} + \frac{\overline{D}_3(k+i+1)}{(k+i+2)(k+i+3)(k+i+4)} a_{i+2}$$

$$+ \frac{\overline{D}_2(k+i-1)(k+i) + \overline{D}_6(k+i) - \overline{D}_7}{(k+i+1)(k+i+2)(k+i+3)(k+i+4)} a_{i+1} + \frac{\overline{D}_1(k+i-2)(k+i-1) + \overline{D}_5(k+i-1) + \overline{D}_7}{(k+i+1)(k+i+2)(k+i+3)(k+i+4)} a_i \tag{12}$$

계수 a_1, a_2, a_3, a_4 와 a_5 의 값은 다음과 같다.

$$a_1 = 1 \tag{13}$$

$$a_2 = \frac{(k-1)}{(k+1)} a_1 \tag{14}$$

$$a_3 = \frac{k}{(k+2)} a_2 + \frac{\overline{D}_4}{(k+1)(k+2)} a_1 \tag{15}$$

$$a_4 = \frac{(k+1)}{(k+3)} a_3 + \frac{\overline{D}_4}{(k+2)(k+3)} a_2 + \frac{\overline{D}_3 k}{(k+1)(k+2)(k+3)} a_1 \tag{16}$$

$$a_5 = \frac{(k+2)}{(k+4)} a_4 + \frac{\overline{D}_4}{(k+3)(k+4)} a_3 + \frac{\overline{D}_3(k+1)}{(k+2)(k+3)(k+4)} a_2 + \frac{\overline{D}_2 k(k-1) + \overline{D}_6 k - \overline{D}_7}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} a_1 \tag{17}$$

식 (13)~(17)을 이용하여 계수 값들을 계산하였으며 식 (11)에서 얻어진 4개의 지수 k 값을 구하여 대입하면 식 (10)은 다음과 같이 된다.

$$W(\zeta) = A_1 f(\zeta, 0) + A_2 f(\zeta, 1) + A_3 f(\zeta, 2) + A_4 f(\zeta, 3) \tag{18}$$

여기서 함수 $f(\zeta, k)$ 는 다음과 같다.

$$f(\zeta, k) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+1} \zeta^{k+i} \tag{19}$$

2.3 전달행렬

식 (18)을 미분하면 기울기 Φ 는 다음과 같이 된다.

$$\Phi = \frac{c}{L} \sum_{j=1}^4 A_j f'(\zeta, j-1) \tag{20}$$

식 (2)에 식 (4)와 식 (7)의 미분과 식 (6)과 식 (18)을 대입하면 다음의 무차원 형태 전달력을 얻을 수

있다.

$$V = N_1 \sum_{j=1}^4 \left\{ (1-\zeta) f'''(\zeta, j-1) - f''(\zeta, j-1) \right. \\ \left. - (D_1 \zeta^3 + D_2 \zeta^2 + D_3 \zeta + D_4) f'(\zeta, j-1) \right\} A_j \quad (21)$$

식 (3)에 식 (4)와 식 (7)의 미분과 식 (18)을 대입하면 다음의 무차원 형태 굽힘 모멘트를 얻을 수 있다.

$$M = N_2 \sum_{j=1}^4 (1-\zeta) f''(\zeta, j-1) A_j \quad (22)$$

식 (21)과 (22)에서 $N_1 = EI_0 c^3 / L^3$, $N_2 = -EI_0 c^2 / L^2$ 이다.

고정-자유 경계조건을 고려했을 때, 보의 길이는 고정단과 자유단에서 x 는 0과 L 이 된다. $x=0$ 을 식 (18), (20), (21)과 식 (22)에 대입하고 행렬로 나타내면, 식 (21)과 식 (22)에서 $N_1 = EI_0 c^3 / L^3$, $N_2 = -EI_0 c^2 / L^2$ 이다.

고정-자유 경계조건을 고려했을 때, 보의 길이는 고정단과 자유단에서 x 는 0과 L 이 된다. $x=0$ 을 식 (18), (20), (21)과 (22)에 대입하고 행렬로 나타내면,

$$\begin{Bmatrix} W \\ \Phi \\ M \\ V \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} \quad (23)$$

식 (23)은 식 (24)로 된다.

$$\{Z\}_i = [C_{ij}] \{A_j\} \quad (24)$$

식 (24)로부터 상수 A_j 는 식 (25)와 같이 주어진다.

$$\{A_j\} = [C_{ij}]^{-1} \{Z\}_i \quad (25)$$

동일한 방법으로 $x=L$ 을 식 (18), (20), (21)과 식 (22)에 대입하고 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} W \\ \Phi \\ M \\ V \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} \quad (26)$$

여기서,

$$H_{1j} = \sum_{j=1}^4 f(c, j-1), \quad H_{2j} = \frac{c}{L} \sum_{j=1}^4 f'(c, j-1)$$

$$H_{3j} = N_2 \sum_{j=1}^4 (1-c) f''(c, j-1)$$

$$H_{4j} = N_1 \sum_{j=1}^4 \left\{ (1-c) f'''(c, j-1) - f''(c, j-1) \right. \\ \left. - (D_1 c^3 + D_2 c^2 + D_3 c + D_4) f'(c, j-1) \right\}$$

식 (26)은 식 (27)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{Z\}_{i+1} = [H_{ij}] \{A_j\} \quad (27)$$

식 (25)를 식 (27)에 대입하면 감소된 폭을 가진 회전하는 보의 전달행렬은 식 (28)과 같이 된다.

$$\{Z\}_{i+1} = [T_{ij}] \{Z\}_i \quad (28)$$

여기서, $[T_{ij}] = [H_{ij}] [C_{ij}]^{-1}$ 이고, 식 (28)을 사용하여 전달행렬의 일반적인 방법에서 고유 진동수를 결정할 수 있다.

3. 적용 예

제안된 이론을 검증하기 위하여 Table 1의 재원이 사용되었다. b_0 와 h_0 는 $c=0$ 일 때, 단면의 폭과 높이이며 ANSYS 해석 결과와 비교하기 위하여 전체 길이가 단면 치수에 비해 충분히 크다고 가정하여 회전관성과 전단변형을 무시하였다. 보 요소에 적용된 경계조건은 고정-자유 조건이다.

4. 결과 및 고찰

선형적으로 감소된 폭을 갖고 회전하는 보의 고유

Table 1 Properties used to compare the computed results

Notation	Description	Value
E	Elastic modulus	200 GPa
ρ	Density	7850 kg/m ³
L	Length	0.8 m
b_0	Width of cross-section	0.03 m
h_0	Height of cross-section	0.01 m
Ω	Angular rotation speed	0~377 rad/s
c	Taper ratio	0.5

Table 2 The first three natural frequencies of beam with linearly reduced width when $\Omega = 0, c = 0.5$

ω	Natural frequency(Hz)		
	$\Omega = 0 \text{ rad/s}$		
	TMM	Ref. (8)	Diff.(%)
1	15.636	15.636	0
2	85.222	85.222	0
3	229.00	229.00	0

진동수에 대한 원심력의 영향을 검토하기 위하여 테이퍼 비는 0.5로 하였다. 회전 속도는 0 rad/s부터 377 rad/s(3600 rpm)까지 50 rad/s로 증가시키며 검토하였다. Table 2에 회전속도가 0일 때 3개의 고유진동수를 기존연구⁽¹⁰⁾에서 주어진 결과와 비교하였다. 이것은 제안된 방법이 임의의 정밀도(예, 소수점 3자리 혹은 5자리)에서 정확한 해(exact solution)를 결정할 수 있기 때문이다.

Tables 3~4에 회전속도의 변화에 따른 폭이 테이

Table 3 The comparison results obtained by using the proposed method and ANSYS on the first three natural frequencies

(a) $\Omega=50, 100, 150, 200 \text{ rad/s}, c=0.5, \text{ and } r_H=0 \text{ m}$

ω	Natural frequency(Hz)											
	$\Omega = 50 \text{ rad/s}$			$\Omega = 100 \text{ rad/s}$			$\Omega = 150 \text{ rad/s}$			$\Omega = 200 \text{ rad/s}$		
	ANSYS	TMM	Diff.(%)	ANSYS	TMM	Diff.(%)	ANSYS	TMM	Diff.(%)	ANSYS	TMM	Diff.(%)
1	17.943	17.919	0.132	23.431	23.408	0.096	30.326	30.303	0.074	37.782	37.758	0.064
2	87.384	87.308	0.087	93.360	93.290	0.075	102.550	102.489	0.060	114.170	114.117	0.046
3	230.990	231.046	-0.024	237.000	237.061	-0.026	246.660	246.738	-0.032	259.550	259.635	-0.033

(b) $\Omega=250, 300, 350, 377 \text{ rad/s}, c=0.5, \text{ and } r_H=0 \text{ m}$

ω	Natural frequency(Hz)											
	$\Omega = 250 \text{ rad/s}$			$\Omega = 300 \text{ rad/s}$			$\Omega = 350 \text{ rad/s}$			$\Omega = 377 \text{ rad/s}$		
	ANSYS	TMM	Diff.(%)									
1	45.474	45.449	0.056	53.276	53.250	0.049	61.135	61.107	0.045	65.393	65.365	0.043
2	127.540	127.489	0.040	142.130	142.088	0.029	157.580	157.550	0.019	166.190	166.167	0.014
3	275.150	275.261	-0.040	293.010	293.139	-0.044	312.690	312.844	-0.049	323.950	324.115	-0.051

Table 4 The comparison results obtained by using the proposed method and ANSYS on the first three natural frequencies

(a) $\Omega=50, 100, 150, 200 \text{ rad/s}, c=0.5, \text{ and } r_H=0.8 \text{ m}$

ω	Natural frequency(Hz)											
	$\Omega = 50 \text{ rad/s}$			$\Omega = 100 \text{ rad/s}$			$\Omega = 150 \text{ rad/s}$			$\Omega = 200 \text{ rad/s}$		
	ANSYS	TMM	Diff.(%)	ANSYS	TMM	Diff.(%)	ANSYS	TMM	Diff.(%)	ANSYS	TMM	Diff.(%)
1	20.628	20.606	0.106	30.965	30.944	0.066	42.803	42.782	0.048	55.106	55.085	0.038
2	90.154	90.081	0.080	103.330	103.268	0.060	122.080	122.032	0.039	144.140	144.110	0.021
3	233.870	233.934	-0.027	248.000	248.075	-0.030	269.710	269.820	-0.041	297.160	297.302	-0.048

(b) $\Omega=250, 300, 350, 377 \text{ rad/s}, c=0.5, \text{ and } r_H=0.8 \text{ m}$

ω	Natural frequency(Hz)											
	$\Omega = 250 \text{ rad/s}$			$\Omega = 300 \text{ rad/s}$			$\Omega = 350 \text{ rad/s}$			$\Omega = 377 \text{ rad/s}$		
	ANSYS	TMM	Diff.(%)									
1	67.589	67.568	0.031	80.155	80.135	0.025	92.766	92.748	0.020	99.587	99.570	0.017
2	168.130	168.118	0.007	193.280	193.281	0.000	219.150	219.169	-0.009	233.330	233.358	-0.012
3	328.700	328.889	-0.058	363.110	363.349	-0.066	399.520	399.820	-0.075	419.800	420.135	-0.080

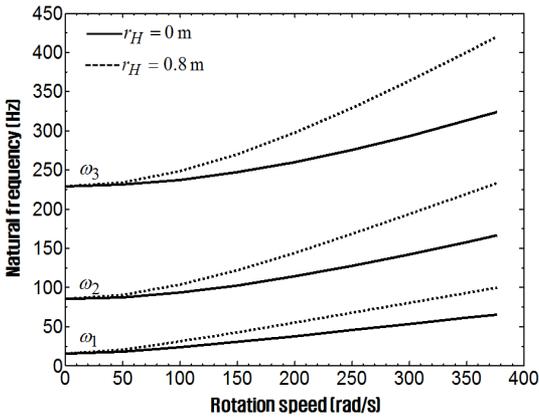


Fig. 2 Effects of the rotation speed and hub radius when $c = 0.5$

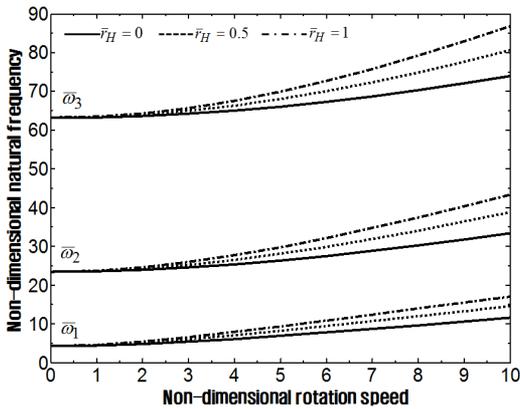


Fig. 3 Effects of the rotation speed and hub radius on the non-dimensional natural frequencies when $c = 0.5$

퍼진 보의 원심력 영향을 검토하였다. Table 3은 $r_H = 0$ 일 때 얻어진 결과이고 Table 4는 $r_H = 0.8$ m일 때 얻어진 결과들이다. Tables 3~4에서 제안된 방법 으로부터 얻어진 결과와 상용프로그램을 사용하여 얻어진 결과들이 잘 일치함을 알 수 있다.

면내 굽힘 진동에 대하여 3개의 고유 진동수를 얻기 위하여 해석에 사용된 요소의 수는 ANSYS에서 약 7480개이고, 제안된 방법은 1개의 요소를 사용하였다. 맥급수에서의 항의 수는 테이퍼 비 0.1~0.9에 대하여 60~300개를 사용하였고, 제안된 방법은 한 개의 요소만을 사용하더라도 요구되는 수의 정확한 고유 진동수를 얻을 수 있었다.

Tables 3~4에서 얻어진 결과들을 Fig. 2에 나타내

었다. 그림에 보여 지는 것과 같이 회전속도와 허브 반경이 증가할수록 고유 진동수가 증가한다는 것을 알 수 있다. 이것은 원심력에 의한 강성의 증가 효과로 인한 것이다.

Fig. 3은 선형적으로 감소된 폭을 갖고 회전하는 보의 무차원 고유 진동수에 대한 무차원 회전속도와 허브반경(\bar{r}_H)의 영향을 나타낸 것이다. \bar{r}_H 가 0, 0.5, 1일 때 검토하였으며 무차원 회전속도는 0부터 10까지 1단위로 증가되었다. 또한 사용된 테이퍼 비는 0.5이다. 그림에서 보여지는 것과 같이 허브반경과 회전속도의 증가는 3개의 무차원 고유 진동수에 상당한 영향을 미치는 것을 알 수 있었다.

5. 결 론

제안된 전달행렬법은 길이를 따라 폭이 선형적으로 감소되는 회전하는 보의 진동에 대해 연구하였고 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 폭이 테이퍼진 회전보에 대하여 1개의 요소를 사용하여 정확한 고유 진동수를 결정할 수 있는 새로운 전달행렬법을 제안하였다.
- (2) 실제 구조물에서 허브반경과 회전속도를 증가시켜 원심력의 증가가 구조물에 미치는 영향에 대해 검토를 하였다.
- (3) 무차원 고유 진동수의 검토 결과 허브반경과 회전속도의 증가는 원심력에 의해 강성이 증가하였으며 무차원 고유진동수를 증가시켰다.
- (4) 제안된 방법을 사용하면 길이를 따라 요소마다 각각 다른 테이퍼 비를 가지는 구조물에 대해서도 정확한 고유 진동수를 얻을 수 있다고 생각된다.

후 기

이 연구는 2016학년도 경기대학교 대학원 연구원 장학생 장학금 지원에 의하여 수행되었음.

References

(1) Banerjee, J. R., Su, H. and Jackson, D. R., 2006, Free Vibration of Rotating Tapered Beams Using the Dynamic Stiffness Method, Journal of Sound and Vibration, Vol. 298, No. 4-5, pp. 1034~1054.

(2) Chaudhari, T. D. and Maiti, S. K., 1999, Modelling of Transverse Vibration of Beam of Linearly Variable Depth with Edge Crack, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 63, No. 4, pp. 425-445.

(3) Spyrakos, C. C. and Chen, C. I., 1990, Power Series Expansions of Dynamic Stiffness Matrices for Tapered Bars and Shafts, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 30, No. 2 pp. 259-270.

(4) Zhou, D. and Cheung, Y. K., 2001, Vibrations of Tapered Timoshenko Beams in Terms of Static Timoshenko Beam Functions, *Transactions of the ASME*, Vol. 68, No. 4, pp. 596-602.

(5) Wang, G. and Wereley, N. M., 2004, Free Vibration Analysis of Rotating Blades with Uniform Tapers, *AIAA Journal*, Vol. 42, No. 12, pp. 2429-2437.

(6) Gunda, J. B., Gupta, R. K. and Ganguli, R., 2009, Hybrid Stiff-string-polynomial Basis Functions for Vibration Analysis of High Speed Rotating Beams, *Computers & Structures*, Vol. 87, No. 3-4, pp. 254-265.

(7) Gunda, J. B. and Ganguli, R., 2008, New Rational Interpolation Functions for Finite Element Analysis of Rotating Beams, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 50, No. 3, pp. 578-588.

(8) Lee, H. L. and Yoo, H. H., 2009, Vibration Analysis of a Rotating Cantilever Beam Having Tapered Cross Section, *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 19, No. 4, pp. 363-369.

(9) Banerjee, J. R., 2000, Free Vibration of Centrifugally Stiffened Uniform and Tapered Beams Using the Dynamic Stiffness Method, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 233, No. 5, pp. 857-875.

(10) Lee, J. W., Kim, J. H. and Lee, J. Y., 2015, Exact Solutions for Bending Vibration of Beam with Linearly Reduced width Along Its Length, *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 25, No. 6, pp. 420-425.

(11) Lee, J. W. and Lee, J. Y., 2015, Free Vibration Analysis Using the Transfer-matrix Method on a

Tapered Beam, *Computers and Structures*, Doi: 10.1016/j.compstruc.2015.11.007(Accepted article).

(12) Boiangiu, M., Ceausu, Y. and Untaroiu, C. D., 2014, A Transfer Matrix Method for Free Vibration Analysis of Euler-Bernoulli Beams with Variable Cross Section, *Journal of Vibration and Control*, Doi: 10.1177/1077546314550699.



Jung Woo Lee received B.E. and M.S. in mechanical engineering in 2002 and 2004, respectively, from Kyonggi University, Suwon, Korea. He has been working as a researcher in Technology Research and Development Institute at KEPCO KPS. In March of 2012, he enrolled at Kyonggi University as a doctoral student under the supervision of Professor Jung Youn Lee at mechanical system engineering.



Jung Hoon Kwak received his B.S in the school of mechanical engineering in 2015 from Kyonggi University. He is pursuing M.S in the school of mechanical engineering from Kyonggi University. Currently his research interests are vibration and applied mechanics.



Jung Youn Lee is Professor of Dept. of Mechanical System Engineering at Kyonggi University, where he has been since 1996. He received a B.S., an M.S. and his Ph.D. from Hanyang University in 1979, 1989 and 1992 respectively. His research interests are in System Identification, Structural Modification, Inverse Problem, Modal Analysis and Sensitivity Analysis of Vibration.