

### 3차원 유한요소를 이용한 핵연료와 피복관 기계적 거동 해석

서상규\* · 이성욱\* · 이은호\* · 양동열† · 김효찬\*\* · 양용식\*\*

\* KAIST 기계공학부, \*\* 한국원자력연구원 경수로핵연료기술개발부

### 3D Finite Element Simulation of Pellet-Cladding Mechanical Interaction

Sang Kyu Seo\*, Sung Uk Lee\*, Eun Ho Lee\*, Dong Yol Yang\*†,

Hyo Chan Kim\*\* and Yong Sik Yang\*\*

\* Dept. of Mechanical Engineering, KAIST,

\*\* LWR fuel technology division, Korea Atomic Energy Research Institute

(Received July 8, 2015 ; Revised February 1, 2016 ; Accepted March 11, 2016)

**Key Words:** Nuclear Fuel Rod(핵연료 봉), Pellet to Cladding Mechanical Interaction(핵연료-피복관 기계적 상호 작용), Finite Element Analysis(유한요소해석), Thermo-Mechanical Analysis(열-구조 연계 해석), Gap Conductance(간극 열전도도), Contact(접촉), Elasto Plastic Deformation(탄 소성 변형)

**초록:** 원자력 발전소의 반응로에 핵연료 봉으로 이루어진 집합체가 있으며 핵 연료의 연소를 통한 열을 이용하여 발전을 한다. 핵연료 봉은 핵연료와 그를 감싸는 피복관으로 이루어졌으며 연소되는 동안 서로의 상호작용에 대한 해석은 안전성을 평가함에 있어 중요한 사실이다. 본 논문에서는 핵연료와 피복관의 연소 상태에서 기계적 상호작용에 대한 해석 방법에 대하여 제시한다. 온도 해석에 있어서 핵연료와 간극 사이에서의 열전도도가 중요하며 간극 거리와 접촉여부에 따른 접촉 압력이 또한 중요 요소이다. 이에 간극 열전도도는 비결정론적이기 때문에 이를 해결할 수 있는 방법에 대하여 제시했다. 핵 연료의 열팽창에 따른 피복관과의 접촉을 해결하기 위한 계산을 수행하였고 그에 따라 접촉 시 발생하는 응력이 항복합수를 넘어 소성 변형이 일어날 경우 또한 고려하였다. 핵연료의 열팽창에 따라 피복관과 접촉에 의한 소성 변형을 해석하므로 핵연료 봉의 안정성을 평가할 수 있다. 이를 적용하기 위해 3차원 유한요소 모듈을 FORTRAN90을 이용하여 개발하였다. 핵연료와 피복관의 접촉에 의한 탄소성 변형을 주로 다루며 두꺼운 실린더를 통한 간단한 이론 모델을 제시하여 코드에 대해 검증을 실시하였다.

**Abstract:** In a nuclear power plant, the fuel assembly, which is composed of fuel rods, burns, and the high temperature can generate power. The fuel rod consists of pellets and a cladding that covers the pellets. It is important to understand the pellet-cladding mechanical interaction with regard to nuclear safety. This paper proposes simulation of the PCMI. The gap between the pellets and the cladding, and the contact pressure are very important for conducting thermal analysis. Since the gap conductance is not known, it has to be determined by a suitable method. This paper suggests a solution. In this study, finite element (FE) contact analysis is conducted considering thermal expansion of the pellets. As the contact causes plastic deformation, this aspect is considered in the analysis. A 3D FE module is developed to analyze the PCMI using FORTRAN 90. The plastic deformation due to the contact between the pellets and the cladding is the major physical phenomenon. The simple analytical solution of a cylinder is proposed and compared with the fuel rod performance code results.

- 기호설명 -

$k_p$  : 핵연료의 열전도도  
 $k_c$  : 피복관의 열전도도

† Corresponding Author, [dyyang@kaist.ac.kr](mailto:dyyang@kaist.ac.kr)

© 2016 The Korean Society of Mechanical Engineers

$h_{gap}$  : 간극 열전도 계수  
 $h_{gas}$  : 기체 열전도 계수  
 $h_{solid}$  : 접촉에 의한 열전도 계수  
 $h_{rad}$  : 방사선에 의한 열전도 계수  
 $k_g$  : 간극내 가스 열전도도  
 $d$  : 간극거리

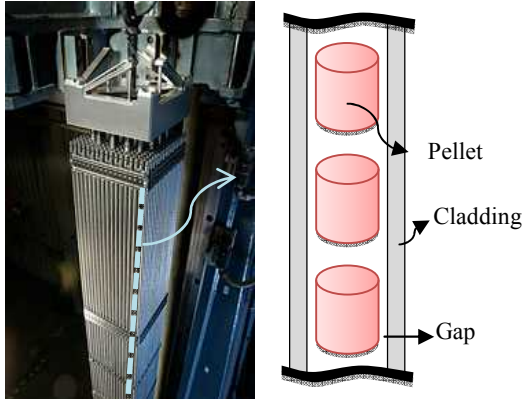


Fig. 1 Assembly of fuel rod consisting of pellet and cladding

- $g_f$  : 핵연료 표면에서의 온도점프거리
- $g_c$  : 피복관 표면에서의 온도점프거리
- $H$  : 마이어 경도
- $P_c$  : 접촉 압력
- $g_N$  : 접촉 통과 함수
- $n^p$  : 핵연료 표면의 수직 단위 벡터
- $K^p$  : 접촉 구속 행렬
- $G^p$  : 접촉 구속 벡터
- $t_N$  : 접촉에 의한 수직 반력

## 1. 서 론

### 1.1 핵연료 봉

원자력 에너지는 지구 온난화가 문제가 되고 있는 시점에 이산화 탄소를 배출 하지 않고 경제적인 측면에서도 화석 연료에 비하여 저렴하여 원자력 에너지는 많이 각광받고 있다. 그렇지만 원자력 발전에서 안전성은 매우 중요한 요소이며 방사성 물질의 노출을 막아야 한다. 원자력 발전의 안전에서 가장 중요한 부분 중 하나가 핵연료 봉이다. 핵연료 봉은 산화 우라늄(UO<sub>2</sub>)으로 이루어진 핵연료와 지르코늄 합금(Zircaloy)으로 제작된 피복관으로 이루어지며 핵분열 시 방출하는 방사성 물질을 외부와 차단 시키며 냉각을 효과적으로 해야 하는 피복관의 물리적 해석은 안전성 평가에 있어 중요한 부분이다.

원자로에서 운전 상태 시 핵연료와 피복관의 상호작용(Pellet to Cladding Interaction)에 대한 해석은 안전성을 평가함에 매우 중요하며 이를 해석하기 위한 코드개발이 필수적이다.

### 1.2 핵연료와 피복관의 상호작용 해석

핵연료 봉의 거동을 해석하기 위해서는 다물리 현상을 이해하고 수식적으로 표현을 하여 이를 적

용한 핵연료 성능 코드개발이 필요하다. 안정성을 평가하기 위해서는 열 해석과 구조 해석의 연계과정이 요구된다. 핵 연료와 피복관 사이의 간극은 열전달 측면에서 중요하고 핵연료는 열변화도(thermal gradient)에 의해 중심부 온도와 끝 부분 온도 차이가 크게 나타난다. 이러한 온도 분포에 의한 열팽창 때문에 핵연료는 모래시계(hourglass shape)와 비슷한 형상을 나타낸다. 비정상적인 운전 상태에서는 핵연료의 열 생성량이 매우 커질 수 있다. 이 경우 핵연료의 열팽창 변형이 커짐에 따라 간극 사이가 닫혀 상호 접촉이 발생하고 변형이 일어나 안전에 문제되며 이를 해석할 수 있는 코드가 요구된다.

핵연료와 피복관의 거동을 해석하기 위해 핵연료 봉 성능 코드들이 개발이 되었다. 프랑스 CEA에서는 초기 METEOR코드가 개발되었고 이는 다 물리 현상을 1차원 축 대칭으로 물리적 현상을 해석 했다.<sup>(1)</sup> 핵 연료 봉의 전체적인 모양의 변화를 분석하기에는 좋지만 국부적인 응력집중 및 변형을 해석함에 있어 취약한 부분이 있다. 이를 보완하기 위해서는 다차원 형상을 해석할 수 있는 유한요소 모델이 요구되며 3D 핵연료 성능 코드인 TOUTATIS는 유한요소 해석 코드인CAS3M과 함께 개발이 되었다.<sup>(2)</sup> 가장 발전된 코드인 ALCYONE 코드는 화학적, 물리적 그리고 열-구조 연계 구조 해석을 고려한다.<sup>(3)</sup> 하지만 이는 계산의 복잡성과 시간 비용이 크다는 단점이 있다. 미국 NRC에서는 FRAPCON-PRAPTRAN 코드를 개발하였으며 이는 열 해석은 FDM 을 이용한 1차원 해석을 하고 구조해석은 2차원 유한요소를 적용하여 열-구조 연계 해석을 이루었다.<sup>(4)</sup> 일본의 JAERI에서 보 유한 FEXAXI-5코드의 경우 또한 열은 1차원, 구조는 2차원 유한요소를 이용한 핵연료 성능코드이다.<sup>(5)</sup> 1차원의 경우는 접촉에 의한 피복관의 대나무 현상(bamboo effect)을 표현 하지 못한다. 또 2차원 축 대칭을 이용한 경우 핵연료의 반경 방향으로 조각이 난 경우와 초기 외부 표면 결함이 있는 핵연료(Missing Pellet Surface)는 표현을 하지 못한다는 단점을 가지고 있다.

본 논문에서는 3차원의 모델을 이용하여 핵연료와 피복관의 열 구조 연계 해석을 적절한 가정을 통하여 기계적 거동을 분석하였다. 또한 핵연료가 반경 방향으로 8조각인 경우를 가정하여 문제 해결을 진행하였다. 핵연료의 기계적 거동에 있어 접촉에 의한 소성변형이 피복관 안전에 있어 중요한 부분으로 두 개의 두꺼운 실린더를 통한 간단

한 접촉 탄 소성 이론 문제를 제시하여 이와 핵연료 성능 코드의 결과를 비교 검증을 실시하였다.

## 2. 연료 봉의 열 해석

### 2.1 온도 해석

핵 연료와 피복관의 온도를 구함에 있어 정적 유한요소 열전도 해석을 이용했다.

$$\begin{aligned} (k_{ij}T_{,j})_{,i} + f &= 0 \text{ in } B(B^p \cup B^c) \\ (k_{ij}T_{,j})n_i &= -h_{\text{conv.}}(T - T_\infty) + q \text{ on } \Gamma(\Gamma^p \cup \Gamma^c) \end{aligned} \quad (1)$$

핵연료와 피복관의 열 해석은 식 (1)의 지배방정식에 의하여 열전도 유한요소 해석을 한다. 이를 변분법을 이용하여 약형(weak form)으로 만든 후 온도 강성행렬과 열 유속(heat flux) 벡터로 표현 후 온도 계산을 한다.

$$\begin{aligned} \int_B k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} dV + \int_\Gamma h_{\text{conv.}} T \bar{T} d\Gamma \\ = \int_B f \bar{T} dV + \int_\Gamma (q + h_{\text{conv.}} T_\infty) \bar{T} dV \end{aligned} \quad (2)$$

식 (2)를 이산화 과정을 거쳐 핵연료와 피복관의 열 전도 계수를 이용하면 강성행렬을 구할 수 있고 핵 연료의 열 생성량, 피복관 표면에 냉각수에 의한 대류(Newton cooling) 조건 및 간극 열해석을 이용하여 유속 벡터를 계산했다.

### 2.2 열린 간극의 열 전달

핵연료와 피복관 사이에는 초기 간극 거리가 존재 제작 초기는 85 $\mu\text{m}$ 이다. 간극 사이는 초기 헬륨으로 채워져 있고 연소를 하면 헬륨과 제논 기체 등으로 채워진다. 기체의 열 전도 계수가 핵연료와 피복관에 비교하여 매우 낮아 열 해석에 있어 매우 중요한 역할을 한다. 이에 따라 간극 부분의 열 해석이 중요하며 간극에서는 간극 거리와 접촉 여부에 따라서 열 유속에 대한 구성 방정식에서 열 전달 계수가 달라지게 된다.

$$h_{\text{gap}} = h_{\text{gas}} + h_{\text{solid}} + h_{\text{rad}} \quad (3)$$

가스 동역학에 의하면 간극에서의 열 전달 계수는 식 (3)으로 나타난다.<sup>(6)</sup>  $h_{\text{gas}}$ 는 기체에 의한 열전달 계수,  $h_{\text{solid}}$ 는 접촉에 의해 열전달 계수 그리고  $h_{\text{rad}}$ 는 복사에 의한 열전달 계수이다. 간극 사이가 열려 있을 때는  $h_{\text{gas}}$ 만 고려를 하면 되지만 접촉이

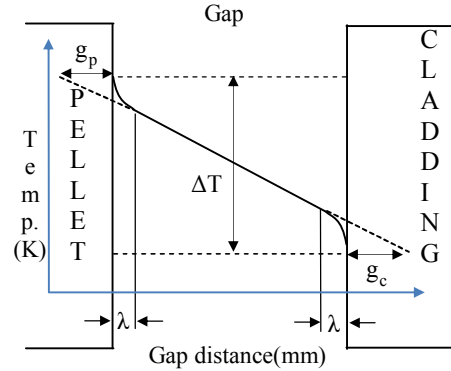


Fig. 2 Contact region of pellet and cladding

발생하면  $h_{\text{solid}}$ 을 고려해야 한다.  $h_{\text{rad}}$ 는  $h_{\text{gas}}$ 와  $h_{\text{solid}}$  비하여 영향이 매우 작아 고려하지 않았다.

간극 사이는 매우 좁기 때문에 기체의 전도에 의한 열 전달이 지배적이다. 하지만 Fig. 2에서 간극 사이의 온도분포는 기체 분자의 운동으로 인하여 완전한 선형이 아니라 간극의 끝부분에서 비선형 모양을 나타낸다.  $g_p$ 와  $g_c$ 는 온도 분포의 비선형 부분을 선형으로 표현하기 위하여 도입된 도약 거리를 나타낸다.

$$h_{\text{gas}} = \frac{k_g}{g_p + g_c + d} \quad (4)$$

열린 간극 상태일 경우  $h_{\text{gas}}$ 를 식 (4)를 통해 표현할 수 있고 간극 거리( $d_{\text{gap}}$ )에 의해 크게 의존된다.

$$g_p + g_c = 2 \left( \frac{2 - \alpha}{\alpha} \right) \left( \frac{\gamma}{1 + \gamma} \right) \left( \frac{k}{\mu C_p} \right)_g \lambda \quad (5)$$

가스 동역학에 의하여 도약거리는 식 (5)를 이용하여 얻을 수 있다.  $\alpha$ 는 열 수용계수(thermal accommodation coefficient)로 유체 한 입자가 표면에 다가가기 전의 입자와 표면의 온도차이와 다가간 후의 온도와 그 전의 온도 차이의 비율을 말한다. 정적인 경우를 해석하므로  $\alpha=1$ 로 가정을 하였다.  $\gamma$ 는 정압 비열과 정적 비열의 비를 나타내고 헬륨(He) 기체로 채워졌다 가정을 하면  $\gamma=5/3$ 으로 나타낼 수 있다.  $(k/\mu C_p)_g$ 는 프란틀 상수로 통상적으로 0.7으로 간주한다.

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{P} \left( \frac{T}{273} \right) \quad (6)$$

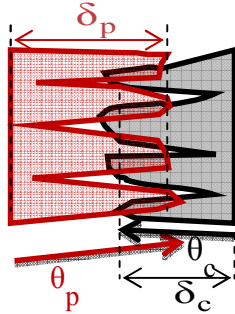


Fig. 3 Surface of the pellet and the cladding

식 (6)은 자유 이동거리로서,  $\lambda_0$ 의 경우 원자 혹은 분자의 반경에 의하여 결정되는 물성 값이며 헬륨의 경우  $\lambda_0 = 1.74 \times 10^{-5}$  [atm·cm]이며 T와 P는 각각 기체의 온도와 압력을 나타내고 압력의 변화는 고려하지 않았다. 간극 사이가 열린 경우 앞의 과정을 통하여  $h_{\text{gap}} = h_{\text{gas}}$ 을 적용하여 간극 사이의 온도 구성 방정식을 구성할 수 있다.

### 2.3 닫힌 간격의 열 전달

핵연료의 열팽창에 의하여 피복관과 접촉을 할 경우의 표면에서의 열 전달 계수가 달라지며  $h_{\text{gas}}$ 뿐만 아니라  $h_{\text{solid}}$ 를 고려해야 한다.

핵연료와 피복관 사이에서 접촉 시 열전도도는 Ross와 Stoute가 제안한 모델이 적합하여 이를 따라 구할 수 있다.<sup>(7)</sup>

$$h_{\text{solid}} = 1.45 \left( \frac{P_c}{H} \right)^n \left( \frac{2k_p k_c}{k_p + k_c} \right) \frac{\sqrt{(\tan\theta_p)^2 + (\tan\theta_c)^2}}{\sqrt{\delta_p^2 + \delta_c^2}} \quad (7)$$

접촉이 발생했을 경우는 표면 경도, 접촉면의 형상, 두 표면의 열전도 계수 그리고 접촉 압력에 의해서 얻을 수 있다. 여기서 n은 탄성 변형 일 경우는 0.5의 값을 가지고 응력이 항복 함수 보다 커짐에 따라 소성 영역을 고려할 경우는 1의 값을 가진다. 표면의 형상은 예상하기 힘든 부분으로 일정 값을 가정을 했고 그림에 따라 접촉 시 열 전달 계수는 압력에 의한 함수라는 것을 알 수 있다.

$$h_{\text{gap}} = h_{\text{gas}} + h_{\text{solid}} = \frac{k_g}{g_p + g_c} + 1.45 \left( \frac{P_c}{H} \right)^n \left( \frac{2k_p k_c}{k_p + k_c} \right) \frac{\sqrt{(\tan\theta_p)^2 + (\tan\theta_c)^2}}{\sqrt{\delta_p^2 + \delta_c^2}} \quad (8)$$

간극 사이에서의 열 전달은 계수는 식 (8)로 얻을 수 있고  $h_{\text{gas}}$ 은 접촉시의 간극 거리가 0이라

Table 1 Algorithm considering gap conductance

```

Initialize temp.  $T_n = \text{initial temp.}$ 
(Check) IF open gap THEN - (a)
    using gap distance
     $h_{\text{gap}} = h_{\text{gas}}$ 
ELSE IF closed gap THEN
    using contact pressure
     $h_{\text{gap}} = h_{\text{gas}} + h_{\text{solid}}$ 
END IF
Make a stiffness matrix and load vector
Solve matrix

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{T}^p \\ \mathbf{T}^c \end{Bmatrix}_{n+1} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}^p \\ \mathbf{q}^c \end{Bmatrix}$$

(B.C in the gap)  $\mathbf{q} = h_{\text{gap}} (\mathbf{T}^c - \bar{\mathbf{T}}_n^p)$  on  $\Gamma_{\text{gap}}^c$ 
 $\mathbf{q} = h_{\text{gap}} (\mathbf{T}^p - \bar{\mathbf{T}}_n^c)$  on  $\Gamma_{\text{gap}}^p$ 
calculate thermal expansion and deformation
(Check) IF  $|\mathbf{T}_{n+1} - \mathbf{T}_n| < \text{TOL}$  THEN
    Temp. converged
ELSE
     $n \rightarrow n+1$  go to (a)
END IF

```

는 것을 이용을 하여 계산을 수행했다.  $h_{\text{solid}}$ 는 FRAPTRAN 1.4에 사용되는 값을 사용하였다.<sup>(8)</sup>

### 2.4 열 해석 알고리즘

간극 사이의 열 구성방정식은 결정론적 방식을 따르지 않는다. 접촉이 발생할 경우와 하지 않을 경우 핵연료와 피복관 사이의 열 전달의 구성 방정식이 달라지기 때문이다. 이는 변형 해석과 열 해석을 연동시켜 문제를 해결 하였다.

Table 1의 알고리즘을 따라 간극 사이의 열 전달을 해결하였고 접촉에 의한 압력은 이후 장에서 언급하도록 하겠다.

## 3. 핵 연료와 피복관의 접촉 해석

### 3.1 기계적 접촉 해석

핵연료가 열을 생성함에 따라서 초기 온도에 비하여 온도가 상승하게 된다. 연료가 연소 중 비정상적으로 열 생성량이 크게 증가할 수 있고 이에 따라 핵연료가 열팽창이 커져 피복관과 접촉을 하여 변형이 발생을 한다. 이를 해석하기 위하여 유한요소에 적용할 수 있도록 수식화 정리가 필요하다. 접촉의 현상이 미끄러짐 양이 크지 않아 절점대칭 접촉 방법(node to node contact)을 이용하였고 마찰이 없는 것으로 가정을 하였다.

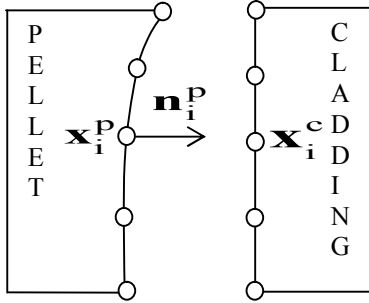


Fig. 4 Contact region of pellet and cladding

먼저 핵연료의 표면과 피복관의 표면의 절점을 이용하여서 접촉이 발생하였는지 아닌지를 판단을 해주어야 한다.

$$g_N = (\mathbf{x}_i^c - \mathbf{x}_i^p) \cdot \mathbf{n}_i^p \quad (9)$$

식 (9)는 관통 함수(penetration fuction)이라 하며 이를 만족하면 핵연료와 피복관이 접촉이 발생하지 않고 간극이 열려있는 상태이다. 하지만 음수 값을 얻는다면 접촉이 발생하는 것을 의미한다. 최소 포텐셜 에너지로 접촉에 대한 수식화를 정리를 할 수 있다.

$$\Pi = \sum_{\gamma=1}^2 \left\{ \int_{B^\gamma} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV - \int_{B^\gamma} \mathbf{f}^\gamma \cdot \mathbf{u} dV - \int_{\Gamma^\gamma} \mathbf{t}^\gamma \cdot \mathbf{u} d\Gamma \right\} + \Pi_c \quad (10)$$

식 (10)은 접촉을 고려한 총 포텐셜 에너지이며  $\gamma=1,2$  은 각각 핵연료와 피복관을 의미하고  $\Pi_c$  은 접촉에 의해 추가된 항이다. 접촉문제를 해결함에 있어서 일반적으로 벌칙 방법(penalty method)과 라그랑지 승수(lagrange multiplier method)를 이용한 방법이 널리 사용되며 본 논문에서는 벌칙 방법을 이용했다.

$$\Pi_c = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_c} \varepsilon_N (g_N)^2 dA, \varepsilon_N > 0 \quad (11)$$

벌칙 방법으로 접촉을 표현한 항인  $\Pi_c$  은 접촉이 활성화된 절점에 구속 조건이 포함된다. 즉, 식 (10)이 음의 값을 가지는 지역에서 적용된다.

$$\delta \Pi = \sum_{\gamma=1}^2 \int_{B^\gamma} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_{B^\gamma} \mathbf{f}^\gamma \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma^\gamma} \mathbf{t}^\gamma \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma + \delta \Pi^c = 0 \quad (12)$$

식 (12)는 최소 포텐셜 에너지를 이용하여 약형(weak form) 식을 유도한 것이고  $\delta \Pi^c$  에 의해서

Table 2 Contact algorithm for PCMI

Loop over iteration : $k=1, \dots, \text{convergence}$
Loop over all contact $k$ (pellet surface node)
Search nearest the cladding surface node
(Check) IF $g_{Ni} = (\mathbf{x}_i^c - \mathbf{x}_i^p) \cdot \mathbf{n}_i^p < 0$ THEN
Calculate $\mathbf{G}_i^c = \varepsilon_N g_{Ni} \mathbf{A}_i \mathbf{C}_i$
$\mathbf{K}_i^c = \varepsilon_N g_{Ni} \mathbf{A}_i \mathbf{C}_i \mathbf{C}_i^T$
ENE IF
Assemble $\mathbf{K}_i^c = \varepsilon_N g_{Ni} \mathbf{A}_i \mathbf{C}_i \mathbf{C}_i^T$
END LOOP
Solve
Check for convergence
END LOOP
END LOOP

접촉 구속 조건을 만들 수 있다.

$$\delta \Pi_c = \int_{\Gamma_c} \varepsilon_N g_N \delta g_N dA = \int_{\Gamma_c} \varepsilon_N (\mathbf{x}^c - \mathbf{x}^p) \cdot (\delta \mathbf{u}^2 - \delta \mathbf{u}^1) dA \quad (13)$$

식 (13)에서 1은 핵연료 2는 피복관을 의미하며 이를 행렬로 정리를 하여 실제 계산에 적용할 수 있다.

$$\sum_{i=1}^{n_c} \varepsilon_N g_{Ni} \delta g_{Ni} dA_i = \sum_{i=1}^{n_c} \int_{\Gamma_c} (\delta \mathbf{u}^2 - \delta \mathbf{u}^1) \varepsilon_N g_{Ni} \mathbf{C}_i dA_i \quad (14)$$

$$\mathbf{C}_i = [n_x, n_y, n_x, -n_x, -n_y, -n_z]^T$$

이를 이산화 작업을 하여 정리하면 유한요소 행렬에서 접촉에 의해 발생하는 구속 벡터 항과 강성 항을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{K}^p = \sum_i^{n_c} \mathbf{K}_i^c = \sum_i^{n_c} \varepsilon_N g_{Ni} \mathbf{A}_i \mathbf{C}_i \mathbf{C}_i^T \quad (15)$$

$$\mathbf{G}^p = \sum_i^{n_c} \mathbf{G}_i^c = \sum_i^{n_c} \varepsilon_N g_{Ni} \mathbf{A}_i \mathbf{C}_i$$

접촉에 의한 구속을 식 (15)를 통하여 할 수 있다. 비선형 문제를 해결함에 있어 뉴턴 방법(Newton Raphson method)을 이용하는데 이에 접촉 문제의 적용은 Table 2를 이용하여 해결하였다.<sup>(9)</sup>

### 3.2 접촉 시 압력

앞서 언급했듯이 핵연료와 피복관이 접촉을 할 경우 간극에서의 열전도도 중  $h_{solid}$  항이 추가되며 이는 압력에 의해 크게 변화 한다. 압력은 벌칙상

수(penalty constant)의 물리적 의미를 알면 계산할 수 있고 핵연료와 피복관의 접촉면에서 강한 스프링으로 연결이 된 것을 의미한다.

$$t_N = \epsilon_N g_N \quad (16)$$

식 (16)을 통하여 접촉면에서의 압력을 구할 수 있으며 이를 고려하여 접촉 시 열 전달 계수를 적용할 수 있다.

### 4. 핵연료 봉의 소성 변형

#### 4.1 탄 소성 변형

핵연료의 열팽창에 의하여 상호 접촉이 발생하면 피복관에 응력 집중이 발생한다. 응력이 피복관의 탄성 응력을 넘어서면 소성 변형이 일어난다. 일반적으로 벌크 소재의 금속에서 많이 쓰이는 본 미세스 항복함수를 이용하여 응력을 해석하였다. 소성 변형을 고려하여 연료 봉을 해석하기 위해 뉴턴 방법(Newton Raphson method)을 이용하여 문제를 해결했다.

$$(\mathbf{K}^{\text{Material}} + \mathbf{K}^{\text{Geometry}})\Delta\mathbf{U} = \mathbf{F}^{\text{ext}} - \mathbf{F}^{\text{int}} \quad (17)$$

식 (17)을 통하여 비선형 문제를 풀 수 있다. 핵연료와 피복관의 변형을 계산함에 있어 외력은 피복관에 가해지는 냉각수의 압력과 초기 온도차이에 의한 열팽창 외력이다. 열팽창은 열 해석을 통하여 얻은 온도를 이용하여 허구 벡터(Fictitious force vector)를 이용하여 문제를 해결 했다.

#### 4.2 소성영역에서 응력해석

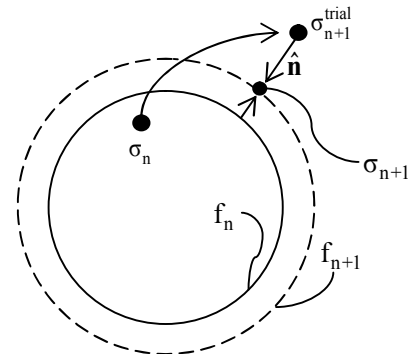
핵연료의 열생성량이 증가하면 그에 따라 열변형이 커짐에 따라 접촉에 의한 피복관의 변형량도 많아지게 된다. 따라서 피복관의 응력 상태가 항복함수를 넘어서 소성 변형이 발생한다. 이를 위해서는 소성영역에서의 해석이 필요로 한다.

$$f = \bar{\sigma} - \infty \quad (\sigma_Y = \infty) \text{ in } B^p, \quad f = \bar{\sigma} - \sigma_Y(\bar{\epsilon}^p) \text{ in } B^e \quad (18)$$

식 (18)은 항복함수로 소성 발생을 판단해 주며 핵연료 봉의 안전 보수성을 위해 핵연료는 탄성 거동을 하고 피복관은 탄소성 거동으로 가정하였으며 등방성(isotropic hardening) 본 미세스 항복함수를 이용하여 계산했다. 소성영역에서 응력은 일반적으로 Euler backward 방법을 이용하여 Return mapping으로 해석하며 본 미세스 항복함수(J2

**Table 3** Radial return mapping algorithm

Initialize k=0
$\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{p(0)} = \boldsymbol{\epsilon}_n^p, \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1}^{p(0)} = \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_n^p, \Delta\lambda_{n+1}^{(0)} = 0, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{p(0)})$
(Check yield condition) – (a)
$f_{n+1}^{(k)} = \bar{\sigma}^{(k)} - \sigma_Y(\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^{p(k)})$ $= (\bar{\sigma}^{(0)} - 3\mu\Delta\lambda_{n+1}^{(k)}) - \sigma_Y(\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^{p(k)}) \quad (\sigma_Y = \infty \text{ for pellet})$
IF $f_{n+1}^{(k)} < \text{TOL}$ THEN
converged
ELSE
calculate plastic parameter
$\delta\lambda_{n+1}^{(k)} = \frac{(\bar{\sigma}^{(0)} - 3\mu\Delta\lambda_{n+1}^{(k)}) - \sigma_Y(\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^{p(k)})}{3\mu + H^{(k)}}$
update plastic strain
$\bar{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\sigma}_{\text{dev}}^{(0)} / \ \boldsymbol{\sigma}_{\text{dev}}^{(0)}\ , \Delta\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{p(k)} = \delta\lambda_{n+1}^{(k)} \frac{3}{2} \bar{\mathbf{n}}, \Delta\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1}^{p(k)} = \delta\lambda_{n+1}^{(k)}$
$\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{p(k+1)} = \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{p(k)} + \Delta\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{p(k)}$
$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k+1)} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{p(k+1)}) = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)} + \Delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}$ $= \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)} - 2\mu\delta\lambda_{n+1}^{(k)} \sqrt{\frac{3}{2}} \bar{\mathbf{n}}$
$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1}^{p(k+1)} = \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1}^{p(k)} + \delta\lambda_{n+1}^{(k)}$
$\Delta\lambda_{n+1}^{(k+1)} = \Delta\lambda_{n+1}^{(k)} + \delta\lambda_{n+1}^{(k)}$
k->k+1, go to (a)



**Fig. 5** Stress update through the von mises yield function

flow)를 이용할 경우 과이평면에서 항복면(Yield surface)이 완전한 원이기 때문에 간단히 Radial return mapping으로 정리를 할 수 있다.<sup>(10)</sup>

Fig. 5에서 응력상태가 항복면의 외부에 존재할 경우 새로운 응력 상태를 찾아야 하며 이는 Table 3에 정리되어 있다.

소성 변형을 고려한 해석에서 강성행렬( $\mathbf{K}^{\text{Material}}$ )이 바뀌게 되는데 이는 Table 3에서 얻어진 유효 소성 변형률( $\bar{\epsilon}^p$ )을 이용하여 소성 변형 시 새로운 구성방정식인  $\mathbf{C}^{\text{alg}}$  (algorithmic moduli)을 얻을 수 있다. 본 미세스 항복식을 이용할 경우는 Simo와 Taylor(1985)에 의해 정리되었으며 이를 이용하여

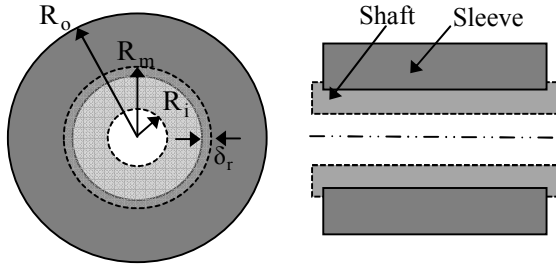


Fig. 6 Interference fit of thick walled cylinder

계산을 수행했다.<sup>(10)</sup>

4.3 접촉 소성변형 모델 검증

핵연료와 피복관의 기계적 상호 작용에 있어서 접촉에 의한 피복관의 소성 변형이 중요한 물리적 현상이라 할 수 있다. 핵연료 성능 코드를 접촉과 소성에 대한 간단한 모델을 이용하여 이에 대해 검증했다. 슬리브(sleeve)와 셰프트(shaft) 두 개의 두꺼운 실린더를 통하여 서로 억지 끼임 현상(Interference fit)이 발생할 경우 이론 값이 정리가 되었다.<sup>(12)</sup>

억지 끼임의 이론 해석은 끝이 열린(Open end) 경우를 해석하여 평면 응력 조건( $\sigma_z = 0$ )으로 해석한다. 끼임 현상에 의해 접촉 부분에서 접촉 압력이 발생하고 이에 의해 외부 실린더의 내부 반경은 늘어나고 내부 링의 외부 반경은 줄어든다. 그 양의 합은 초기 끼임 조건 거리와 같다는 것을 이용하여 변위 및 응력을 얻을 수 있다.

두꺼운 실린더에 내압이 증가할 때 소성 변형 발생을 고려할 경우 소성 영역이 반경 반향으로 점점 넓어진다. 이는 오토프레타즈(autofretting)를 이용하여 실린더의 강도를 높이는 방법으로 많은 연구가 있었다. 평면 변형률 조건( $\epsilon_z = 0$ )에서 본 미세스 항복함수를 이용하고 지수법칙 강화(power law hardening)가 일어난 경우 이론 값을 정리가 되어 있다.<sup>(13)</sup>

이 두 개의 이론 결과를 이용하여 평면 변형률 조건에서 접촉과 소성에 대하여 검증을 하였다. 억지 끼임에 의해 발생하는 압력을 평면 변형률 조건을 적용하여 내부 실린더는 탄성 변형거동을 하고 외부 링은 소성 변형 거동을 가정하여 이론 값을 정리하였다.

$$\sigma = \begin{cases} E\epsilon & \sigma \leq \sigma_Y \\ K\epsilon^n & \sigma > \sigma_Y \end{cases}, K = \sigma_Y^{1-n} E^n \quad (19)$$

식 (19)은 소성 영역을 지수 법칙 강화로 표현

Table 4 Stress of the outer cylinder in plane strain condition

$R_m < r < R_c$	$\sigma_\theta = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \left[ -\left(1 - \frac{R_c^2}{R_o^2}\right) + \frac{1}{n} + \left(2 - \frac{1}{n}\right) \frac{R_c^{2n}}{r^{2n}} \right]$
	$\sigma_r = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \left[ -\left(1 - \frac{R_c^2}{R_o^2}\right) + \frac{1}{n} \left(1 - \frac{R_c^{2n}}{r^{2n}}\right) \right]$
$R_c < r < R_o$	$p_c = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \left[ -\left(1 - \frac{R_c^2}{R_o^2}\right) \right]$
	$\sigma_\theta = \frac{R_c^2 p_c}{R_o^2 - R_c^2} \left(1 + \frac{R_o^2}{r^2}\right)$
	$\sigma_r = \frac{R_c^2 p_c}{R_o^2 - R_c^2} \left(1 - \frac{R_o^2}{r^2}\right)$

Table 5 Equations satisfying  $R_c$

$\delta_r = \Delta R_o - \Delta R_i$
$\Delta R_i = R_m \epsilon_{\theta i} = \frac{R p}{E_i} \left[ \frac{R^2 + R_i^2}{R^2 - R_i^2} (v_i^2 - 1) + v_i + v_i^2 \right]$
$\Delta R_o = R_m \epsilon_{\theta o} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sigma_y r_c^2}{E_o R_m^2}$
$p = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \left[ \left(1 - \frac{r_c^2}{R_o^2}\right) + \frac{1}{n} \left(\frac{r_c^{2n}}{R^{2n}} - 1\right) \right]$

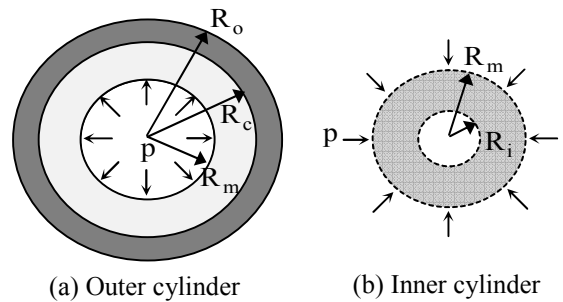


Fig. 7 Geometry of inner cylinder and outer cylinder

한 것으로 소성 영역까지 고려한 외부 실린더에 적용하였다. 일반적으로 억지 끼임 현상은 평면 응력으로 정리되어있는데 핵연료 성능 코드와의 비교 검증을 위해 이를 평면 변형률 조건을 적용하여 정리를 하였다. 이를 정리하면 반경방향과 원주 방향의 응력 분포는 Table 4로 응력 분포를 나타낸다.

소성영역까지의 반경  $R_c$  을 이용하여 Table 4를 통해 응력분포를 구할 수 있다.  $R_c$  를 만족하는 값은 Table 5를 간단한 수치적 방법을 이용하여 구

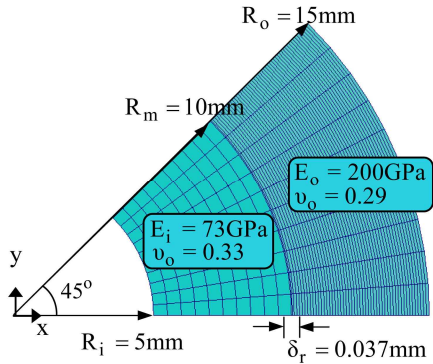


Fig. 8 FE model of interference of thick cylinder

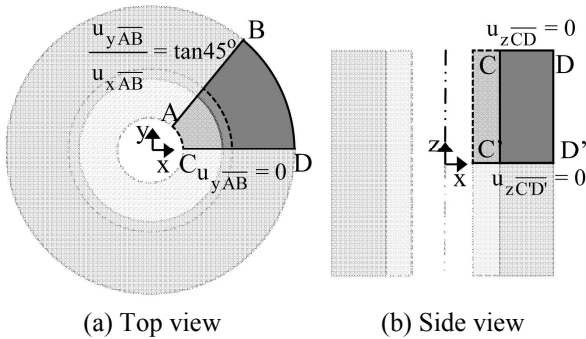


Fig. 9 Boundary condition of interference of thick cylinder

한 후 적용하면 된다. 이는 내부 실린더는 탄성거동을 외부 링은 지수강화법칙에 의한 소성거동을 하며 평면 변형을 조건에서 정리한 수식이다.

이를 하나의 예제로 앞서 정리된 응력과 핵연료와 피복관 검증했다.

Fig. 8은 앞서 언급한 이론과 핵연료 성능코드의 결과를 비교를 위한 FE 모델링이며 3D 8절점 요소를 이용하여 해석을 하였다. 앞서 정리한 식과 마찬가지로 내부 실린더의 경우는 탄성으로 가정을 하였고 외부는 소성 거동을 고려하여 계산을 수행을 하였고 지수 법칙 강화를 적용 하였으며 항복응력은  $300\text{MPa}$  ( $\sigma_Y = 300\text{MPa}$ )으로 적용을 하였으며 지수는  $0.2$  ( $n=0.2$ )로 설정을 하였다.

Fig. 9은 경계조건을 나타낸 것이며 실린더의 1/8을 해석을 적용하였다. 이와 같은 조건을 부여하여 해석 하였고 여기서 원주 방향의 응력이 주요 요소로 이에 대하여 핵연료 성능 코드와 앞서 제시된 이론 값과 비교를 하였다. 여기서 소성을 고려한 외부 실린더의 반경에 따라 값을 비료했다.

Fig. 10에서 접촉으로 인한 외부 실린더의 소성 변형 거동에서 발생한 원주 방향 응력을 이론적으로 정리한 것과 핵연료 성능 코드를 통한 결과를

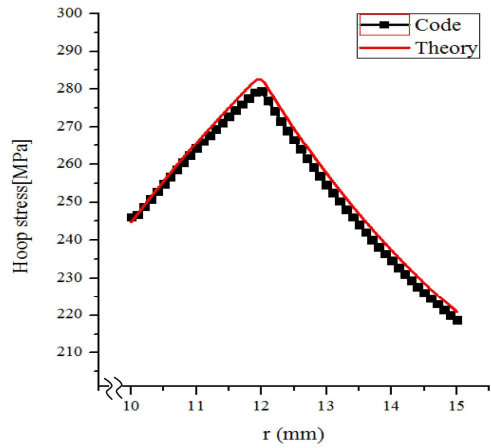


Fig. 10 Comparison of hoop stress of outer ring

비교를 하였다. 실린더 모양의 피복관과 핵연료의 기계적 상호작용에서 중요한 물리적 현상인 접촉에 의한 소성 변형의 검증을 하였다.

### 5. PCMI 해석 결과 및 논의

앞장에서 언급한 해석 방법을 적용하여 핵연료와 피복관의 상호작용 해석을 하였으며 결과에 대해 논의 하고자 한다. 비정상적으로 핵연료의 발열량이 커질 경우 기계적 상호작용에 대하여 해석 및 논의를 하고자 한다. 초기 핵연료 봉의 간극 거리는  $85\mu\text{m}$ 이다. 하지만 오랜 시간 동안 연소를 하는 동안 피복관은 냉각수의 압력에 의해 크립 다운(Creep) 현상에 의해서 간극이 좁아지게 된다. 이러한 것을 고려하여 초기 간극 거리를 변화하여 해석을 진행하였다.

#### 5.1 핵연료와 피복관의 모델

오랜 시간 핵연료가 연소를 하게 되면 조각이 난다. 1차원 해석이나 2차원을 이용하여 핵연료와 피복관을 해석을 할 경우 핵연료가 반경방향으로 조각난 상태를 표현을 하지 못한다. 일반적으로 핵연료의 반경방향으로 8조각이 난 상태로 표현을 하며 이를 가정을 하여 진행하였다.

핵연료 성능 코드를 해석함에 있어 사용된 물성치는 Table 6을 이용하였다. 핵연료는 산화우라늄으로 구성된 세라믹이고 해석의 보수성을 위해 탄성거동으로 가정을 하였다.<sup>(14)</sup> 핵연료 하나의 부분을 해석을 진행하였고 치수는 Fig. 11에 나타나 있다.

8조각난 핵연료와 이를 감싼 형태의 피복관의 모습이다. 이러한 형상에서 적절한 경계조건을 주어 해석을 진행하였다.



Table 6 Material properties

Young's modulus [GPa]	
Pellet	$2.26 \times 10^5 (1 - 1.131 \times 10^{-4} \times (T - 273.15))$
Cladding	$9.8067 \times 10^2 \times [9.9 \times 10^{-3} - 566.9(T - 273.15)]$
Poisson ratio	
	0.316
Thermal expansion coefficient [1/K]	
	$1.2 \times 10^{-5}$
	$0.3303 + 8.376 \times 10^{-5} \times (T - 273.15)$
	$6.7 \times 10^{-6}$
Thermal conductivity [mW/mm·K]	
	3.87
	15.29
Yield stress [MPa]	
	Elastic deformation
	$307 - 0.209(T - 273.15)$
K [MPa]	
n	
Elastic deformation	
	$\sigma_Y + 328$
	$0.0504 + 0.0001435(T - 273.15)$

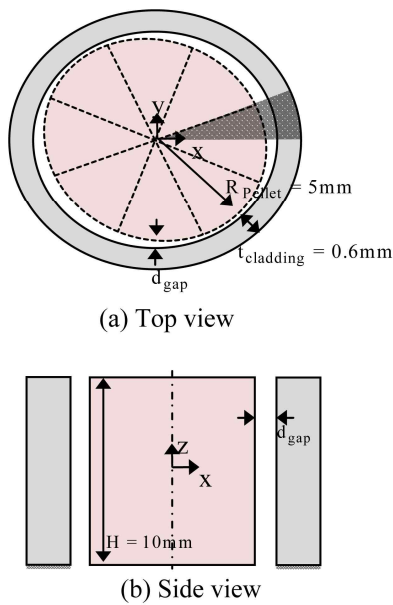
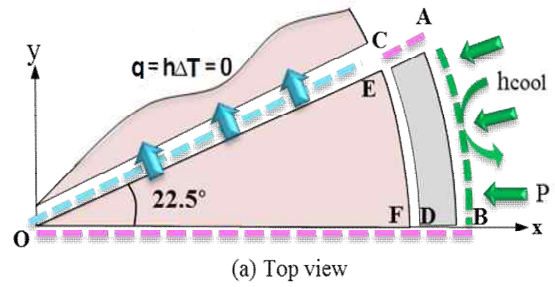


Fig. 11 Dimensions of the pellet and the cladding

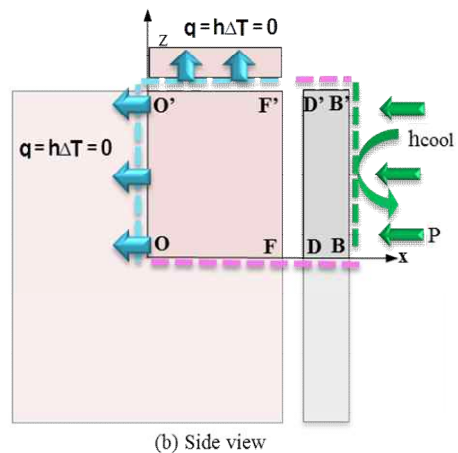
Fig. 12는 해석에 적용된 경계조건이며 간극 사이의 열 해석은 앞장에서 언급한 방법을 이용하여 해석을 했다. 조각이 난 핵연료 사이의 열 교환은 순환 대칭에 의해 거의 이루어 지지 않는다고 가정을 하였다. 냉각수는 513K의 온도를 가지며 압력이 15MPa이 피복관에 작용하는 것을 가정하였고 열전달 계수는  $1000 \text{mW/mm}^2 \text{K}$ 으로 작용하는 것으로 설정하였다.

5.2 해석 결과

간극거리( $d_{\text{gap}}$ )가  $65 \mu\text{m}$  경우에 대하여 해석을 진행하였고 핵연료의 정상적인 연소 상태인  $20 \text{kW/m}$ 의 열 생성량인 경우와 비 정상적으로 열생



**Thermal Boundary condition(Top view)**  
 Symmetry(Adiabatic) :  $q_{\overline{BD}} = q_{\overline{OF}} = q_{\overline{AC}} = 0$   
 Adiabatic :  $q_{\overline{OE}} = 0$   
 Convection( $T_{\text{cool}} = 513\text{K}$ ,  $h_{\text{cool}} = 1000 \text{mW/mm}^2 \cdot \text{K}$ ) :  
 $q_{\overline{AB}} = h_{\text{cool}}(T - T_{\text{cool}})$   
**Mechanical Boundary condition(Top view)**  
 Symmetry :  $u_{y\overline{OF}} = u_{y\overline{DB}} = 0$   $u_{y\overline{AC}} / u_{x\overline{AC}} = \tan 22.5^\circ$   
 Pressure(Coolant, 15 MPa) :  
 $\sigma_{ij}n_j = -15$  on AB



**Thermal Boundary condition(Side view)**  
 Symmetry(Adiabatic) :  $q_{\overline{DB'}} = 0$   
 Adiabatic :  $q_{\overline{OO'}} = q_{\overline{OF'}} = 0$   
 Convection( $T_{\text{cool}} = 513\text{K}$ ,  $h_{\text{cool}} = 1000 \text{mW/mm}^2 \cdot \text{K}$ ) :  
 $q_{\overline{BB'}} = h_{\text{cool}}(T - T_{\text{cool}})$   
**Mechanical Boundary condition(Side view)**  
 Symmetry :  $u_{z\overline{OF}} = u_{z\overline{DB}} = u_{z\overline{DB'}} = 0$   
 Pressure(Coolant, 15 MPa) :  
 $\sigma_{ij}n_j = -15$  on BB'

Fig. 12 Boundary condition of the pellet and cladding

성이 많아지는 경우로는  $50 \text{kW/m}$ 에 대하여 진행을 하였다.

Fig. 13은 핵연료의 열 생성량에 따른 온도 해석 결과와 피복관의 유효 소성변형률 결과이다. 핵연료 봉에서는 일반적으로 단위 길이당[kW/m] 열생성량을 이용하며 실제 계산시는 부피단위로 환산하여 진행을 하였다. 정상적으로 연소가 되는 경

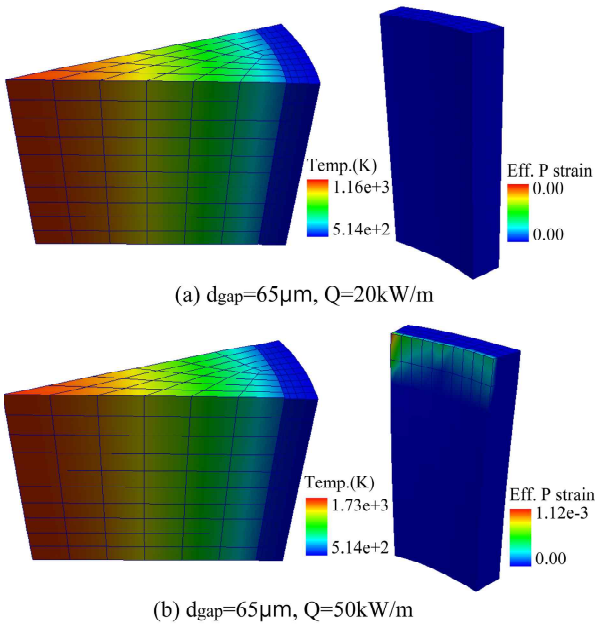


Fig. 13 Temperature of fuel rod and effective plastic strain of cladding

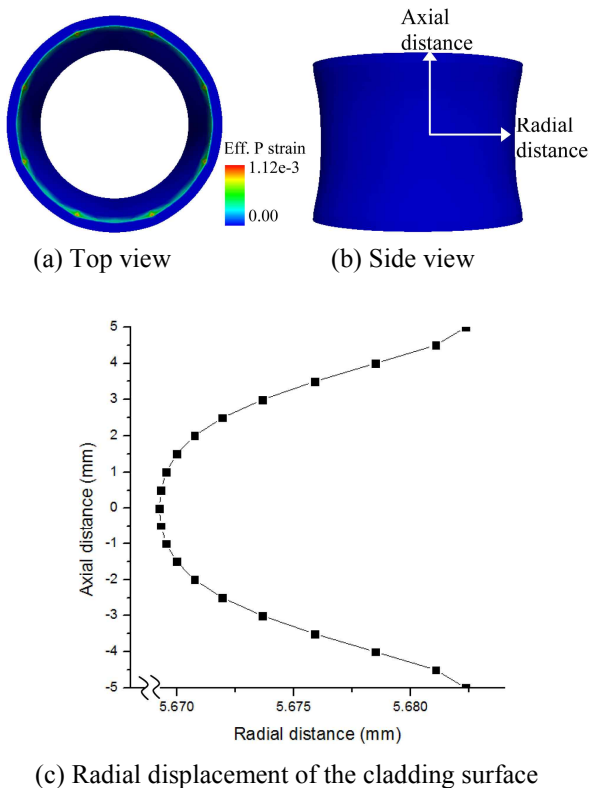


Fig. 14 Bamboo effect of the cladding and distribution of radial distance

우( $Q=20\text{kW/m}$ )는 핵연료가 열팽창에 의하여 피복관과 접촉이 발생을 하지 않았다. 하지만 비정상적으로 열생성량이 높아지는 경우( $Q=50\text{kW/m}$ ) 핵연료와 피복관이 접촉이 발생을 하여 소성 변형이

발생하였고 핵연료의 윗부분이 피복관을 밀어내는 결과를 얻을 수 있었다.

핵연료와 피복관이 접촉한 경우( $Q = 50 \text{ kW/m}$ )의 피복관의 변형모양은 Fig. 14를 통해 알 수 있다. 피복관은 접촉에 의하여 모래시계형태(hourglass shape)를 나타내며 실제 사용된 피복관의 모양도 모래시계 형태로 산동성(ridge) 모양을 보인다.

### 5. 결론

핵연료 봉의 안전성을 평가하기 위하여 다차원, 다물리 현상을 해석할 수 있는 핵연료 성능 코드가 개발이 되고 있다. 본 논문은 3차원 요소를 이용하여 핵연료와 피복관의 기계적 거동의 해석에 대하여 제시하였으며, 간극 열 해석에 대한 해석과 상호 접촉 및 탄 소성 변형에 대하여 고려하였다.

- (1) 간극 사이의 열전달 계수는 Ross & Stoute가 제안한 식을 이용하여 해석을 진행했다.
- (2) 핵연료의 열팽창에 의한 피복관과의 접촉 해석을 진행하였으며 접촉시 발생된 압력을 계산하여 이를 간극 열전달 계수( $h_{solid}$ )에 적용하였다.
- (3) 접촉에 의하여 발생한 응력이 탄성 영역을 넘을 경우 소성변형이 일어나며 이에 따라 탄 소성 해석에 대하여 진행을 하였다.
- (4) 접촉 해석과 탄 소성 해석을 두개의 실린더의역지끼임 현상에 대하여 이론식으로 정리하여 비교 및 검증을 하였다.
- (5) 연소가 비정상적으로 열생성을 많이 할 경우( $Q=50\text{kW/m}$ ) 핵연료의 열팽창에 의하여 피복관과 접촉을 하며 소성변형까지 일어나게 된다. 핵연료의 중앙부와 끝부분의 온도 구배에 의하여 모래시계 형태의 모양이 나타남을 알 수 있었고 이에 의한 피복관과의 접촉에 의해 대나무(Bamboo) 형태로 변함을 알 수 있었다. 이는 실제 핵연료 봉의 변형 거동을 잘 표현 했다 할 수 있다.

향후에는 핵연료의 열생성량을 크게 함으로 피복관의 영구 변형을 평가하는 실험인 Power ramp test에 대하여 해석을 할 수 있으며 미국 NRC에서 개발된FRAPCON3.4에서 계산되는 물성치와 결합이 가능하다.

### 후 기

이 논문은 BK 21 Plus 사업과 2014 년도 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임(핵연료 연소 성능 평가기술개발, No. 2012M2A8A5025824).

참고문헌  
(References)

- (1) Struzik, C., Moyne, M. and Piron, J.P., 1997, High Burn-up Modelling of UO<sub>2</sub> and MOX Fuel with METEOR / TRANSURANUS version 1.5, ANS International Topical Meeting on Light Water Reactor Fuel.
- (2) Brochard, J., Bentejac, F. and Hourdequin, N., 1997. Non-linear Finite Element Studies of the Pellet Cladding Mechanical Interface in PWR Fuel. In: Transactions of the 14<sup>th</sup> SMIRT, Lyon, France (TOUTATIS an Application of the CAST3M Finite Element Code for PCI Three Dimensional Modelling).
- (3) Thouvenin, G., Ricaud, J. M. and Michel, B., 2006. ALCYONE: the PLEIADES Fuel Performance Code Dedicated to Multidimensional PWR Studies. In: International Meeting on LWR Fuel Performance, Spain.
- (4) Hikimet, S. A. and Ortego, P., 2005, "A Review of Nuclear Fuel Performance Codes," *Progress in Nuclear Energy*, Vol. 46, No. 2, pp. 127~141.
- (5) Suzuki, M., 2000, Light Water Reactor Fuel Analysis Code FEMAXI-V, JAERI-DATA/Code 2000-030.
- (6) Kennard, E. J., 1938, "Kinetic Theory of Gases," McGraw-Hill.
- (7) Ross, A.M. and Stoute, R.L., 1962, "Heat Transfer Coefficient Between UO<sub>2</sub> and Zircaloy-2," Atomic Energy of Canada, Technical Report, ACEL-1552.
- (8) Geelhood, K. J., Luscher, W. G. and Cuta, J. M., 2011, FRAPTRAN 1.4: a Computer Code for the TRansient Analysis of Oxide Fuel Rods, Technical Report NUREG/CR-7023, Vol. 1, US Nuclear Regulatory Commission.
- (9) Wriggers, P., 2006, "Computational Contact Mechanics, second edition".
- (10) Belytschoko, T., Liu, W. K. and Moran, B., 2000, "Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures".
- (11) Simo, J. C. and Taylor, R. L., 1985, "Consistent Tangent Operators for Rate Independent Elastoplasticity," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 48, 101~119.
- (12) Parsons, B. and Wilson, E. A., 1970, "A Method for Determining the Surface Contact Stresses Resulting from Interference Fits," *ASME, Journal of Engineering for Industry*, pp. 208~218.
- (13) Gao, X.-L., 2003, "Elasto-plastic Analysis of an Internally Pressurized Thick-walled Cylinder Using an Strain Gradient Plasticity Theory," *International Journal of Solids and Structures*, pp. 6445~6455.
- (14) Suzuki, M., 2000, "Light Water Reactor Fuel Analysis Code FEMAXI-V(VER.1)," *JAERI-Data/Code*.