

균등 압력이 부과된 원형판의 변형에 대한 해석요소의 정확성 비교

이 형 옥*

한국교통대학교 에너지시스템공학과

Deflection and Stress Distributions of a Circular Plate under the Constant Pressure with respect to the Element types

Hyoungwook Lee*

Department of Energy System Engineering, Korea National University of Transportation,
50 Daehak-ro Chungju, Chung-buk, 27469, Korea

(Received 2016.05.17 / Accepted 2016.05.23)

Abstract : The analysis of circular plates under the constant pressure are simplified as the loading conditions of the circular manhole. The theoretical solution of circular plates with respect to the constant pressures are derived by using the governing equation of plate deflection. The deflection and the radial stress distributions were calculated by the theory. Finite element solutions were conducted with respect to the element types of the continuum elements. The most accurate element was selected by comparisons of the theoretical solutions and simulated solutions. The C3D8I element type in brick-type continuum elements gave in a good accordance with the theoretical solutions.

Key words : Axisymmetric circular plate, Plate Theory, Finite Element Analysis, Manhole

1. 서 론

원형 맨홀의 정적해석을 위하여 유한요소법을 도입하고 있다.^{1,2)} 이 때 3차원 연속체 요소의 선택은 해의 정확성에 영향을 줄 수 있다. 원형 맨홀의 강도 평가는 원형 맨홀의 상단부에 면압을 부과하여 지정 하중 내에서 파단이나 형상의 변화가 없어야 한다. 예를 들어 직경 648mm의 원형 맨홀의 경우, 45ton 즉 450 kN의 하중에서 소성변형이 없어야 하는 조건이다. 3차원 연속체 요소 중에서 피라미드형 요소는 복잡한 모델에서 사용하기 편리하지만, 해의 관점에서는 보다 강한(Stiff)한 해의 특성을 보일 수 있다. 따라서 상대적인 비교가 아닌 절대적인 응력값의 비교를 위해서는 요소의 선택에 의한 그리고, 요소의 사이즈의 선택에 따른 값의 정확성을 비교하여야 한다. 다만, 복잡한 형상에서는 유한요소화가 쉬운 피라미드형 4면

체 요소를 쓰게 되는데, 이 경우는 해의 상대적 비교를 통하여 설계변경을 추진할 수 있다.

본 연구에서는 맨홀의 강도평가에 앞서 원형 맨홀과 유사한 경계조건을 가진 가장 간단한 형태의 원형판에 대한 압력문제를 풀어 요소의 선택 및 사이즈의 선택이 가능한 지에 대한 평가를 수행하였다. 원형판에 대하여 판변형 이론을 이용하여 이론적으로 처짐량 및 응력을 계산하고, 이에 해당하는 유한요소 해석을 수행하여 요소 선택 및 요소의 사이즈에 대한 평가를 수행하였다.

2. 판 변형 이론을 통한 이론해의 유도

2.1 판 변형 이론 해

판 변형에 대하여 몇 가지 주요 가정을 가지고 해를 유도한다.³⁾ 첫째, 중심면의 처짐은 판 두께에 비하여 작고, 처진 면의 기울기는 1보다 매우 작다. 둘째, 중심

*Corresponding author, E-mail: hwlee@ut.ac.kr

면에 수직이었던 선은 굽힘변형 후에도 수직을 유지한다. 이 가정을 통하여 수직전단변형률(γ_{xz}, γ_{yz})은 무시한다. 따라서 판의 처짐은 주로 굽힘 변형률에 의하고 수직 방향 변형률 ϵ_z 도 무시한다. 셋째, 중심면의 변형률 또는 평면 변형은 일어나지 않는다. 넷째, 수직방향 응력은 무시한다. 이러한 가정은 다음의 식(1)을 만듦게 된다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

또한, $\epsilon_z = \partial w / \partial z$ 의 적분으로 식(2)를 가정할 수 있다.

$$w = f_1(x, y) \quad (2)$$

세 번째 가정에 의하여 식(3)을 구할 수 있다.

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}, v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3)$$

따라서 각 점에서의 변형률은 다음과 같다.

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \epsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (4)$$

이 식들을 일반적인 3차원 Hooke's Law에 대입하고 모멘트에 대하여 적분하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_x dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_y dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= \int_{-t/2}^{t/2} z \tau_{xy} dz = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 D는 판강성 (flexural rigidity)으로

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (6)$$

이다.

판의 처짐이론에서 다음의 처짐식을 얻을 수 있다.

$$\nabla^4 w = \frac{p}{D} \quad (7)$$

여기서, p는 압력이다.

2.2 유사 경계조건에 의한 이론해

앞의 이론해에서 축대칭 원형판에 대하여 식 (7)을 적분하면,

$$w = \int \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int \frac{rp}{D} dr dr dr dr \quad (8)$$

이 되고, 적분상수를 이용하여 나타내면 균등 압력 p_0 와 함께 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{D}{p_0} w = \frac{r^4}{64} + \frac{C_1 r^2}{4} (\ln r - 1) + \frac{C_2 r^2}{4} + C_3 \ln r + C_4 \quad (9)$$

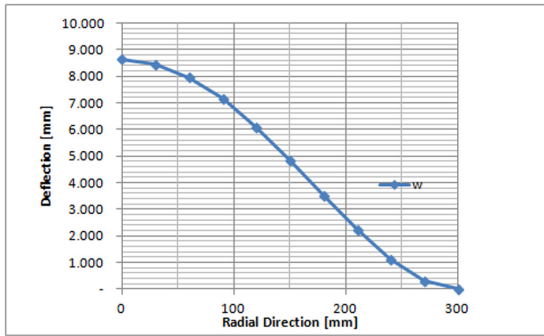
끝단에 클램핑 조건을 부과하면, $r=a$ 일 때, $w=0$, $\partial w / \partial r = 0$ 인 조건과 $r=0$ 일 때, 유한한 처짐을 나타내야 한다는 조건을 이용하면, $C_1 = C_3 = 0$ 과 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$C_2 = -\frac{a^2}{8}, C_4 = \frac{a^4}{64} \quad (10)$$

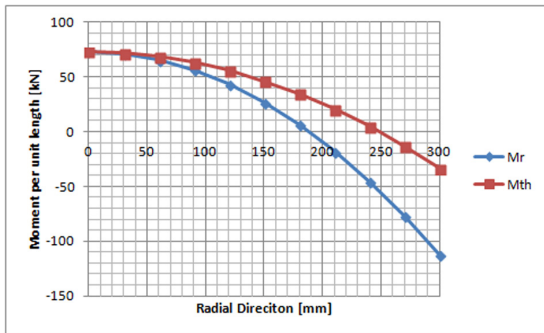
따라서 처짐과 모멘트, 응력은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} w &= \frac{p_0}{64D} (a^2 - r^2)^2 \\ M_r &= \frac{P_0}{16} [(1+\nu)a^2 - (3+\nu)r^2] \\ M_\theta &= \frac{P_0}{16} [(1+\nu)a^2 - (1-3\nu)r^2] \\ \sigma_{r, \max} &= \frac{3}{4} \frac{p_0 a^2}{t^2} \end{aligned} \quad (11)$$

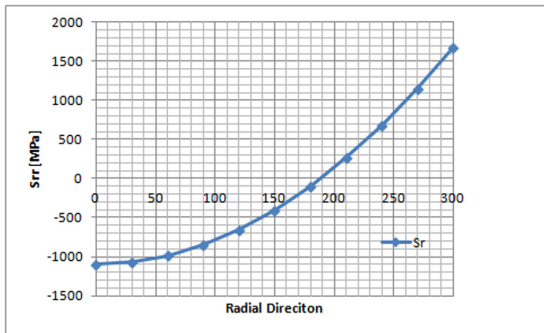
이렇게 구한 식에 반경 $a=300$ mm, 두께 $t=20$ mm, 탄성계수 $E=200$ GPa, 푸아손 비 0.3, 균등 분포압력을 10 MPa를 대입하여 처짐, 모멘트, 응력을 구하면 Fig. 1과 같다. 이때 최대응력은 1687.5 MPa이며, 이 값은 이론해로는 너무 큰 값이나, 이 값들은 선형으로 변화하기 때문에 보다 큰 변형상태를 보여주기 위하여 대입한 값들이다. 실제 비교에서는 보다 낮은 압력을 같이 비교하였다.



(a) deflection



(b) Moments per unit length

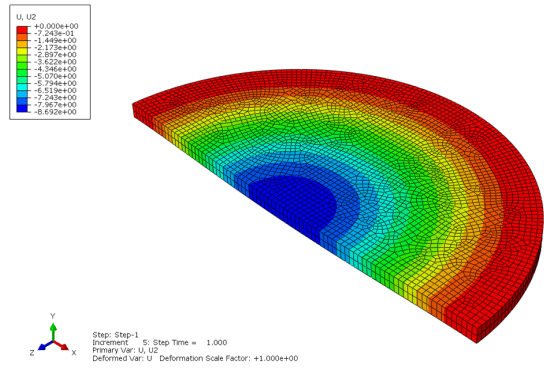


(c) Radial stress

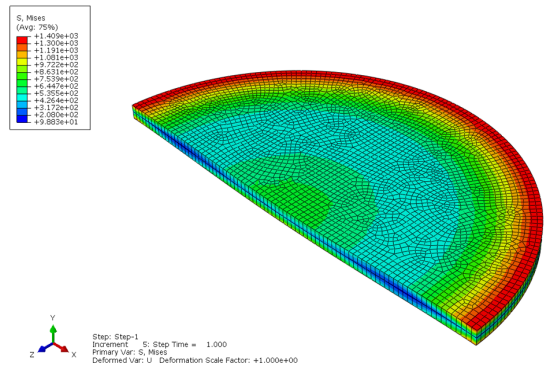
Fig. 1 Distributions of deflections, moments per unit length, and radial stress at pressure of 10 MPa by theoretical solutions

3. 유한요소 해석을 통한 비교

앞선 경계조건을 적용하여 유한요소해석을 수행한 결과를 Fig. 2에 도시하였다. 우선 처짐량과 응력값을 비교하였다. 중심부의 처짐이 가장 크며, 외곽 경계에서는 슬로프가 없으며, 최대 응력은 경계에서 나타나



(a) Deflection at p = 10 MPa



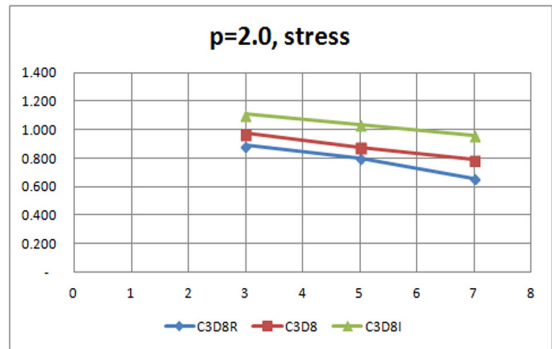
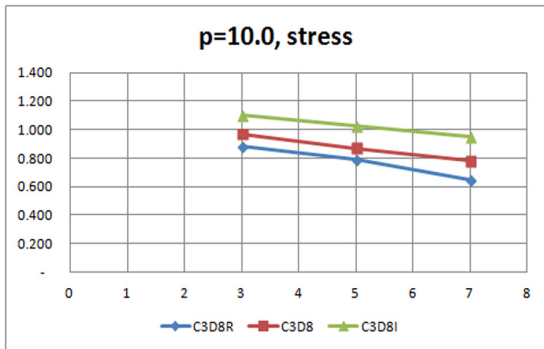
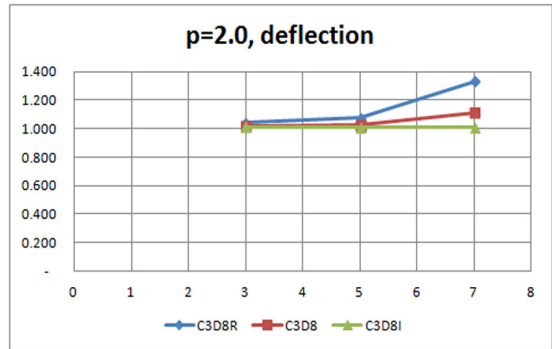
(b) von Mises Stress at p = 10 MPa

Fig. 2 Deflection and stress distributions at pressure of 10 MPa by FE simulations

그림 상으로는 해와 유사한 결과를 보이는 것을 확인할 수 있다.

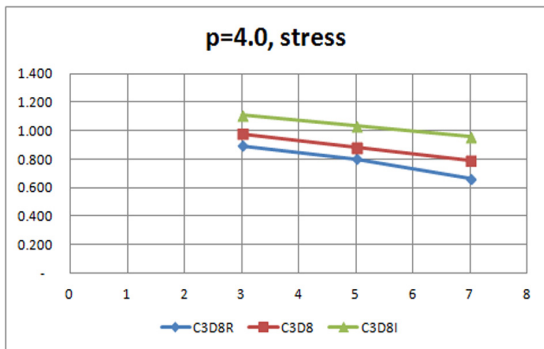
보다 상세한 비교를 위하여 압력을 10, 4, 2 MPa로 변화시키고, ABAQUS/Standard에서 선택할 수 있는 요소들 중에서 육면체 요소를 C3D8R, C3D8, C3D8I를 선택하여 비교하였다. C3D8R은 요소의 중심에서 저감적분한 요소로 시간적 이득은 있으나, 조금 soft한 결과를 보여주며, C3D8은 표준요소이며, C3D8I는 굽힘에서 수정 보완된 요소로 적은 요소 사이즈에서도 해를 잘 따라 가는 것으로 알려져 있다. Fig. 3에 각각의 처짐량과 응력을 요소의 사이즈를 x축으로 하고, y축을 이론치와 비교하여 도시하였다. y축 값이 1인 경우가 해와 일치하는 것을 의미한다.

C3D8R의 경우, 처짐은 요소의 사이즈가 커질수록 커지며, 응력은 점차 낮아지는 것을 알 수 있으며,



(a) pressure = 10 MPa

(c) pressure = 2 MPa



(b) pressure = 4 MPa

Fig. 3 Deflection and Stress distributions at various pressures according to finite element types and mesh sizes

C3D8은 요소의 사이즈가 커짐에 따라 치짐은 커지지만 C3D8R보다는 작은 증가를 보인다. 응력값은 동일한 경향을 보인다. C3D8I 요소는 요소의 사이즈에 따른 치짐량은 거의 변화가 없어 굽힘이 보상된 요소로 예상대로 보다 강건한 결과를 보여준다.

4. 결 론

본 논문에서는 원형판의 치짐과 응력값을 판 이론해를 통하여 계산하고, 그 결과와 유한요소 해석과의 결과를 비교하여 해석에 사용할 수 있는 정확한 요소를 판단하고자 하였다. 비교 결과 맨홀 사이즈 직경 648 mm의 치수형태에 대하여 유한요소의 사이즈는 약 6 mm 정도를 사용하고, C3D8I 요소를 사용하는 것이 해의 정확성을 높일 수 있다고 할 수 있다.

후 기

본 연구는 중소기업청에서 지원하는 2015년도 산

학연협력 기술개발사업(No. C0275948)과 2016년 한국교통대학교 의 지원을 받아 수행한 결과입니다.

References

- 1) H.W. Lee, G.Y. Park, D.W. Kim, M.H. Kim, and S.J. Kim, "Structural analysis of cast-iron manhole according to solid elements selection," Fall Proceeding of Korea Society for Technology of Plasticity, pp.200-201, 2015
- 2) H. K. Kim, Y. S. Yang, and K. Y. Bae, "Analysis of Strengthening Structures of Steel Manhole Cover," Journal of Welding and Joining, Vol. 32, No.2, pp.54-62, 2014
- 3) A. C. Ugural and S.K. Fenster, Advanced Strength and Applied Elasticity, 2nd Edn., 1975