

가상스프링 모델의 안정성 영역에 대한 가상질량의 영향에 대한 연구

이 경 노*

한국교통대학교 에너지시스템공학과

A study on the stability boundary of a virtual spring model with a virtual mass

Kyungno Lee*

Department of Energy System Engineering, Korea National University of Transportation,
50 Daehak-ro, Chungju-si, Chungbuk 380-702, Korea

(Received 2016.11.01 / Accepted 2016.11.17)

Abstract : This paper presents the effects of a virtual mass on the stability boundary of a virtual spring in the haptic system. A haptic system consists of a haptic device, a sampler, a virtual rigid body and zero-order-hold. The virtual rigid body is modeled as a virtual spring and a virtual mass. According to the virtual mass and the sampling time, the stability boundary of the virtual spring is analyzed through the simulation. As the virtual mass increases, the value of the virtual spring to guarantee the stability gradually increases and then decreases after reaching the maximum value. These simulation results show that the addition of the virtual mass enables to expand the stability boundary of the virtual spring.

Key words : Haptic system (햅틱시스템), stability boundary (안정성 영역), virtual rigid body model (가상강체 모델), virtual mass (가상질량)

1. 서론

햅틱시스템은 사용자가 가상 환경과 상호작용할 때 사용자에게 현실에서 느끼는 감각과 유사한 촉감 및 역감을 느끼도록 하기 위한 장치와 가상환경 모델로 구성된다. 그리고 현실감이 증강된 햅틱시스템을 구현하기 위해서 가상 환경 모델은 현실에서의 역감과 유사한 역감을 제시할 수 있는 모델을 포함해야 한다.

기존 연구에서는 사용자가 가상환경 속에 있는 강체를 만질 때 느끼는 역감을 표현하기 위해서 가상스프링과 가상댐퍼로 모델화한다. 그리고 햅틱 시스템의 안정성이 보장되는 한도내에서 가상스프링 상수를 최대한 크게 할 수 있는 방법 또는 가상 환경 설계를 위한 안정성 영역을 연구해 왔다.

가상강체 모델의 안정성 영역에 관한 연구는 수동성(passivity)를 토대로 진행되어 왔으며, 식 (1)에서 제시된, 샘플링주기 (T), 햅틱장치의 댐퍼 (Bd), 가상스프링 상수 (Kw)에 관한 관계식이 널리 사용되고 있다¹⁾. 또 다른 연구에서는 루드-후르비쯔 (Routh- Hurwitz) 방법을 이용하여 안정성 (stability)의 측면에서 샘플링 주기 (T), 햅틱장치의 댐퍼 (Bd), 가상스프링 상수 (Kw), 가상댐퍼 (Bw)와의 안정성 영역에 관한 관계식을 식 (2)와 같이 유도했다²⁾. 그래서 가상댐퍼 (Bd)도 햅틱 장치의 댐퍼 (Bd)와 동등하게 시스템의 안정성에 기여한다는 것을 제시했다.

$$B_d > \frac{K_w T}{2} \tag{1)^1}$$

$$B_d + B_w > \frac{K_w T}{2} \tag{2)^2}$$

*Corresponding author, E-mail: klee@ut.ac.kr

시스템의 안정성을 유지하면서 가상 강체의 강성을 크게 구현하기 위한 방법으로 샘플-홀드 방식을, 기존의 영차홀드 (ZOH; Zero-Order-Hold)에서 일차홀드(FOH; First-Order-Hold)로 변환하여 시스템을 구현하는 방법이 제시되었고, 가상스프링 상수의 안정성 영역이 확대됨을 제시했다³⁻⁵⁾.

본 연구에서는 가상강체 모델에 대한 새로운 방법을 제시하고자 한다. 기존 연구들¹⁻⁵⁾은 가상 강체를 모델화할 때, 가상스프링 (Kw)만 사용하거나 가상스프링 (Kw)과 가상댐퍼 (Bd)로 구성된 것으로 모델화한다. 그렇지만 본 연구에서는 가상강체 모델에서 가상 질량 (Mw)을 추가하여 가상질량 크기 변화에 따른 가상스프링 상수 (Kw)의 안정성 영역 변화를 분석하고자 한다. 이를 통해 안정적인 상호작용을 위한 가상스프링 영역을 제시하고자 한다.

2. 가상질량을 포함한 햅틱 시스템

가상강체 모델은 Fig. 1과 같이 가상질량 (Mw)와 가상스프링 (Kw)로 모델화되며, 가상강체모델 조작에 따른 반력은 식 (3)과 같다. 여기서 x 와 \ddot{x} 는 각각 햅틱 장치 조작에 따른 변위와 가속도이다.

$$\text{Reflective force model: } f_r = M_w \ddot{x} + K_w x \quad (3)$$

햅틱시스템은 사용자와 햅틱장치 모델에 해당하는 연속시스템과 가상환경 모델에 해당하는 이산시스템으로 구성된다. 따라서 햅틱시스템은 가상 강체 모델을 포함하여, 질량(Md)와 댐퍼(Bd)로 모델화되는 햅틱장치, 샘플러(Ts), 영차홀드 (ZOH)로 구성되며 Fig. 2와 같다. 햅틱장치 모델은 Fig. 2와 같이 2차 시스템으로 모델화되었으며, 영차홀드는 식 (4)와 같이 모델화된다.

$$\text{ZOH model: } G_{h0}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \quad (4)$$

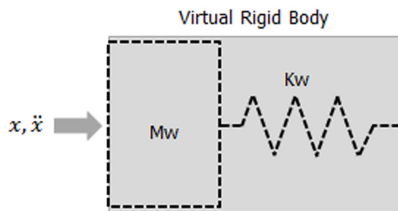


Fig. 1 A virtual rigid body model with a virtual spring and a virtual mass.

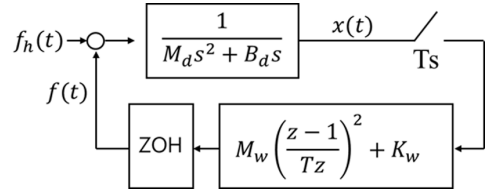


Fig. 2 Block diagram of haptic system including a virtual mass and a virtual spring.

3. 가상스프링 모델의 안정성 영역 분석

가상강체 모델에서 가상질량 크기 변화에 따라 가상스프링 상수의 안정성 영역 변화를 시뮬레이션을 통해 분석하고자 한다.

시뮬레이션모델은 Fig. 2를 토대로 설계되었으며, Fig. 3과 같이 시뮬레이션을 진행하면서 시간변화에 따라 변위 (x)가 점차 감소하면 시스템이 안정하다고 가정하고, 시스템이 안정화되는 가상스프링 (Kw)의 최대값을 구해서 안정성 영역을 분석한다.

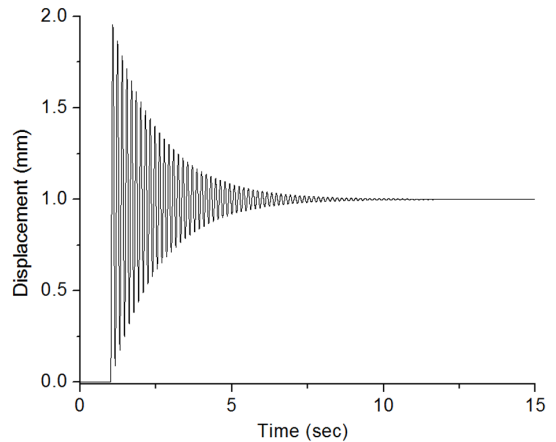


Fig. 3 An example of stable behavior where T=1 ms, Mw=0.1 kg, Kw=1000 N/m, ZOH.

시스템 모델에서 햅틱장치의 질량 (Md)는 0.5 kg, 댐퍼 (Bd)는 1.0 Ns/m, 샘플링 주기 (Ts)는 1 ms로 고정한 후, 가상질량 (Mw)를 0에서부터 점차 키우면서 시뮬레이션을 수행한다. 이 때 가상스프링 (Kw)의 안정성 영역을 분석한 결과가 Table 1이다.

가상질량 (Mw)가 '0'인 경우, 가상스프링 (Kw)의 안정성 영역은 기존 연구에서 제시된 식 (1)과 (2)에 제시된 변수들을 적용했을 때와 동일한 결과이다. Table

Table 1 Max. stiffness of a virtual spring (Kw) according to a virtual mass when sampling time(Ts)=1 ms, Md=0.5 kg, Bd=1.0 Ns/m and ZOH.

Sampling time (sec)	Mw (kg)	Kw (N/m)	Ratio
0.001	0	2000	1.00
	0.01	2125	1.06
	0.02	2261	1.13
	0.03	2408	1.20
	0.04	2570	1.29
	0.05	2748	1.37
	0.06	2945	1.47
	0.07	3163	1.58
	0.08	3406	1.70
	0.09	3681	1.84
	0.1	3992	2.00
	0.2	13658	6.83
	0.3	477351	238.68
	0.4	902392	451.20
	0.5	1001335	500.67
	0.6	934522	467.26
	0.7	772725	386.36
	0.8	551499	275.75
	0.9	290629	145.31
	1	1990	1.00
1.0006	1	-	

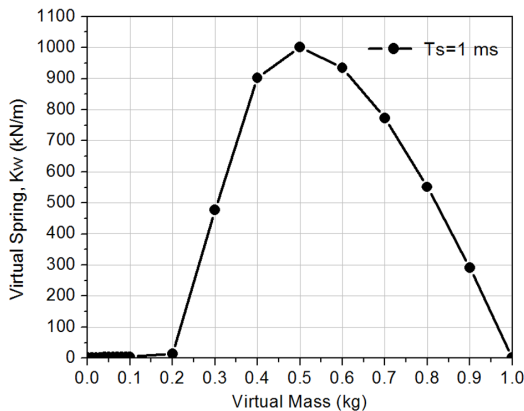


Fig. 3 Max. available stiffness of the virtual spring (Kw) according to the virtual mass, where Ts=1 ms, Md=0.5 kg, Bd=1.0 Ns/m, data hold type=ZOH.

1에서 Ratio는 가상질량이 '0'일 때의 안정적인 가상스프링의 최대값을 기준으로 가상질량이 커지면서 가

상스프링의 안정성 영역이 얼마나 더 커지고 있는가를 비율로 표현한 것이다. 즉 가상질량이 0.1 kg인 경우는 가상질량이 '0'인 경우보다 안정성 영역이 약 2배가 더 커졌음을 보여준다. 가상스프링의 안정성 영역은 가상질량이 0.2 kg보다 커지면서 급격하게 커지기 시작한다. 가상질량이 0.5 kg일 때에는 가상질량이 '0'인 경우보다 안정성 영역이 약 500배 더 커졌음을 알 수 있다.

Table 1과 Fig. 3을 살펴보면 가상질량 (Mw)가 0.5 kg 근처일 때 가상스프링의 안정성 영역이 최대가 됨을 알 수 있다.

햅틱시스템의 안정성은 식 (1)과 (2)에서 보여주는 바와 같이, 샘플링주기 (Ts)의 영향을 받으며 샘플링 주기가 커질수록 가상스프링 (Kw)의 안정성 영역은 반비례하여 작아진다. 따라서 샘플링주기 (Ts)가 변할 때 가상질량 (Mw)에 의한 가상스프링의 안정성 영역이 어떻게 변하는지를 살펴보았다.

샘플링주기 (Ts)를 5배 증가시켜서 5 ms로 증가시킨 경우에 대한 시뮬레이션 결과가 Table 2와 Fig. 4이고, 샘플링주기 (Ts)를 10배 증가시켜서 10 ms로 증가시킨 경우에 대한 시뮬레이션 결과가 Table 3과 Fig. 5이다. Table 2와 Table 3에서 Ratio는 Table 1의 Ratio와 동일한 의미로서 가상질량이 '0'일 때의 가상스프링 최대값에 대하여 가상질량이 증가할 때의 가상스프링 최대값에 대한 비율을 의미한다. 즉, 각각의 샘플링주기에서 가상질량이 0.2 kg일 때는 가상질량이 '0'인 경우의 안정성 영역보다 각각 6.26배, 5.74배 더 큰 영역을 갖게 됨을 의미한다.

각각의 시뮬레이션 결과에서 가상질량이 '0'인 경우를 보면, 가상스프링 (Kw)의 크기는 샘플링주기에 반비례한다. 따라서 샘플링주기가 1 ms일 때에 비해서 가상스프링은 각각 1/5배, 1/10배로 감소한다. 이는 기존 연구의 결과와 일치한다.

그리고 샘플링주기가 1 ms인 시뮬레이션 결과와 동일하게 가상스프링의 안정성 영역은 가상질량 0.5 kg 근처에서 최대값을 가지며, 샘플링주기 1 ms인 결과에 비해서 각각 약 1/25배, 약 1/100배 정도로 감소되었음을 알 수 있다.

Table 1 - 3과 Fig. 3 - 5를 살펴보면 가상질량이 증가함에 따라 가상스프링의 안정성 영역이 커졌다가 다시 감소하는 것을 볼 수 있으며, 약 1.0 kg 근처에서 가상스프링의 안정성 영역이 '0'에 가까워짐을 알 수 있

Table 2 Max. stiffness of a virtual spring (Kw) according to a virtual mass when sampling time(Ts)=5 ms, Md=0.5 kg, Bd=1.0 Ns/m and ZOH.

Sampling time (sec)	Mw (kg)	Kw (N/m)	Ratio
0.005	0	400	1.00
	0.01	425	1.06
	0.02	452	1.13
	0.03	481	1.20
	0.04	513	1.28
	0.05	548	1.37
	0.06	587	1.47
	0.07	630	1.58
	0.08	678	1.70
	0.09	731	1.83
	0.1	792	1.98
	0.2	2505	6.26
	0.3	20590	51.48
	0.4	36472	91.18
	0.5	40267	100.67
	0.6	37572	93.93
	0.7	31117	77.79
	0.8	22300	55.75
	0.9	11904	29.76
	1	400	1.00
1.003	1	-	

Table 3 Max. stiffness of a virtual spring (Kw) according to a virtual mass when sampling time(Ts)=10 ms, Md=0.5 kg, Bd=1.0 Ns/m and ZOH.

Sampling time (sec)	Mw (kg)	Kw (N/m)	Ratio
0.01	0	200	1.00
	0.01	212	1.06
	0.02	226	1.13
	0.03	240	1.20
	0.04	256	1.28
	0.05	273	1.37
	0.06	292	1.46
	0.07	313	1.57
	0.08	337	1.69
	0.09	363	1.82
	0.1	392	1.96
	0.2	1147	5.74
	0.3	5535	27.68
	0.4	9232	46.16
	0.5	10134	50.67
	0.6	9453	47.27
	0.7	7845	39.23
	0.8	5651	28.26
	0.9	3064	15.32
	1	193	0.97
1.006	1	-	

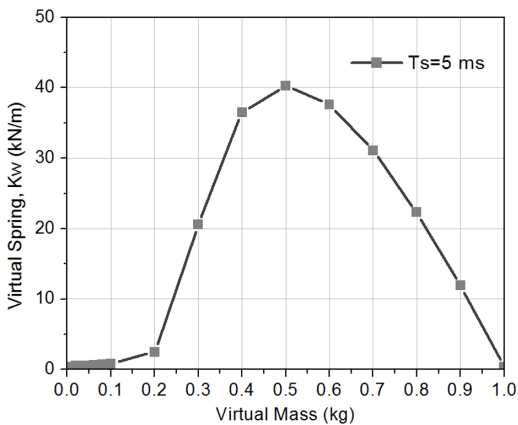


Fig. 4 Max. available stiffness of the virtual spring (Kw) according to the virtual mass, where Ts=5 ms, Md=0.5 kg, Bd=1.0 Ns/m, data hold type=ZOH.

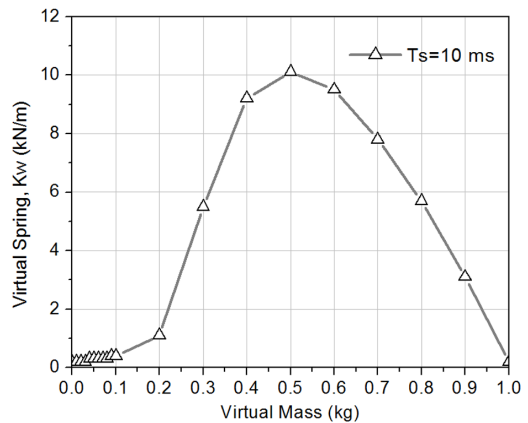


Fig. 5 Max. available stiffness of the virtual spring (Kw) according to the virtual mass, where Ts=10 ms, Md=0.5 kg, Bd=1.0 Ns/m, data hold type=ZOH.

다. 그리고 Table 1 - 3과 Fig. 3 - 5를 살펴보면 가상질량 (Mw) 변화에 따른 가상스프링 안정성 영역 변화는

가상질량이 0.1 kg보다 작을 때와 0.1 kg보다 클 때에 그 경향이 달라짐을 볼 수 있다. 이러한 가상스프링의

안정성 영역에 대한 가상질량의 영역별 경향분석 및 샘플링주기 변화에 따른 영향을 분석하기 위해서 샘플링주기 변화에 따른 영향을 분석하기 위해서 샘플링주기 변화에 따른 영향을 분석하기 위해서 샘플링주기 변화에 따른 영향을 분석하기 위해서

Table 4 Relative ratio of Max. virtual spring (Kw) to the max. stable boundary of the virtual spring when the sampling time is 10 ms, according to the sampling time and the virtual mass.

Mw (kg)	Kw (N/m) @Ts=1ms	Kw (N/m) @Ts=5ms	Kw (N/m) @Ts=10ms (reference)
0.0	10.00	2.00	1.00
0.01	10.02	2.00	1.00
0.02	10.00	2.00	1.00
0.03	10.03	2.00	1.00
0.04	10.04	2.00	1.00
0.05	10.07	2.01	1.00
0.06	10.09	2.01	1.00
0.07	10.11	2.01	1.00
0.08	10.11	2.01	1.00
0.09	10.14	2.01	1.00
0.1	10.18	2.02	1.00
0.2	11.91	2.18	1.00
0.3	86.24	3.72	1.00
0.4	97.75	3.95	1.00
0.5	98.81	3.97	1.00
0.6	98.86	3.97	1.00
0.7	98.50	3.97	1.00
0.8	97.59	3.95	1.00
0.9	94.85	3.89	1.00
1.0	10.31	2.07	1.00

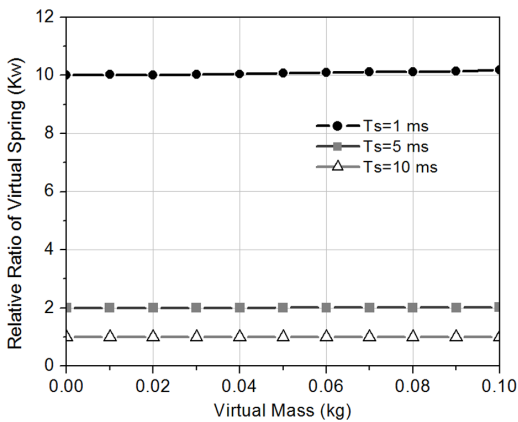


Fig. 6 Relative ratio of virtual spring (Kw) according to the sampling time when the virtual mass (Mw) changes from 0 to 0.1 kg.

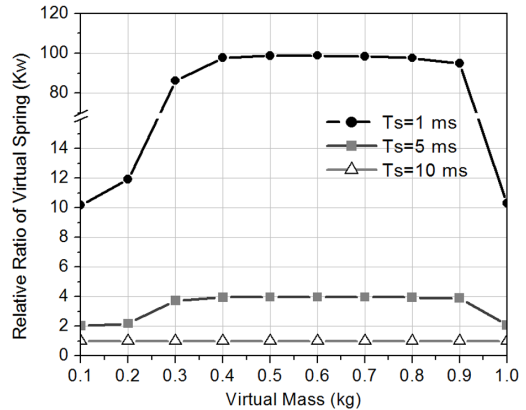


Fig. 7 Relative ratio of virtual spring (Kw) according to the sampling time when the virtual mass (Mw) changes from 0.1 to 1.0 kg.

플링주기 10 ms인 경우의 가상스프링 안정성 영역을 기준으로, 동일한 가상질량에 대한 샘플링주기별 가상스프링 안정성 영역의 상대적 비율을 분석한 것이 Table 4이고, 이를 가상질량의 영역별, 즉 0~0.1 kg 영역과 0.1 kg~1.0 kg 영역으로 나눠서 그래프로 표현한 것이 각각 Fig. 6과 Fig. 7이다.

가상질량 0~0.1 kg의 영역에서는 샘플링주기가 10 ms에서 5 ms, 1 ms로 각각 1/2배, 1/10배로 감소하면 가상스프링의 안정성 영역은 각각 약 2배, 약 10배로 증가하는 경향을 보인다. 이 결과는 식 (1) - (2)의 결과와 동일하다.

그러나 가상질량 0.1~1.0 kg의 영역에서는 샘플링주기가 10 ms에서 5 ms, 1 ms로 각각 1/2배, 1/10배로 감소하면 가상스프링의 안정성 영역은 각각 약 4배, 약 100배로 증가하는 경향을 보인다. 즉 샘플링주기의 제곱에 반비례해서 가상스프링의 안정성 영역이 커짐을 알 수 있다.

4. 결론

기존의 가상강체 모델인 가상스프링 모델 (Kw)에 가상질량 (Mw)을 추가하여 가상강체를 모델화하였으며, 가상질량 추가에 따른 가상스프링의 안정성 영역 변화를 분석하였다.

가상질량이 작은 경우에는 샘플링주기에 반비례하여 가상스프링의 안정성 영역이 변한다. 가상질량이 점점 증가하면서 가상스프링의 안정성 영역이 급격히

증가하게 되고 최고치에 도달한 후에는 다시 점차 감소하게 된다. 본 논문의 시뮬레이션 환경에서 샘플링 주기가 1 ms일 때, 가상스프링 안정성영역이 가상질량이 없을 때보다 최대 500배 더 커질 수 있다. 이 결과는 가상강체의 강성을 안정적으로 더 크게 구현할 수 있음을 의미하며, 즉 보다 현실감 높은 강체를 안정적으로 구현할 수 있음을 의미한다. 그리고 본 논문의 시뮬레이션 환경에 대한 결과에서 가상질량 변화에 따른 가상스프링 안정성 영역의 최고치가 샘플링 주기의 제곱에 반비례함을 보여주었다. 그렇지만 보다 정확한 관계 분석을 위해서는 햅틱장치의 질량 (Md)과 댐퍼 (Bd) 등 다양한 시스템 환경 요인 등을 고려한 보다 많은 시뮬레이션 결과 분석이 필요하다.

Acknowledgement

2016년 한국교통대학교 지원을 받아 수행하였음.

This was supported by Korea National University of Transportation in 2016.

References

- 1) J. E. Colgate and G. Schenkel, "Passivity of a class of sampled-data systems: Application to Haptic Interfaces," *Journal of Robotic Systems*, vol.14, no. 1, pp.37-47, 1997.
- 2) J. J. Gil, E. Sanchez, T. Hulin, C. Preusche, and G. Hirzinger, "Stability boundary for haptic rendering: influence of damping and delay," *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, Roma, Italy, 10-14 April, 2007, pp.124-129.
- 3) K. Lee, "Effect on data-hold methods on stability of haptic system," *Journal of Institute of Convergence Technology*, vol. 2, no. 2, pp. 35-39, 2012.
- 4) K. Lee, "Stability of haptic system with consideration for sample-and-hold methods and properties of haptic device," *Journal of the Korea Academic Industrial cooperation Society*, vol. 14, no. 11, pp. 5338-5343, 2013.
- 5) K. Lee, "Stability analysis of a haptic system with a first-order-hold method," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems*, vol. 20, no. 4, pp. 389-394, 2014.