ISSN 1975-8359(Print) / ISSN 2287-4364(Online)
The Transactions of the Korean Institute of Electrical Engineers Vol. 65, No. 3, pp. 457~462, 2016
http://dx.doi.org/10.5370/KIEE.2016.65.3.457

새로운 적분구간 비례 적분 부등식을 이용한 시간지연 선형시스템의 안정성

Stability of Time-delayed Linear Systems with New Integral Inequality Proportional to Integration Interval

김 진 훈*
(Jin-Hoon Kim)

Abstract - In this paper, we consider the stability of time-delayed linear systems. To derive an LMI form of result, the integral inequality is essential, and Jensen's integral inequality was the best in the last two decades until Seuret's integral inequality is appeared recently. However, these two are proportional to the inverse of integration interval, so another integral inequality is needed to make it in the form of LMI. In this paper, we derive an integral inequality which is proportional to the integration interval which can be easily converted into LMI form without any other inequality. Also, it is shown that Seuret's integral inequality is a special case of our result. Next, based on this new integral inequality, we derive a stability condition in the form of LMI. Finally, we show, by well-known two examples, that our result is less conservative than the recent results.

Key Words : Stability, Time-delay, Proportional to integration interval, Integral inequality, LMI

1. 서 론

시간지연 선형시스템은 시스템이 갖고 있는 시간지연 항이 시스템 자체의 불안정성이나 성능하락의 원인으로 작용하기 때문에 오랫동안 많은 연구자들의 관심을 끌어온 문제들 중의 하나로써, 최근 수세기에 걸쳐 많은 결과와 개선이 이루어지고 있다[11].

시간지연 시스템에 대한 안정성에 관한 결과는 초기의 Razumikhin 안정성 조건을 이용한 지연독립(delay-independent)과, 후에 이를 포함하는 Lyapunov-Krasovskii (L-K) 함수를 이용한 지연종속(delay-dependent)으로 분류된다. 현재에는 대부분의 경우 L-K 함수를 이용하여 더 나은 결과를 얻고자 노력하고 있다[11].

다음의 상태방정식으로 기술된 시변 시간지연을 갖는 선형시스템을 생각하자.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x[t-d(t)] \\ x(t) = \phi(t), t \in [-h, 0] \end{cases} \tag{1}$$

여기서 $x \in R^n$은 상태벡터, 행렬 $A, A_d \in R^{n \times n}$은 상수 행렬, 그리고 초기조건 $\phi(t)$는 연속 미분 가능 벡터이다. 다음으로 시간지연 $d(t)$는 다음을 만족한다.

$$0 \le d(t) \le h, \quad \text{and} \quad \dot{d}(t) \le \mu; \ \forall t \ge 0 \tag{2}$$

위의 시간지연에 대한 조건 (2)를 갖는 시스템 (1)의 안정성을 보장하는 결과를 얻기 위한 접근 방법으로 대표적인 것이 L-K함수를 이용하는 것이다. 이 L-K함수는 여러 항으로 이루어져 있지만, 시간지연의 크기에 따른 결과를 얻기 위하여 다음의 적분 형태의 이차함수(quadratic function) 형태는 필수적이다[11].

$$\begin{aligned} v_a(x_t) &= \int_{-h}^{0} \int_{t+s}^{t} \dot{x}^T(\theta) R \dot{x}(\theta) d\theta ds \\ &= \int_{t-h}^{t} (h - t + s) \dot{x}^T(\theta) R \dot{x}(\theta) d\theta \end{aligned} \tag{3}$$

안정성을 보장하는 결과를 얻기 위하여는 L-K함수의 시스템 (1) 궤적에 따른 시간 미분을 구하여 이를 LMI형태로 표시하여야한다. 이 과정에서 L-K함수의 다른 항들은 문제없이 LMI로 표현이 가능한데 반하여, 다음에 주어지는 (3)의 시간에 따른 미분은

$$\dot{v}_a(x_t) = h\dot{x}^T(t) R \dot{x}(t) - \int_{t-h}^{t} \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds \tag{4}$$

* Corresponding Author : Dept. of Electrical and Computer Engineering, Chungbuk National University, Korea
E-mail : jinhkim@cbnu.ac.kr
Received : October 30, 2015; Accepted : February 5, 2016

첫 번째 항은 별 문제 없이 LMI로 쉽게 변환이 되는데 반해, 두 번째 적분항은 등가적으로 LMI로 변환이 불가능하여 좀 더 나은 결과를 얻기 위하여 많은 연구가 진행되었고, 지난 20여 년 동안 가장 널리 사용된 것이 다음의 Jensen 부등식[11]이다.

$$-\int_a^b \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds \leq -\frac{1}{b-a}\Omega_0^T(a,b)R\Omega_0(a,b) \tag{5}$$

여기서 $\Omega_0(a,b)=x(b)-x(a)$이다. 그런데 가장 최근에 Seuret[7]에 의해 (5)에 주어진 Jensen 부등식을 극복한 다음의 새로운 결과가 제시되었고

$$\begin{aligned}-\int_a^b \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds &\leq -\frac{1}{b-a}\Omega_0^T(a,b)R\Omega_0(a,b)\\ &-\frac{12}{b-a}\Omega_1^T(a,b)R\Omega_1(a,b),\end{aligned} \tag{6}$$

여기서 $\Omega_1(a,b)=\frac{1}{2}[x(b)+x(a)]-\frac{1}{b-a}\int_a^b x(s)ds$이고, 이를 이용하여 기존의 결과보다 우수한 결과를 제시하였다[7, 8].

위의 (5), (6)에서 보듯이 최근까지의 적분부등식은 적분구간크기 $(b-a)$의 역에 비례하는 형태가 되어 (2)에서 $\mu \geq 1$인 경우에는, 다음에 주어지는 Park[6]의 부등식이 반드시 필요하게 된다.

$$0<\frac{1}{h}\begin{bmatrix} X_1 & S^T \\ S & X_2\end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix}\frac{1}{h-a}X_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a}X_2\end{bmatrix}, \forall a \in (0,h) \tag{7}$$

본 논문에서는 최근의 적분 부등식인 (5), (6)보다 해석적으로 개선되면서, 기존의 결과인 적분구간크기 $(b-a)$의 역에 비례한 형태가 아닌 $(b-a)$에 정비례한 형태가 되어, 기존에 필요한 또 다른 (7)과 같은 부등식이 필요하지 않게 되는 장점이 있는 적분부등식을 유도하고, 이를 바탕으로 안정성을 보장하는 결과를 LMI형태로 제시하고, 끝으로 수치예제를 통하여 기존의 결과보다 우수함을 보인다.

2. 적분구간 비례 적분부등식과 예비결과

다음의 보조정리 1은 기존의 적분부등식인 수식 (5)의 Jensen 부등식과 수식 (6)의 Seuret 부등식보다 개선된 새로운 적분 부등식으로, 주요결과의 증명에 사용될 것이다.

보조정리 1: 스칼라 함수 $h_i(s), i=0,1,2$를 다음과 같이 정의하고,

$$\begin{aligned} h_0(s)&=1,\\ h_1(s)&=\frac{1}{b-a}\left(s-\frac{a+b}{2}\right),\\ h_2(s)&=\frac{1}{(b-a)^2}\left(s-\frac{a+b}{2}\right)^2-\frac{1}{12},\end{aligned}$$

다음으로, 벡터 $\chi_i \in R^n, i=0,1,2$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$\chi_i(a,b)=\int_a^b h_i(s)\dot{x}(s)ds. \tag{8}$$

그러면, 스칼라 $a<b$. 벡터 $\xi_t \in R^{n\ell}$, 행렬 $R=R^T \in R^{n\times n}>0$와 $N_0, N_1, N_2 \in R^{n\times n\ell}$ 에 대하여, 다음 부등식이 성립한다.

$$\begin{aligned}&-\int_a^b \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds\\ &\leq 2\sum_{i=0}^{2}\xi_t^T N_i^T \chi_i(a,b)+(b-a)\xi_t^T\left(\sum_{i=0}^{2}\sigma_i N_i^T R^{-1}N_i\right)\xi_t\end{aligned} \tag{9}$$

여기서 $\sigma_0=1,\ \sigma_1=\frac{1}{12,}\ \sigma_2=\frac{1}{180}$이다.

증명 : 먼저, 적분 계산을 통하여 $0 \leq i,j \leq 2$ 에 대하여

$$\int_a^b h_i(s)h_j(s)ds=\begin{cases}\sigma_i \cdot (b-a), \mathrm{if}\, i=j\\ 0,\ \mathrm{if}\, i\neq j\end{cases} \tag{10}$$

를 얻고, 다음으로부터

$$\begin{aligned}0 &\leq \int_a^b\left(\sum_{i=0}^{2}h_i(s)N_i\xi_t - R\dot{x}(s)\right)^T R^{-1}\cdot\\ &\qquad\left(\sum_{i=0}^{2}h_i(s)N_i\xi_t - R\dot{x}(s)\right)ds\\ &=\int_a^b\left(\sum_{i=0}^{2}h_i(s)\xi_t N_i^T\right)R^{-1}\left(\sum_{i=0}^{2}h_i(s)N_i\xi_t\right)ds\\ &\quad+2\int_a^b\left(\sum_{i=0}^{2}h_i(s)\xi_t N_i^T\right)\dot{x}(s)ds+\int_a^b \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds,\\ &=\sum_{i=0}^{2}(b-a)\sigma_i\xi_t^T N_i^T R^{-1}N_i\xi_t\\ &\quad+2\sum_{i=0}^{2}\xi_t^T N_i^T\int_a^b h_i(s)\dot{x}(s)ds+\int_a^b \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds\\ &=\sum_{i=0}^{2}(b-a)\sigma_i\xi_t^T N_i^T R^{-1}N_i\xi_t+2\sum_{i=0}^{2}\xi_t^T N_i^T\chi_i(a,b)\\ &\quad+\int_a^b \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds\end{aligned}$$

(9)를 얻는다. 이것으로써 증명을 마친다. □

Remark 1 : 기존의 적분 부등식 (5)와 (6)은 적분 구간의 역수 $\frac{1}{b-a}$에 비례한 성질을 갖고 있어, 이들을 LMI로 직접 표현할 수 없기에, 이를 해결하기 위해서는 또 다른 부등식이 필요하게 된다. 그러나, 보조정리 1의 수식 (9)에 나타난 바와 같이 새로이 제시된 적분 부등식은 적분구간의 크기 $(b-a)$에 비례하여 이를 쉽게 LMI로 표시할 수 있는 장점이 있고, 덜 보수적인 결과를 얻게 된다.

Remark 2 : 보조정리 1에서

$$\begin{cases}\chi_0(a,b)=x(b)-x(a)=\Omega_0(a,b),\\ \chi_1(a,b)=\frac{1}{2}[x(b)+x(a)]-\frac{1}{b-a}\int_a^b x(s)ds=\Omega_1(a,b),\\ \chi_2(a,b)=\frac{1}{6}[x(b)-x(a)]-\frac{2}{(b-a)^2}\int_a^b(s-\frac{a+b}{2})x(s)ds\end{cases} \tag{11}$$

이고, 특별히 다음과 같이 N_0, N_1, N_2를 선택하면

$$N_0=-\frac{1}{b-a}R,\ N_1=-\frac{12}{b-a}R,\ N_2=-\frac{180}{b-a}R$$

(9)는 다음이 된다.

$$-\int_a^b \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds \le -\frac{1}{b-a}\chi_0^T(a,b)R\chi_0(a,b) -\frac{12}{b-a}\chi_1^T(a,b)R\chi_1(a,b)-\frac{180}{b-a}\chi_2^T(a,b)R\chi_2(a,b) \tag{12}$$

여기서, 부등식 (12)의 첫 번째 항만이 있는 것이 수식 (5)에 주어진Jensen 부등식이고, 두 번째 항까지 있는 것이 수식 (6)에 주어진 최근의 Seuret 부등식이다. (12) 부등식의 세 번째 항은 항상 음이므로 기존의 결과들보다 우수함을 알 수 있다.

다음의 보조정리 2는 2차 다항식이 특정한 구간에서 항상 음이 됨을 보장하는 조건으로 다음의 주요결과의 증명에 사용될 것이다.

보조정리 2 : 2차 다항식 $f(x)$에서 다음이 성립하면,

$$\text{(i) } f(0)<0,\quad \text{(ii) } f(h)<0,\quad \text{(iii) } h\dot{f}(0)+f(0)<0,$$

그러면 $f(x)<0, \forall x\in[0,h]$이다.

증명 : 증명은 귀류법(proof by contradiction)으로 한다. 이를 위해 조건 (i), (ii), (iii) 에도 불구하고 $f(a)\ge 0, a\in(0,h)$가 성립하는 스칼라 a가 존재한다고 가정하자. 그러면 2차함수는 연속성에 의하여 반드시 concave함수 이면서 또한 반드시 $\dot{f}(0)>0$ 이어야 한다. concave 함수인 $f(x)$는 concave 함수 특성으로 인하여 항상 다음이 성립하고,

$$f(x)\le \dot{f}(0)(x-0)+f(0),\ \forall x$$

또한 $0\le f(a), \dot{f}(0)>0$ 임을 상기하면서, $x=a$를 대입하면

$$0\le f(a)\le \dot{f}(0)(a-0)+f(0)\le h\dot{f}(0)+f(0)$$

이 되어 (iii)에 위배된다. 이로써 증명을 마친다. □

이 논문에서 사용되는 기호는 표준적인 것이다. 먼저, $R^n, R^{n\times m}$은 n차원의 실수 벡터, $n\times m$차원의 실수 행렬을 의미하고, $(\cdot)^T$는 벡터 또는 행렬의 전치(transpose)를 나타낸다. 다음으로 대칭 행렬 X에 대하여, $X<0$(또는 $X\le 0$)은 음 확정(또는 준음확정) 행렬을 나타낸다. 끝으로 $0_{n\times m}$, I_n은 $n\times m$ 차원의 영(zero)행렬, $n\times n$ 항등행렬을 나타낸다.

3. 주요 결과

시간지연에 대한 조건(2)를 갖는 시변 시간지연을 갖는 시간지연 선형시스템(1)의 안정성을 보장하는 결과를 LMI로 나타낸 것이 다음의 정리 1이다.

정리 1. 시간지연에 대한 조건 (2)을 갖는 시간지연 시스템 (1)을 고려하자. 만약 다음 LMI를 동시에 만족하는 대칭 양확정 행렬 $P,Q\in R^{3n\times 3n}$ 과 $R\in R^{n\times n}$, 그리고 일반적 행렬 $L\in R^{8n\times n}$, $N_0,N_1,N_2,\widehat{N}_0,\widehat{N}_1,\widehat{N}_2\in R^{n\times 8n}$이 존재하면

$$\text{(i)}\quad \begin{bmatrix}\Gamma(0) & X_{12}^T\\ X_{12} & -\Sigma\end{bmatrix}<0 \tag{13}$$

$$\text{(ii)}\quad \begin{bmatrix}\Gamma(h) & \widehat{X_{12}^T}\\ \widehat{X_{12}} & -\Sigma\end{bmatrix}<0 \tag{14}$$

$$\text{(iii)}\quad \begin{bmatrix}h\dot{\Gamma}(0)+\Gamma(0) & X_{12}^T\\ X_{12} & -\Sigma\end{bmatrix}<0 \tag{15}$$

조건 (2)를 갖는 시간지연 시스템 (1)은 점근적으로 안정하다. 여기서

$$\begin{aligned}\Gamma(\theta)&=2[e_1,e_8,\Pi(\theta)]^TP[A_c,e_1-e_3,\ he_1-e_8]\\ &\quad+[e_1,e_1,e_0]^T(Q_1+Q_2)[e_1,e_1,e_0]\\ &\quad-(1-\mu)[e_1,e_2,\theta e_4]^TQ_1[e_1,e_2,\theta e_4]-[e_1,e_3,e_8]^TQ_2[e_1,e_3,e_8]\\ &\quad+2[A_c,e_0,e_1]^TQ_1[\theta e_1,\theta e_4,\theta^2(e_6+\frac{1}{2}e_4)]\\ &\quad+2[A_c,e_0,e_1]^TQ_2[he_1,e_8,\Pi(\theta)]+hA_c^TRA_c\\ &\quad+2\sum_{i=0}^{2}\left(E_i^TN_i+\widehat{E_i^T}\widehat{N_i}\right)+2L[e_8-(h-\theta)e_5-\theta e_4],\\ \Pi(\theta)&=(h-\theta)^2e_7+\theta^2e_6+\frac{1}{2}(h-\theta)^2e_5+(h-\frac{1}{2}\theta)\theta e_4,\\ X_{12}^T&=\left[h\sigma_0N_0^T\ \ h\sigma_1N_1^T\ \ h\sigma_2N_2^T\right],\\ \widehat{X_{12}}&=\left[h\sigma_0\widehat{N_0^T}\ \ h\sigma_1\widehat{N_1^T}\ \ h\sigma_2\widehat{N_2^T}\right],\\ \Sigma&=diag\{h\sigma_0R,h\sigma_1R,h\sigma_2R\},\end{aligned} \tag{16}$$

그리고, 상수 또는 상수행렬들은 다음으로 정의된 값이다.

$$\begin{cases} \sigma_0 = 1,\ \sigma_1 = \dfrac{1}{12},\ \sigma_2 = \dfrac{1}{180}, \\ e_k = [0_{n\times(k-1)n}\quad I_n\quad 0_{n\times(8-i)n}],\ k = 1,1,2,\cdots,8, \\ e_0 = 0\cdot e_1;\ A_c = Ae_1 + A_d e_2, \\ E_0 = e_2 - e_3,\ \widehat{E_0} = e_1 - e_2, \\ E_1 = \dfrac{1}{2}(e_2+e_3) - e_5,\ \widehat{E_1} = \dfrac{1}{2}(e_1+e_2) - e_4, \\ E_2 = \dfrac{1}{6}(e_2-e_3) - 2e_7,\ \widehat{E_2} = \dfrac{1}{6}(e_1-e_2) - 2e_6 \end{cases} \tag{17}$$

증명 : 편의상 $t_d = t-d(t), t_h = t-h$ 라하고, 다음과 같이 벡터 v_1,v_2,v_3,v_4,v_5를 각각 정의하고

$$\begin{cases} v_1(t) = \dfrac{1}{t-t_d}\displaystyle\int_{t_d}^{t} x(s)ds, \\ v_2(t) = \dfrac{1}{t_h-t_d}\displaystyle\int_{t_h}^{t_d} x(s)ds, \\ v_3(t) = \dfrac{1}{(t-t_d)^2}\displaystyle\int_{t_d}^{t}\left(-\dfrac{t+t_d}{2}+s\right)x(s)ds \\ v_4(t) = \dfrac{1}{(t_h-t_d)^2}\displaystyle\int_{t_h}^{t_d}\left(-\dfrac{t_d+t_h}{2}+s\right)x(s)ds \\ v_5(t) = \displaystyle\int_{t_h}^{t} x(s)ds \end{cases}$$

또한, (17)에 정의된 $e_k, k=1,2,\cdots,7,$ 벡터를 이용하여 다음과 같이 벡터 $\xi_t \in R^{8n}$ 를 정의하자

$$\begin{aligned} \xi_t^T &= \left[x^T(t), x^T(t_d), x^T(t_h), v_1^T(t), v_2^T(t), v_3^T(t), v_4(t), v_5^T(t)\right] \\ &= \xi_t^T\left[e_1^T, e_2^T, e_3^T, e_4^T, e_5^T, e_6^T, e_7^T, e_8^T\right] \end{aligned} \tag{18}$$

그러면, 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} \int_{t_h}^{t}(h-t+s)x(s)ds &= (h-d(t))^2 v_4(t) + \frac{1}{2}(h-d(t))^2 v_2(t) \\ &+ d^2(t)v_3(t) + [h - \frac{1}{2}d(t)]d(t)v_1 := \Pi(d(t))\xi_t \end{aligned}$$

다음으로, 조건 (2)를 갖는 시간지연 시스템 (1)의 안정도를 보장하는 결과를 얻기 위해, 다음과 같은 L-K 후보함수를 생각하자.

$$\begin{aligned} V(x_t) &= \psi^T(t)P\psi(t) + \int_{t_d}^{t}\phi^T(t,s)Q_1\phi(t,s)ds \\ &+ \int_{t_h}^{t}\phi^T(t,s)Q_2\phi(t,s)ds + \int_{t_h}^{t}(-t_h+s)\dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds \end{aligned} \tag{19}$$

여기서

$$\psi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \int_{t_h}^{t} x(s)ds \\ \int_{t_h}^{t}(h-t+s)x(s)ds \end{bmatrix},\quad \phi(t,s) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(s) \\ \int_{s}^{t} x(\theta)d\theta \end{bmatrix}$$

다음으로 위의 (19)에 정의된 L-K 후보함수 $V(x_t)$에 대하여 시스템 (1)의 궤적에 따른 시간 미분을 구하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &= 2\psi^T(t)P\dot{\psi}(t) + \phi^T(t,t)(Q_1+Q_2)\phi(t,t) \\ &\quad -(1-\dot{d}(t))\phi^T(t,t_d)Q_1\phi(t,t_d) - \phi^T(t,t_h)Q_2\phi(t,t_h) \\ &\quad +2\int_{t_d}^{t}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\phi^T(t,s)\right\}Q_1\phi(t,s)ds \\ &\quad +2\int_{t_h}^{t}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\phi^T(t,s)\right\}Q_2\phi(t,s)ds + h\dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) + v_a(x_t) \\ &\le 2\xi_t^T[e_1, e_8, \Pi(d(t))]^T P[A_c, e_1-e_3,\ he_1-e_8]\xi_t \\ &\quad +\xi_t^T[e_1,e_1,e_0]^T(Q_1+Q_2)[e_1,e_1,e_0]\xi_t \\ &\quad -(1-\mu)\xi_t^T[e_1,e_2,d(t)e_4]^T Q_1[e_1,e_2,d(t)e_4]\xi_t \\ &\quad -\xi_t^T[e_1,e_3,e_8]^T Q_2[e_1,e_3,e_8]\xi_t \\ &\quad +2\xi_t^T[A_c,e_0,e_1]^T Q_1[d(t)e_1, d(t)e_4, d^2(t)(e_6+\frac{1}{2}e_4)]\xi_t \\ &\quad +2\xi_t^T[A_c,e_0,e_1]^T Q_2[he_1, e_8, \Pi(d(t))]\xi_t \\ &\quad +h\xi_t^T A_c^T R A_c\xi_t + v_a(x_t) + 2L[e_8 - (h-d(t))e_5 - d(t)e_4] \end{aligned} \tag{20}$$

위의 (20)을 얻는데, 다음 관계식이 이용되었고

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{t_h}^{t} x(s)ds = e_8\xi_t = [h-d(t)]e_5\xi_t + d(t)e_4\xi_t, \\ \displaystyle\int_{t_d}^{t}\int_{s}^{t} x(s)ds = \int_{t_d}^{t}(d(t)-t+s)x(s)ds = d^2(t)(e_6+\frac{1}{2}e_4)\xi_t, \\ \displaystyle\int_{t_h}^{t}\int_{s}^{t} x(s)ds = \int_{t_h}^{t}(h-t+s)x(s)ds = \Pi(d(t))\xi_t. \end{cases}$$

또한 $v_a(x_t) = -\int_{t_h}^{t}\dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds$ 이다. 다음으로, 적분성질과, 보조정리 1를 사용하면

$$\begin{aligned} v_a(x_t) &= -\int_{t_h}^{t_d}\dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds - \int_{t_d}^{t}\dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds \\ &\le 2\sum_{i=0}^{2}\xi_t^T\left(N_i^T E_i\right)\xi_t + [h-d(t)]\xi_t^T\left(\sum_{i=0}^{2}\sigma_i N_i^T R^{-1} N_i\right)\xi_t \\ &+2\sum_{i=0}^{2}\xi_t^T\left(\widehat{N_i}^T\widehat{E_i}\right)\xi_t + d(t)\xi_t^T\left(\sum_{i=0}^{2}\sigma_i\widehat{N_i}^T R^{-1}\widehat{N_i}\right)\xi_t \end{aligned} \tag{21}$$

여기서 $\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2$ 은 (17)에 정의되어 있는 상수이고, 그리고 (11)

과 (17)에 정의된 $E_0, E_1, E_2, \widehat{E_0}, \widehat{E_1}, \widehat{E_2}$를 이용하여 얻어진 다음 것들이 이용되었다.

$$\begin{cases} \chi_0(t_h, t_d) = E_0\xi_t, \chi_1(t_h, t_d) = E_1\xi_t, \chi_2(t_h, t_d) = E_2\xi_t, \\ \chi_0(t_d, t) = \widehat{E_0}\xi_t, \chi_1(t_d, t) = \widehat{E_1}\xi_t, \chi_2(t_d, t) = \widehat{E_2}\xi_t. \end{cases}$$

따라서, (16)에 정의된 $F(\theta)$를 이용하여 수식 (20)과 (21)를 결합하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) \le \xi_t^T \Bigg(& \Gamma(d(t)) + (h - d(t)) \sum_{i=0}^{2} \sigma_i N_i^T R^{-1} N_i \\ & + d(t) \sum_{i=0}^{2} \sigma_i \widehat{N_i}^T R^{-1} \widehat{N_i} \Bigg) \xi_t. \end{aligned} \tag{22}$$

다음으로 Schur-complement 정리[10]에 의하면 다음을 얻는다.

$$\begin{cases} (i)\ \ (13) \Leftrightarrow \Gamma(0) + h \sum_{i=0}^{2} \sigma_i N_i^T R^{-1} N_i < 0, \\ (ii)\ \ (14) \Leftrightarrow \Gamma(h) + h \sum_{i=0}^{2} \sigma_i \widehat{N_i}^T R^{-1} \widehat{N_i} < 0, \\ (iii)\ \ (15) \Leftrightarrow h\dot{\Gamma}(0) + \Gamma(0) + h \sum_{i=0}^{2} \sigma_i N_i^T R^{-1} N_i < 0 \end{cases}$$

따라서, $\xi_t^T \left(\Gamma(\theta) + (h-\theta) \sum_{i=0}^{2} \sigma_i N_i^T R^{-1} N_i + \theta \sum_{i=0}^{2} \sigma_i \widehat{N_i}^T R^{-1} \widehat{N_i} \right) \xi_t$ 가 θ에 관한 2차 함수(quadratic function)이므로, 보조정리 2에 의하면 다음을 얻고,

$$\begin{aligned} & \xi_t^T \Bigg(\Gamma(\theta) + (h-\theta) \sum_{i=0}^{2} \sigma_i N_i^T R^{-1} N_i \\ & \qquad + \theta \sum_{i=0}^{2} \sigma_i \widehat{N_i}^T R^{-1} \widehat{N_i} \Bigg) \xi_t < 0, \forall \theta \in [0, h] \\ \Leftrightarrow & \xi_t^T \Bigg(\Gamma(d(t)) + (h - d(t)) \sum_{i=0}^{2} \sigma_i N_i^T R^{-1} N_i \\ & \qquad + d(t) \sum_{i=0}^{2} \sigma_i \widehat{N_i}^T R^{-1} \widehat{N_i} \Bigg) \xi_t < 0, \forall d(t) \in [0, h] \end{aligned}$$

끝으로, 이를 (22)에 적용하면, 다음을 얻게 되어

$$\dot{V}(x_t) < 0, \forall \xi_t \ne 0,\ \forall d(t) \in [0,\ h]$$

L-K안정성 정리에 의하여 조건 (2)을 만족하는 시간지연 시스템 (1)은 점근적으로 안정하다. 이것으로 증명을 마친다. □

4. 수치 예제

위에서 제시된 결과의 유용성을 보이기 위해 잘 알려진 두 개의 수치 예제를 제시한다.

예제 1. 다음과 같은 잘 알려진 시간 지연 시스템을 생각하자 [11].

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x(t - d(t)) \tag{23}$$

이 시스템은 $\dot{d}(t) = 0, \forall t$인 경우, 안정도를 보장하는 시간지연의 크기는 $h_{\max} = 6.1721$로 알려져 있다. 다음의 표 1은 시스템 (23)에 대하여, 각각의 μ에 대하여 안정도를 보장하는 최대 h의 값을 정리 1에 의하여 구하고, 기존의 결과들과 비교한 표이다. 표 1에서 보듯이 새로운 결과는 모든 μ값에 대하여 기존의 결과에 비해 우수함을 보인다.

표 1 여러 μ에 따른 최대 h값의 비교
Table 1 Comparison of maximal h for various μ

μ	0	0.1	0.5	0.8	1
He[2]	4.472	3.605	2.043	1.492	1.345
Sun[4]	4.472	3.611	2.072	1.590	1.529
Kim[5]	4.97	3.86	2.33	1.93	1.86
Kwon[8]	6.059	4.704	2.420	2.113	2.113
Kim[9]	6.168	4.753	2.429	2.183	2.182
정리 1	**6.168**	**4.767**	**2.477**	**2.230**	**2.230**

예제 2. 다음과 같은 잘 알려진 시간 지연 시스템을 생각하자 [11].

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t - d(t)) \tag{24}$$

이 시스템은 $\dot{d}(t) = 0, \forall t$인 경우, 안정도를 보장하는 시간지연의 크기는 $h_{\max} = \pi$로 알려져 있다. 다음의 표 2는 여러 종류의 μ에 대하여 안정도를 보장하는 최대 h의 값을 정리 1에 의하여 구하고, 기존의 결과들과 비교한 표이다. 표 2에서 보듯이 새로운 결과는 모든 μ값에 대하여 기존의 결과에 비해 우수함을 보인다.

표 2 여러 μ에 따른 최대 h 값의 비교
Table 2 Comparison of maximal h for various μ

μ	0	0.05	0.1	0.5	3
Wu[1]	1.82	1.76	1.71	1.38	-
Park[3]	1.99	1.81	1.75	1.61	1.60
Kim[5]	2.52	2.17	2.02	1.62	1.60
Kwon[8]	3.03	2.55	2.36	1.69	1.64
Kim[9]	3.13	2.61	2.42	1.79	1.64
정리 1	**3.13**	**2.68**	**2.53**	**1.94**	**1.71**

4. 결 론

본 논문에서는 최근의 Jensen 적분 부등식을 개선한 Seuret의 적분부등식보다 더욱 개선된 새로운 적분부등식을 유도하였다. 기존의 적분부등식들은 시간구간의 역수에 비례한 형태이어, 이를 LMI형태로 변환하기 위해서는 역수 함수들의 합 형태를 LMI로 바꾸는 또 다른 행렬 부등식을 사용하여야 하는데 반하여, 새로이 제시된 적분 부등식은 시간 구간에 비례한 형태이기에 또 다른 행렬 부등식이 필요하지 않는 장점이 있다. 새로이 제시된 적분 부등식을 이용하여 시간에 따라 변화하는 시간지연을 갖는 시간지연시스템의 안정성을 보장하는 결과를 LMI형태로 제시하였다. 끝으로 두 개의 수치예제를 통하여 최대 시간지연의 변화에 따라 안정성을 보장하는 최대 시간지연의 크기를 표로써 제시하였다. 표들에서는 모든 시간변화율의 최대 크기에서 새로이 제시되는 시간지연의 최대 크기는 기존의 결과보다 우수함을 보였다.

감사의 글

이 논문은 2014년도 충북대학교 학술연구지원사업의 연구비지원에 의하여 연구되었음.

References

[1] M. Wu, Y. He, J.-H. She and H.-P. Liu, "Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay system", *Automatica,* vol. 40, no. 8, pp. 1435-1439, 2004.

[2] Y. He, Q.-G. Wang, L. Xie and C. Lin, "Delay-range-dependent stability for systems with time-varying delay", *Automatica,* vol. 43, pp. 371-376, 2007.

[3] P. Park and J. W. Ko, "Stability and robust stability for systems with a time-varying delay, *Automatica,* vol. 43, pp. 1855-1858, 2007.

[4] J. Sun, G.-P. Liu, J. Chen and D. Rees, "Improved delay-range-dependent stability criteria for linear systems with time-varying delays", *Automatica,* vol. 46, pp. 466-470, 2010.

[5] J.-H. Kim, "Note on stability of linear systems with time-varying delay", *Automatica,* vol. 47, pp. 2118-2121, 2011.

[6] P. Park, J.W. Ko and C. Jeong, Reciprocally convex approach to stability of systems with time-varying delays, *Automatica,* vol. 47, pp. 235-238.

[7] A. Seuret and F. Gouaisbaut, "Wirtinger-based integral inequality: Application to time-delayed systems", *Automatica,* vol. 49, pp. 2860-2866, 2013.

[8] O.M. Kwon, M.J. Park, J.H. Park, S.M. Lee and E. J. Cha, "Improved results on stability of linear systems with time-varying delays via Wirtinger-based integral inequality, *J. of the Franklin Institute,* vol. 351, pp. 5382-5398, 2014.

[9] J.-H. Kim, "Further improvement of Jensen inequality and application to stability of time-delayed systems, *Automatica,* vol. 64, pp. 121-125, 2016.

[10] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishhnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory,* Studies in Applied mathematics, 1994.

[11] K. Gu, V. L. Kharitonov and J. Chen, *Stability of time-delay systems*, Birkhausser, 2003.

저 자 소 개

김 진 훈 (Jin-Hoon Kim)

1961년 10월 18일생. 1985년 서울대 전기공학과 졸업. 1985년~1986년 신영전기(주) 연구원. 1989년 한국과학기술원 전기 및 전자공학과졸업(석사). 1993년 동 전기 및 전자공학과 졸업(공박). 1993년~1994년 경상대 제어계측공학과 전임강사. 1998년 미국 UCI 방문교수. 2008년 미국 UTA 방문교수. 1995년~현재 충북대학교 전자정보대학 교수, 컴퓨터정보통신연구소 연구원.

Tel : 043-261-2387

Fax : 043-268-2386

E-mail : jinhkim@chungbuk.ac.kr