영재교육연구 제 26 권 제 1 호
Journal of Gifted/Talented Education
2016. Vol 26. No 1, pp. 211～230
http://dx.doi.org/10.9722/JGTE.2016.26.1.211

수학영재의 대수적 사고의 특징과 오류 유형

김 경 은 부산대학교
서 혜 애 부산대학교
김 동 화 부산대학교

본 연구는 수학영재의 대수적 사고의 특징과 오류 유형을 분석하여 수학영재 대상 대수-학습방법을 개선시키는 지도방안을 제안하는데 목적을 두었다. 본 연구에서는 2015학년도 광역시 소재 대학부설 과학영재교육원 중등수학반을 지원한 학생들 가운데 수학영재교육을 받은 경험이 있는 93명을 연구대상으로 선정하였다. 선행연구에 기초하여 대수적 사고 요소 분석틀을 구성하였으며, 연구대상들이 선발과정 1단계 창의성 검사에서 대수적 사고 관련 문항에 대해 작성한 답안들을 분석하였다. 연구결과, 연구대상 학생들은 양이 가진 속성을 파악하기도 하였으나 두 양 사이의 독립성과 관계를 추론하는 데 어려움을 가지는 것으로 나타났다. 또한 방정식을 문제해결의 도구로 인식하여 해를 구하려는 경향을 보였다. 이 과정에서 변수를 자리지기로서의 미지수 관점에만 집중하여 변수의 다양한 의미를 파악하는 데 어려움을 나타내었으며 일부 학생들은 대수적 개념에 대한 사고에서 오류를 만들어냈다. 결론적으로, 수학영재의 대수-학습방법을 개선하기 위해서는 변하는 양 사이의 관계를 일반화하고 추론하는 것을 포함하는 함수적 사고를 신장시키고, 식의 절차적 측면과 구조적 측면을 함께 강조하며, 변수 개념을 여러 측면에서 학습할 수 있는 다양한 상황을 제공하고, 대수적 개념을 스스로 구성하는 활동을 강화시키는 지도방안을 탐색해야 하는 것으로 고찰하였다.

주제어: 수학영재, 대수적 사고, 수학적 오류, 변수

I. 서 론

영재교육은 타고난 재능을 가진 학생들이 자아를 실현하고 나아가 사회발전에 기여할 수 있는 창의적 인재로 성장하도록 적절한 교육을 제공하는 데 목적을 두고 있다. 이러한 목적을 달성하려는 노력의 일환으로, 교육부는 영재교육진흥법의 제도적 기반 하에 2003년부터 지금까지 5년마다 영재교육진흥종합계획을 수립하여 추진해오고 있다. 2013년에 발표된 제3차 영재교육진흥종합계획에서는 5대 분야 17개 추진과제를 수립하였고 세 번째 분야, '수요자 중심의 영재교육과정 제공'에서는 학생 맞춤식 교육과정을 마련하여 영재교육의 질을 관리하려는 추진과제를 제시하고 있다(교육부, 2013). 이를 위해 수학영재교육에서는 수학적 사고력을 효

교신저자: 서혜애(haseo@pusan.ac.kr)

과적으로 신장시키는 다양한 수업 모형을 개발·적용해 오고 있으며, 수학영재의 개별 수준과 능력에 적합한 맞춤식 교육을 제공하기 위해 이들의 수학적 사고 과정에서 나타내는 다양한 특징을 조사하고 이에 부합하는 지도방안에 대한 연구들이 지속적으로 이루어지고 있다.

학생들이 문제해결 과정에서 나타내는 수학적 사고의 특징은 대수, 기하, 확률과 통계 등의 수학영역 별로 구분하여 고찰해볼 수 있다. 이 가운데 대수 영역에서 나타나는 대수적 사고는 학교수학에서 뿐만 아니라 수학영재교육에서도 중요한 부분을 차지하고 있으며 이에 대한 연구들도 지속적으로 진행되어 왔다. 대수적 사고는 대수의 다양한 특징 중 어느 한 가지 측면을 강조하면서 정의되는 것이 일반적이며, 대수적 사고의 정의는 강조되는 관점에 따라, 학자에 따라, 그리고 수학에서 요구하는 수준에 따라 다양하다(김성준, 2002b). 이러한 대수적 사고는 문제해결 과정에서 중요한 부분을 차지하며, 나아가 대수는 현대 수학에서 기본 영역으로 간주되고 있다.

초· 중등학교 수학 교과에서는 ‘수와 연산’을 내용 영역의 첫 부분으로 도입하고 있다. 수와 연산은 수학에서 다루는 가장 기본적인 대상인 수의 개념과 연산에 대한 이해를 바탕으로 다른 수학 영역 및 타 교과를 학습하는 데 필수적이다. 또한, 대수-학습의 기본이 되는 ‘문자와 식’은 수학적 의사소통에 필수적인 언어일 뿐만 아니라 추상화 단계에서 개념을 조작하고 적용할 수 있는 수단이며 동시에 일반화와 통찰을 용이하게 하는 방법을 제공하는 도구이다(김남희, 나귀수, 박경미, 이경화, 정영옥, 홍진곤, 2011). 이로 인해, 대부분의 영재교육기관의 수학영재교육에서는 대수 영역을 주요 학습내용으로 제공하며, 문제해결 과정에서 수와 연산과 문자의 식을 다루도록 지도하고 있다. 따라서 수학영재교육에서 대수-학습은 대수 영역뿐만 아니라 수학의 여러 영역을 심층적으로 이해하는 기초를 제공한다.

수학영재가 나타내는 대수적 사고의 특징들은 주로 일반화 전략과 그에 대한 정당화 유형 또는 오류 유형에서 발견되고 있다. 초등학교 5학년 수학영재들은 대수 과제를 해결하는 과정에서 과제에 내포된 복합적인 관계나 순환적인 관계를 다양한 경로로 파악하여 일반식을 이끌어내고 경험적 정당화와 형식적 정당화 수준을 보여주었으며, 그 과정에서 ‘감시’, ‘평가’, ‘제어’와 같은 메타인지적 행동들을 효과적으로 사용하는 것으로 조사되었다(김민정, 이경화, 송상헌, 2008). 나아가, 초등 수학영재들은 대수에서의 패턴 일반화 과정에서 일반학생들보다 곱셈과 덧셈의 연산이 함께 포함된 이차식 유형을 더 능숙하게 일반화시키는 것으로 나타났으며, 패턴의 일반화 유형에 대한 오류 빈도수 또한 일반학생들보다 50% 수준의 낮은 빈도수를 보이는 것으로 나타났다(유미경, 류성림, 2013). 한편 초등 수학영재들은 대수적 일반화 과정에 초점을 맞춘 페그퍼즐 과제의 경우 표를 통한 수치의 귀납적인 규칙을 찾기보다 포괄적인 예를 통해 일반적인 구조를 파악하려는 경향을 보였으며, 한편 이변수 일반화 과제의 경우에서는 정당화에 어려움을 겪는 것으로 탐색하였다(송상헌, 임재훈, 정영옥, 권석일, 김지원, 2007). 이와 같이 초등 수학영재들은 대수적 사고에서 일반학생들과 차이가 나는 특징을 발휘하며 따라서 이들의 대수적 사고 특징을 반영하는 맞춤식 지도방안을 탐색할 필요가 있을 것이다.

대수적 사고의 특징에 대한 연구들은 주로 초등 수학영재들을 대상으로 일반화 전략에 중점을 두고 있다. 한편, 중등 수학영재 대상의 연구들은 거의 이루어지지 않은 것으로 고찰되었

다. 또한 일반학생들을 대상으로 학교수학에서 대수를 본격적으로 다루기 시작하는 시기는 중학교 과정이며, 특히 많은 학생들이 초등학교 산술에서 중학교 대수로 이행하는 과정에서 큰 어려움을 겪고 있다는 연구들이 보고된 바 있다(김성준, 2002c; 류희찬, 김미정, 2004). 산술에서 대수로의 이행 과정은 초등 수학과 중등 수학의 경계에서 중등 수학으로의 성공적인 이행을 결정짓는 중요한 변인으로 작용하며, 이후 고등 수학 학습에 있어서도 중요한 영향을 끼친다(김성준, 2002c). 따라서 일반학생들이 학교수학에서 나타내는 어려움에 반추한다면, 수학영재교육에서도 초등학교에서 중학교로 이행하는 과정에 놓여있는 중등 수학영재들의 대수적 사고의 특징과 이행 과정에서 겪는 어려움이 무엇인지에 대해 구체적으로 살펴볼 필요가 있다.

이를 위해 본 연구에서는 대학부설 과학영재교육원 중등수학반에 지원한 학생들 가운데 이미 영재교육 대상으로 선발되어 수학영재교육을 받은 경험이 있는 초등학교 및 중학교 학생들을 연구대상으로 선정하였다. 따라서 본 연구에서는 수학영재의 대수적 사고의 특징 및 오류 유형을 분석하고, 초등학교 6학년 수학영재 대비 중학교 1학년 수학영재의 대수적 사고의 특징에는 어떤 차이가 있는지를 연구문제로 설정하였다. 이러한 특징 분석을 토대로 수학영재교육에서 대수-학습 지도방안을 개선시키는 방안에 대해 고찰하고자 한다. 본 연구의 연구결과는 중등 수학영재교육에서 대수적 사고의 효율적 지도방법을 탐색하고, 나아가 중등 수학영재 선발과정에서 반영할 수 있는 대수적 사고 요소의 특징을 제안하는 기초자료로 활용될 것으로 기대한다.

II. 이론적 배경

1. 수학영재

영재성은 고도의 일반적인 지적 능력, 창의성, 과제 집착력의 세 가지 요인이 개인의 인성과 주변 환경의 영향을 받아 특정 분야에서 특출한 과업 수행을 해낼 수 있는 역량과 잠재력으로 정의할 수 있다(Renzulli, 1978). 이 정의에 따르면, 수학에서의 영재성은 수학적 사고능력, 수학적 과제 집착력, 수학적 창의성 등으로 구분할 수 있다. 이 가운데 특히 수학적 사고능력은 수학적 문제를 이해하고 해결하는데 기본적으로 요구되는 사고 능력을 의미하며, 직관적 통찰 능력, 정보의 조직화 능력, 공간화/시각화 능력, 수학적 추상화 능력, 귀납적·연역적 사고 능력과 같은 수학적 추론 능력, 일반화 및 적용 능력, 반성적 사고 능력들을 포함한다(김홍원, 1998).

수학영재들이라고 해서 한 개인이 이러한 수학적 사고 능력을 모두 다 갖추고 있다고 보기는 어렵다. 개별 수학영재들은 대수학, 기하학 등의 세부영역별 사고 능력 가운데 특별히 한 영역에서 더욱 두드러지는 잠재력과 능력을 발휘하기도 한다. 예로서 기하학 증명능력에서 개별영재마다 수준과 능력에서 차이가 있는 것으로 조사되고 있다(최영기, 도종훈, 2004). 나아가 한 대학 부설 과학영재교육원 중등수학반 수학영재들도 다중지능, 자기조절학습능력, 개인적 성향에서도 서로 다른 특징을 보이는 것으로 나타났다(박미진, 서혜애, 김동화, 김지나, 남정희, 이상원, 김수진, 2013).

수학영재들이 나타내는 수학적 사고 능력을 좀 더 구체적으로 살펴보면, 수학적 사고 과정을 정보 수집, 정보 처리, 정보 파지의 3가지로 이해하고 이 3가지 과정에서 뛰어난 능력을 보이는 사람으로 볼 수 있다(Krutetskii, 1976). 특히, Krutetskii(1976)에 따르면, 일반학생들은 문제를 분석하고 종합하는 과정에 들어가서야 비로소 연관성을 탐색하는 분석-종합적인 절차(analytic-synthetic process)를 적용하는 반면, 수학영재는 문제의 구조를 파악하여 신속하고 단축된 절차를 거치면서 사고하는 분석-종합적인 통찰(analytic-synthetic vision)을 사용하여 곧바로 문제를 복합된 전체(composite whole)로 파악한다고 설명하였다.

2. 대수적 사고

대수적 사고는 대수에서 어떤 내용을 포함하느냐에 따라 다양하게 정의된다. 대수적 사고는 대수의 특정 측면에 초점을 두면서, 그 측면에서 요구하는 사고 유형에 따라 결정될 수 있다. 예를 들어, 대수에서 추상적인 측면을 강조한다면, 대수적 사고는 알려진 양을 조작하는 산술적 사고와 대비해서 미지의 양을 추상화하고 조작하는 능력으로 생각해볼 수 있다. 만약 대수에서 함수를 핵심으로 본다면, 대수적 사고는 변수 간의 관계를 드러내고, 양적 상황을 표현하는 능력으로 정의할 수 있을 것이다(김성준, 2002a).

이러한 대수적 사고는 다음과 같이 5가지 방법들의 조합으로 파악할 수 있다(Bell, 1996): ① 단계적으로, 주어진 것에서 미지의 것을 찾거나 조건 사이의 전반적인 관계를 한 번에 파악하여 문제를 해결한다. ② 다양한 형태의 문제를 해결하는 데 일반적이며 체계적인 방법을 사용하거나 공식화한다. ③ 수(기하)에서 일반화된 성질을 발견하거나 증명한다. ④ 수 체계와 연산에 대한 일반적인 성질을 인식하고 사용한다. ⑤ 조작 가능한 기호 언어를 사용한다. 이에 근거하여, 김성준(2004)은 대수적 사고의 현상학적 분석을 통해 대수적 사고의 본질을 다음과 같이 3가지 유형으로 나누어 분석하였다. 첫째, 역사 발생적 분석을 통해 분석적 사고와 비례적 사고, 형식 불역의 원리를 본질로 추출하였다. 둘째, 인식론적 분석을 통해 과정과 대상 간의 상호작용을 본질로 추출하였다. 셋째, 기호-언어학적 분석을 통해 문자 기호를 동적으로 해석하는 능력을 본질로 추출하였다. 이러한 논의를 바탕으로 학교대수에서 문자와 식, 방정식의 각 영역에서 요구되는 대수적 사고 요소를 <표 1>과 같이 나타낼 수 있다.

<표 1> 대수적 사고와 대수적 사고 요소

대수적 사고	대수적 사고 요소	
	문자와 식	방정식
분석적 사고와 비례적 사고	-	분석적 사고, 비례적 사고
형식 불역의 원리(일반화)	대수적인 원리	-
과정-대상의 상호작용	관점의 전환	관계 파악 능력, 가역적 사고
문자 기호에 대한 동적인 해석 능력	변수, 대수적인 해석, 변환추론, 연산감각, 대입	미지수, 대칭성 알아보기 문제해결 도구로 인식하기
'양적인 추론'은 모든 대수적 사고에 필요한 부분임.		

자료원: 우정호, 김성준(2007). p459.

3. 수학적 오류

수학 학습에서 나타나는 학생들의 오류의 유형과 원인 및 지도방안을 탐색하는 연구들은 오래전부터 수행되어 왔다. 수학 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 오류들을 읽기 단계, 이해 단계, 변환 단계, 절차적 기술 단계, 부호화 단계의 5개 단계로 분류하고 단계별 오류의 특징들을 논의할 수 있으며(Newman, 1977), 여기에 동기 또는 부주의 단계를 추가하여(Clements, 1980) 6단계로 수학적 오류를 분석할 수 있다. 특히 Newman(1977)이 분류한 오류의 5개 단계들은 이후의 수학적 오류 관련 연구에 발판을 제공하였으며, 이러한 오류의 단계적 분류는 적절한 단계에서 학생들의 오류를 수정하여 개별 학생의 수준에 적합한 교수·학습이 이루어질 수 있도록 하는 토대가 되었다.

한편 수학적 오류의 유형은 오류를 만들어 내는 원인을 준거로도 구분할 수 있다. 예로서, 이스라엘 고등학생들이 수학 졸업시험에서 나타낸 오류들을 6가지 원인에 따라 분류한 연구(Movshovitz-Hadar, Zaslavsky, & Inbar, 1987)가 발표된 바 있다. 이 연구에 따른 오류 유형을 구체적으로 살펴보면 첫째, 자료를 잘못 사용하여 나타나는 오류이다. 이는 문제에서 주어진 자료를 처리하는 과정에서 이를 누락하거나 적절히 사용하지 않아 발생하는 오류이다. 둘째, 잘못 해석된 언어로 인한 오류이다. 이는 일상 언어를 수학적 언어 즉, 수학 기호나 표현으로 잘못 변환하여 나타나는 오류이며 수학적 용어를 적절히 사용하지 못한 경우도 해당된다. 셋째, 논리적으로 적절하지 않은 추론으로 인한 오류이다. 귀납적 추론, 연역적 추론을 비롯한 여러 가지 상황에서 잘못된 추론으로 인해 타당하지 않은 정보를 이끌어내는 경우를 말한다. 넷째, 부적절한 정의나 정리를 사용하였기 때문에 나타난 오류이다. 특별한 원리, 규칙, 정리 또는 정의를 다루는 과정에서 발생하는 오류인데, 개념을 잘못 알고 있거나 문제와 관련이 없는 규칙을 이용하여 문제를 해결하고자 하는 경우를 말한다. 다섯째, 답안을 검증하지 않았기 때문에 나타난 오류이다. 풀이과정은 옳으나 답을 잘못 제시한 경우를 말하며 최종 결과를 확인하지 않아 생긴 오류를 말한다. 여섯째 기술적인 오류이다. 이는 계산을 하는 과정에서 생긴 오류, 표나 자료를 이끌어 내는 과정에서 생기는 오류, 알고리즘을 수행하는 과정에서 실수로 발생한 오류 등을 말한다.

최근 국내 연구에서도 수학적 오류의 원인과 유형을 분류한 연구가 많이 진행되고 있다. 초등학교 학생들이 서술형 평가에서 나타내는 오류를 크게 개념적 오류와 기술적 오류로 분류하고, 개념적 오류에서는 키워드로 읽기, 이해, 변환을, 기술적 오류에서는 키워드로 처리, 기록, 생략을 추출하여 각 키워드에 대한 오류 유형을 분석한 연구(정현도, 강신포, 김성준, 2010)도 보고되었다. 한편 중학교 2학년 학생들이 대수 영역의 서술형 평가에서 나타난 오류를 분석한 연구(김래영, 이민희, 2013)에서는, 수학적 연결성과 표현에 바탕을 둔 문항을 구성하여 오류의 범주를 표현, 연결성, 정보 이해, 추론, 연산, 풀이과정 생략으로 나누어 각 답안을 코드화하였다. 특히, 대수 영역에서는 미지수 사용에서의 오류와 기호와 수식의 표현에서의 오류를 표현 범주로 구성하였다. 이와 같이 학생들이 나타내는 대수 영역의 오류들은 학생들마다의 수준과 사고의 특징에 따라 다양하게 나타나는 것을 알 수 있다.

III. 연구 방법

1. 연구대상

본 연구의 연구대상은 대학부설 과학영재교육원의 심화과정 중등수학반 선발과정에 지원한 초등학생 및 중학생 가운데 이전에 수학영재교육을 받은 93명의 학생들로 선정하였다(<표 2> 참조). 대학부설 과학영재교육원 중등수학반에 지원할 수 있는 자격은 시·도교육청 산하 영재교육기관 및 영재학급, 대학부설 과학영재교육원 등의 영재교육기관에서 영재교육을 이수(또는 수료예정)하였거나, 이전에 영재교육을 받지 않았지만 학교장 추천을 받은 초등학교 6학년 또는 중학교 1학년 학생들이다. 본 연구에서는 2015학년도 광역시 소재 대학부설 과학영재교육원 중등수학반 선발과정 1단계 창의성 검사에 응시한 160명(초등학교 6학년 122명, 중학교 1학년 학생 38명) 가운데 수학영재교육을 받은 학생들로서 검사도구의 해당 문항에 응답한 93명을 연구대상으로 선정하였다.

<표 2> 연구대상 : 영재교육기관 별 수학영재교육을 받은 학생수 및 비율

기관 / 학년	대학부설 과학영재교육원	교육청 영재교육원	영재학급	기타 영재교육기관	합계 (%)
초등학교 6학년	13	26	24	7	70 (75.3)
중학교 1학년	2	7	12	2	23 (24.7)
합계	15 (16.1)	33 (35.5)	36 (38.7)	9 (9.7)	93 (100.0)

2. 검사도구

본 대학부설 과학영재교육원은 영재교육 대상자를 선발하기 위해 1단계 창의성 검사를 실시하였으며, 이 창의성 검사에는 수학영역 문항이 3개가 포함되었다. 본 연구에서는 이들 문항 가운데 수학영재의 대수적 사고 특징을 파악할 수 있는 문항에 대한 답안을 자료로 분석하였다. 이 문항에 대한 정보는 <표 3>과 같다.

<표 3> 본 연구에서 분석한 창의성 검사의 수학 문항

문항 유형	서술형 문항
출제 의도	수학적 모델링 능력, 수의 성질에 대한 이해, 사칙 연산 수행능력을 평가
문항 내용	무게가 다른 두 구슬의 무게의 합이 10의 배수가 되도록 하는 구슬의 최소 개수 구하기

3. 자료 분석 절차

먼저 해당 수학 문항에 대한 응답자 답안지의 응답내용을 바탕으로 1차 분석을 실시하였다. 모든 응답내용은 워크시트를 활용하여 정리하였다. 1차 분석에서는 학생들의 대수적 사고

의 특징 가운데 유사한 내용별로 분류하여 귀납적으로 범주화한 결과에 근거하여 예비 분석틀을 생성하였다. 이후 김성준(2004)이 제시한 대수적 사고 요소를 바탕으로 예비 분석틀을 재구성하여 2차 분석틀을 생성하였다. 이에 대한 구체적인 내용은 <표 4>와 같다. 응답내용에서 나타난 오류 유형에 대한 분석은 김래영과 이민희(2013), 정현도 외(2010), Movshovitz-Hadar et al.(1987)의 연구를 참조하고 본 연구의 응답내용을 반영하여 추론, 기술, 표현, 개념의 4가지 유형으로 분류한 분석틀을 활용하였다(<표 5> 참조).

<표 4> 대수적 사고 요소에 대한 분석틀

대수적 사고 요소	설명
① 양적으로 추론하기	· 양들 사이의 일반적인 관계에 대해 추론하는 능력 (Smith & Thompson, 2008)
② 문자 기호를 동적으로 해석하기 ②-1 대수적인 해석 ②-2 연산 감각 ②-3 변수	· 대수적인 해석 : 문제 상황에서 적합한 문자를 선택하여 주어진 상황을 식으로 표현하는 것; 산술과 대수를 구분하는 중요한 대수적인 전략(Freudenthal, 1983); 문자나 기호를 보다 효과적으로 선택하고 식을 조작할 수 있는 기호 감각 · 연산 감각 : 대수식을 조작하는 사칙연산 과정에서 요구되는 사고(Slavit, 1999) · 변수 : 자리지기라는 하나의 포괄적 개념 아래 실제적 변화와 가상적 변화라는 상이한 의미를 가지는 복합 개념(우정호, 김남희, 1996)
③ 문제해결 도구로 인식하기	· 문제해결에서 방정식을 도구로 이용하는 과정에서 요구되는 사고(Freudenthal, 1983)

<표 5> 대수적 사고 요소에서 나타나는 오류 유형에 대한 분석틀

대수적 사고의 오류 유형	설명
① 추론 상의 오류 (Movshovitz-Hadar et al., 1987)	①-1 두 양 사이의 독립성을 추론하지 못한 오류 ①-2 두 양 사이의 관계를 추론하지 못한 오류
② 기술 상의 오류	② 계산상의 오류 (Movshovitz-Hadar et al., 1987)
③ 표현 상의 오류 (김래영, 이민희, 2013)	③-1 분배법칙 표현의 오류 ③-2 변수 표현 이해의 오류
④ 개념에서의 오류 (정현도 외, 2010)	④-1 소인수분해 관련 오류 ④-2 최소공배수 관련 오류 ④-3 배수 관련 오류

IV. 연구결과 및 논의

1. 수학영재의 대수적 사고 특징

가. 대수적 사고의 요소별 특징

본 연구에서 연구대상 93명의 수학영재들이 나타낸 대수적 사고의 요소의 특징을 분석한 결과에 대한 응답자 수 및 비율은 <표 6>과 같다. 응답자 가운데 단일응답 학생수의 비율은 49.5%(93명 가운데 46명)인 반면, 2배수 응답 학생수는 22.6%, 3배수 응답 학생수 6.4%로 나타났다. 본 연구에서는 대수 교수-학습 지도방법에 대한 개선방안을 제안하는데 목적을 두고 있음에 따라, 학생들이 나타난 대수적 사고의 요소별 특징으로 나타난 개수에 근거하여 개선방안을

논의하고자 한다. 이들이 나타낸 대수적 사고 요소별 응답 개수는 총106개로 나타났으며, 이 가운데 가장 높은 비율로 나타난 대수적 사고의 요소는 연산 감각(36.8%)과 양적으로 추론하기(26.4%)이었으며 그 다음으로는 대수적으로 해석하기(21.7%)이었다. 한편 낮은 비율로 나타난 대수적 사고의 요소는 문제해결 도구로 인식하기(5.6%)와 변수로 해석하기(8.5%)이었다.

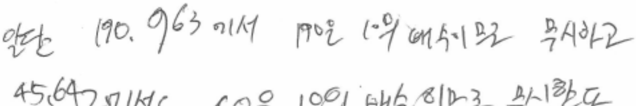
<표 6> 수학영재들이 나타낸 대수적 사고의 특징 별 응답수

구분	대수적 사고 요소별 응답자 수					응답별 특징	응답자 수 (명)	응답자 수 (%)
	①	②-1	②-2	②-3	③			
단일 응답	12					① 양적 추론, 양이 가지고 있는 속성을 파악	12	46 (49.5%)
			34			②-2 연산 감각, 분배법칙 개념 이해	34	
2배수 응답	6	6				① 양적 추론 + ②-1대수적인 해석	6	21 (22.6%)
	4		4			① 양적 추론 + ②-2연산 감각	4	
		9		9		②-1 대수적인 해석 + ②-3변수를 자리지기 미지수로 생각	9	
		2			2	②-1 대수적인 해석 + ③문제해결 도구로 인식	2	
3배수 응답	1	1	1			① 양적 추론 + ②-1대수적인 해석 + ②-2연산 감각	1	6 (6.4%)
	5	5			5	① 양적 추론 + ②-1대수적인 해석 + ③문제 해결 도구 인식	5	
소계 (%)	28 (26.4)	23 (21.7)	39 (36.8)	9 (8.5)	7 (6.6)	106 (100.0%)	-	-
대수적 사고를 보이지 않음						· 단순 시행착오 또는 풀이과정 미비	20	(21.5%)
합계							93	(100.0%)

※ 배수 응답은 2개 또는 3개의 오류 유형을 동시에 제시한 응답

이러한 수학영재들이 나타낸 대수적 사고의 특징을 요소별로 논의하면 다음과 같다.

양적으로 추론하기 : 본 문항을 해결하기 위해 학생들은 양이 가지고 있는 속성을 파악하여 식을 도출한 후 두 양 사이의 관계나 구조를 추론하였다. 이와 같이 양적으로 추론하는 대수적 사고를 문제에 적용한 응답한 비율은 26.4%(총106개 가운데 28개)이었다. 구체적인 응답 내용으로 이 문제를 해결하는데 결정적으로 영향을 미치는 사고는 구슬의 무게에서 10의 자리 이상은 10의 배수가 되도록 하는 과정에 영향을 미치지 않으므로 소수점 부분만 고려하면 해결된다는 것으로 이해하는 특징을 보였다([그림 1]). 또한, 큰 구슬과 작은 구슬의 개수를 관계식 $3x+2y=10000$으로 표현한 후 $x+y$가 최소가 되기 위해 x가 최댓값, y가 최솟값을 가져야 한다고 제시하여, 양적 관계를 인식하는 것으로 나타났다([그림 2]).



[그림 1] 소수점만 고려하면 해결되는 것을 파악함

$3x+2y \equiv 0 \pmod{1000}$

$x+y$ (구슬의 총개수) 가 최소라 했으므로 x가 커야 한다

$\Rightarrow x=332,\ y=2$

[그림 2] x, y 사이의 양적 관계를 추론하는 과정

문자 기호를 동적으로 해석하기: 이 문제를 해결하기 위해서는 주어진 상황을 식으로 잘 표현할 수 있어야 하며 식을 조작하는 과정에서 적절한 연산감각이 필요하다. 또한 학생들은 구성한 식에 포함된 변수를 다양한 관점에서 해석할 수 있는 능력이 필요하다. 학생들이 구성한 응답내용을 토대로 문자 기호를 동적으로 해석하는 능력과 관련한 2차 분석 결과를 범주화한 결과는 다음과 같다.

첫째, 응답내용의 21.7%(총106개 가운데 23개)는 [그림 3]과 같이 주어진 상황을 문자를 사용한 식으로 표현하여 대수적으로 해석하였다. 이 가운데 18개 응답내용에서는 양적 추론의 오류는 나타나지 않았다. 주어진 상황을 식으로 표현하게 되면 x와 y의 변수를 독립된 변수로 인식하게 되며, 이와 같은 대수적인 해석은 양적 추론에서 생길 수 있는 오류를 해결하는데 상당한 영향을 주는 것으로 해석된다.

큰구슬: x개, 작은구슬: y개

$190.963x+45.642y=10k.$

$\downarrow$ 양변에 $\times 1000$

$190963x+45642y=10000k.$

[그림 3] 주어진 상황을 대수적으로 해석한 경우

둘째, 양적으로 추론하기와 관련하여 오류를 범한 대부분의 학생들도 분배법칙을 문자를 사용하여 나타내지는 못하였으나 기본 개념을 어느 정도 이해하고 있었다. 이들은 큰 구슬 한 개과 작은 구슬 한 개의 개수를 합한 후 적당한 수를 곱하여 구슬의 무게의 합을 십의 배수로 만들었다. 즉,

{(큰 구슬 1개의 무게) + (작은 구슬 1개의 무게)} × 2000개
= (큰 구슬 2000개의 무게) + (작은 구슬 2000개의 무게)

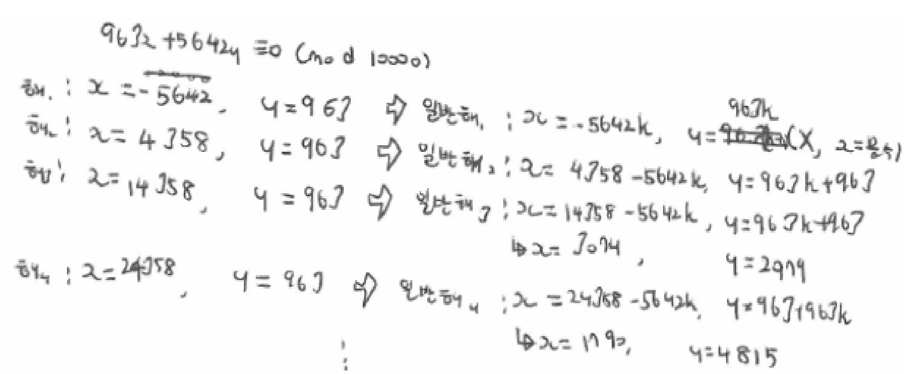
와 같은 관계를 이해하여 결론을 도출했다.

셋째, 주어진 상황을 대수적으로 해석하여 문자를 포함한 식으로 표현한 23개 응답내용 가운데 9개는 방정식을 문제해결 도구로 인식하는 것으로 나타났는데, 이는 x와 y를 자리지기

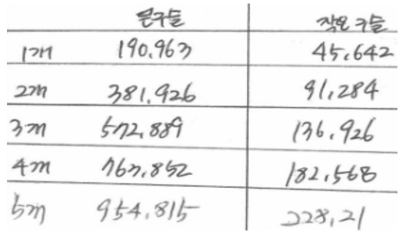
로서의 미지수로 생각하여 문제를 해결하려 한 것으로 해석되었다. Usiskin(1988)은 대수를 문제해결 과정의 학습, 일반화의 학습, 양 사이의 관계 학습, 구조의 학습으로 구분하였으며 이에 해당하는 변수의 의미를 각각 자리지기로서의 미지수, 다가이름으로서의 부정소, 독립변수, 종속변수, 매개변수로서의 변수, 임의의 대상, 임의의 기호로서의 변수로 구분하였다. 학생들은 변화하는 두 양 사이의 관계를 추론하는 함수적 상황보다는 주어진 미지수를 구하는 방정식을 많이 다루어보았기 때문에 변수를 자리지기로서의 미지수로 생각하여 문제를 해결하려는 경향이 두드러지게 나타났다.

문제해결 도구로 인식하기: 응답내용의 8.5%(9개)에 해당하는 학생들은 시행착오를 통해 일차방정식의 해를 구하려 하거나, 합동식(mod)을 통해 일차방정식의 일반해를 구하는 등 방정식을 문제해결 도구로 사용하는 것으로 나타났다([그림 4]). 이 가운데 4명의 응답자는 합동식(mod)을 이용하여 일반해를 구하려 하였고, 5명은 시행착오를 통해 x, y에 적당한 값을 대입하거나 문자를 소거하여 연립일차방정식을 푸는 형태로 해를 구하려 하였다. 이를 통해 일부 학생들은 이전에 이미 일차합동식 및 연립일차합동식의 해를 구하는 방법을 학습한 것으로 추측할 수 있다. 이는 초등학교에서부터 시행착오를 통해 문제를 해결하는 것에 익숙한 학생들이 식의 구조를 파악하기보다는 산술적으로 계산하여 해를 구하려는 것으로 보였다. 이 학생들은 방정식의 계수가 커서 계산 과정이 복잡함에도 불구하고 x, y의 관계를 절차적인 식으로 생각하여 문제를 해결하려 하였다.

방정식을 문제해결 도구로 사용하지 않은 학생들은 표 만들기 등의 과정을 통해 귀납적으로 규칙성을 발견하려고 시도하기도 했다(4명)([그림 5]). 최근 수학과 교육과정에서는 수학적 의사소통과 함께 문제해결, 수학적 추론을 강조하고 있다. 따라서 표 만들기를 통하여 귀납적으로 규칙을 찾거나 시행착오를 거쳐 해를 구하는 문제 상황을 초등에서 '규칙성과 문제해결' 영역을 통해 많이 접하였기 때문에 귀납적 추론에 익숙할 것으로 생각된다.



[그림 4] 합동식을 이용하여 일차방정식의 일반해를 구하고자 한 경우



[그림 5] 귀납적 추론을 통해 규칙성을 발견하려 한 경우

나. 대수적 사고의 오류 유형의 특징

본 연구의 수학영재들이 나타낸 대수적 사고의 오류 유형의 내용 및 응답자 수를 단일응답과 복수응답으로 구분하여 분석한 결과는 <표 7>과 같다. 응답자 가운데 단일응답 학생수의 비율은 59.1%(93명 가운데 55명)인 반면, 2배수 응답 학생수는 17.2%, 3배수 응답 학생수 3.2%로 나타났다. 이들이 나타낸 대수적 사고에서 나타낸 오류 유형 개수는 총96개로 나타났으며, 이 가운데 가장 높은 비율은 추론의 오류 중 두 양 사이의 독립성을 추론하지 못한 오류(35.4%)이었으며, 그 다음으로는 추론의 오류 중 두 양 사이의 관계를 추론하지 못한 오류

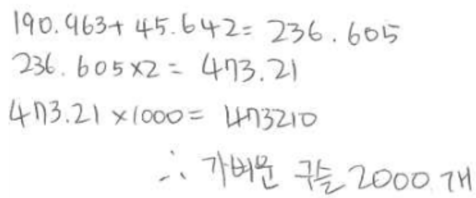
<표 7> 수학영재들이 대수적 사고에서 나타낸 오류 유형의 내용 및 응답자 수

구분	오류 유형별 응답자 수								응답별 특징	응답자 수(명)	응답자 수 (%)
	①-1	①-2	②	③-1	③-2	④-1	④-2	④-3			
단일 응답	18								·두 양 사이의 독립성 추론 못한 오류	18	55 (59.1%)
		23							·두 양 사이의 관계 추론 못한 오류	23	
			2						·계산상의 오류	2	
				0					·분배법칙 표현의 오류	0	
					10				·변수 표현 이해의 오류	10	
						1			·소인수분해 관련 오류	1	
							1		·최소공배수 관련 오류	1	
								0	·배수 관련 오류	0	
2 배수 응답	1	1							·독립성 + 관계 추론 오류	1	16 (17.2%)
	2		2						·독립성 추론 + 계산상 오류	2	
	7			7					·독립성 추론+분배법칙 표현오류	2	
	1					1			·독립성 추론+소인수분해 오류	1	
	2							2	·독립성 추론 + 배수 오류	7	
		2	2						·관계 추론 + 계산상 오류	1	
		1		1					·관계 추론+분배법칙 표현 오류	2	
3 배수	2		2	2					·독립성 추론+계산상+분배법칙 오류	2	3 (3.2%)
	1		1				1		·독립성+계산상+최소공배수 오류	1	
소계	34 (35.4)	27 (28.1)	9 (9.4)	10 (10.4)	10 (10.4)	2 (2.1)	2 (2.1)	2 (2.1)	96 (100.0%)		
오류 분석 불가									·풀이과정의 미비	19	(20.4%)
합계										93	(99.9%)

※ 배수 응답은 2개 또는 3개의 오류 유형을 동시에 제시한 응답

(28.1%), 분배법칙 표현의 오류(10.4%), 변수 표현 이해의 오류(10.4%)이었다(<표 7> 참조). 한편 낮은 비율은 계산 상의 오류(9.4%)와 소인수분해, 최소공배수, 배수 관련 개념의 오류(각 2.1%)이었다. 이러한 대수적 사고의 오류를 유형별로 논의하면 다음과 같다.

추론의 오류: 첫째, 많은 학생들이 주어진 문제 상황에서 변화하는 x와 y의 양 사이의 비교 관계를 적절히 추론하는 데 어려움을 겪고 있었으며, 특히 큰 구슬의 개수와 작은 구슬의 개수가 독립적으로 변화하는 양임을 인식하지 못하였다. 35.4%(응답내용 총96개 가운데 34개)에 이르는 많은 학생들이 양적 추론에서 이러한 오류를 범하고 있었는데 이들은 [그림 6]과 같이 큰 구슬과 작은 구슬을 한 개씩 합한 후 적당한 수를 곱하여 구슬의 무게의 합을 십의 배수로 만들어 답을 구했다. 큰 구슬과 작은 구슬의 무게에 적당한 수를 곱한 후 이들을 합한 경우도 각 구슬의 무게에 동일한 수를 곱하여 합하기도 하였다. 둘째, 두 양 사이의 관계를 추론하지 못한 경우는 28.1%(총96개 가운데 27개)이었다. 큰 구슬과 작은 구슬의 개수를 관계식 $3x+2y=10000$으로 표현한 학생의 경우도 $x+y$가 최소가 되기 위해 x는 최댓값, y는 최솟값을 가져야한다는 양적인 관계를 인식하지 못하였다. 이러한 예는 학생들이 변화하는 두 양 x, y 사이의 관계를 비교하는 양적 추론에 어려움을 겪고 있음을 의미한다.



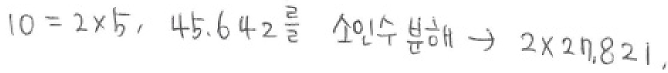
[그림 6] 양적 추론과 관련한 가장 일반적인 사고의 오류 유형

기술의 오류: 기술의 오류 즉, 풀이과정에서의 단순한 계산 실수 또는 문제를 답안에 잘못 표기하여 오류를 범한 학생들은 9.4%(9개)로 나타났다. 구슬의 무게가 소수점 아래 셋째 자리까지 표현된 상황에서 구슬의 개수를 차례로 증가시키면서 귀납적 추론을 통한 일반화를 시도하거나 방정식의 일반해를 구하고자 한 경우에 소수 계산의 복잡함으로 인하여 실수를 범한 학생들이 많았다. 본 문항의 경우, 기술의 오류는 문제를 해결하는데 직접적인 영향을 미치는 오류 유형은 아니지만 수와 연산과 관련된 문제해결 능력을 평가하는 과정에서 계산의 정확성을 간과해서는 안 된다.

표현의 오류: ‘문자 기호에 대한 동적인 해석 능력’과 관련한 학생들의 대수적 사고 특징은 자연스럽게 표현의 오류와 연결되어 논의될 수 있다. 첫째, 10.4%(10개)에 해당하는 학생들은 분배법칙의 기본적 원리는 이해하고 있었으나 이를 문자를 이용하여 적절히 표현하는데 어려움을 겪고 있었다. 특히, 대수적인 해석에 능한 학생들도 대수식에서 적합한 연산 규칙, 이를테면 본 문제 상황에서는 분배법칙을 적용하여 식의 구조를 파악하는 수준에 이르지는 못했다. 둘째, 10.4%(10개)에 해당하는 학생들은 문자로 표현된 변수를 이해하는데 어려움을 나타

냈다. 본 문항의 풀이 과정에서는 분배법칙과 같은 연산 규칙을 적용하기 위해 x와 y를 형식적 조작의 대상 즉, 임의의 대상으로 생각할 수 있어야 한다. 또한 x와 y는 각 구슬의 개수로서 독립적으로 변화하지만 $3x+2y=10000$에서 $x+y$가 최소가 되기 위한 조건은 x가 최댓값, y가 최솟값을 가질 때이다. 이 경우 x, y는 독립변수이면서도 서로의 값에 관계를 받는 종속변수 즉, 양 사이의 관계로도 생각할 수 있어야 한다. 그러나 학생들은 이와 같은 변수의 다양한 측면을 생각하지 못하는 경향을 보였다. 이는 이전에 방정식 문제를 푸는 과정에서 변수를 자리지기로서의 미지수로 생각하여 해결하는 경험을 많이 해보았기 때문으로 추측된다.

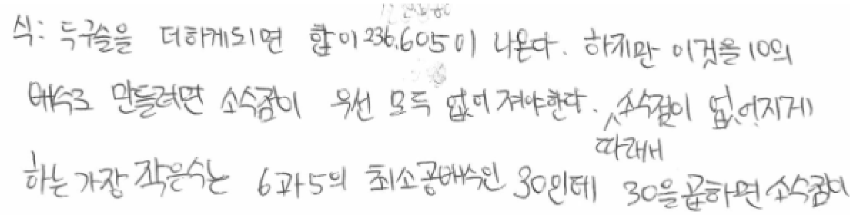
개념의 오류: 대부분의 학생들은 적절한 용어와 개념을 사용하여 문제를 해결하려 하였으나 6명의 학생들은 소인수분해, 최소공배수, 배수와 같은 대수적 용어 및 개념에 대해 정확하게 이해하지 못하고 있었다. 대수적 개념에 대하여 오류를 범한 학생들이 구성한 답안을 분석한 결과를 정리하면 다음과 같다. 첫째, 소인수분해와 관련된 오류이다. 소인수분해는 자연수를 소인수들의 곱으로 나타내는 것을 의미한다. 그러나 소인수 즉, '소수인 인수'보다 '분해'라는 단어에만 집중하여 이를 문제해결 과정에 잘못 적용하는 경우가 있었다(2명). 또한 만의 자리 이상의 큰 수를 소인수분해하여 수를 분석하려고 시도하였는데 이는 모두 소인수분해의 정확한 의미를 이해하기보다는 두 수를 소인수분해하는 문제에 익숙한 학생들이 수의 성질을 파악하는 데 어려움을 겪기 때문으로 생각된다.



[그림 7] 소인수분해 관련 오류 1

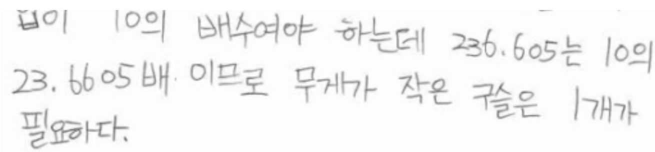
[그림 8] 소인수분해 관련 오류 2

둘째, 최소공배수와 관련된 오류이다. 일부 학생은 분수가 포함된 방정식을 푸는 과정에서 분모를 없애기 위해 등식의 양변에 최소공배수를 곱하는 상황에 익숙한 나머지 소수점을 없애기 위해 주어진 소수점 각 자릿수들의 최소공배수를 곱하려고 시도하였다(2명). 이는 분수가 포함된 식을 간단히 하기 위해 양변에 분모의 최소공배수를 곱하는 것과 소수가 포함된 식을 간단히 하기 위해 양변에 적당한 10의 배수를 곱하는 것을 혼동하여 일으킨 오류라 생각된다. 대수적 개념과 등식의 성질에 대한 유의미한 이해가 부족한 상태에서 단순 계산에 치중한 문제 풀이 경험이 많아 나타난 오류로 보인다.


식: 두구슬을 더하게되면 합이 236.605이 나온다. 하지만 이것을 10의 배수로 만들려면 소수점이 우선 모두 없어져야한다. 따라서 소수점이 없어지게 하는 가장 작은수는 6과5의 최소공배수인 30인데 30을 곱하면 소수점이

[그림 9] 최소공배수 관련 오류

셋째, 배수와 관련된 오류이다. 2명의 응답자가 배수 개념에서 오류를 나타내었다. 배수 개념은 초·중학교에서 자연수 범위에서 다루어지며 이후에 정수의 범위까지로 확장된다. 그러나 배수와 약수가 정의되는 범위를 정확하게 지도하지 않으면 [그림 10]에서와 같이 236.605는 10의 23.6605배이므로 10의 배수라고 결론을 내리는 등 유리수의 범위까지 확장하여 잘못 이해하게 된다.


답이 10의 배수여야 하는데 236.605는 10의 23.6605배 이므로 무게가 작은 구슬은 1개가 필요하다.

[그림 10] 배수 관련 오류

다. 초등학교 6학년 대비 중학교 1학년의 차이점

위의 결과를 바탕으로 초등학교 6학년 수학영재 대비 중학교 1학년 수학영재의 대수적 사고 특징 및 오류 유형의 차이점을 고찰하여 정리한 결과는 <표 8>과 같다.

첫째, 중학교 1학년 수학영재들은 초등학교 6학년 수학영재에 비해 주어진 양의 속성을 파악한 후 두 양의 관계를 추론하는 것에 능했다. 초등수학영재의 27.1%가 양의 속성을 파악하여 소수점만 고려하면 됨을 파악한 반면 중등수학영재는 39.1%에 해당하는 학생들이 이러한 양적 추론에 성공하였다. 또한, 본 문항에 대해 가장 정확한 풀이를 한 2명이 모두 중등수학영재였는데, 이들은 주어진 상황을 대수적으로 해석한 후 두 변수를 양 사이의 관계로 보고 구조를 파악하여 적절한 결론을 도출하였다. 중등수학영재의 경우 초등수학영재에 비해 학교수학에서 문자와 식, 일차방정식, 함수를 차례로 학습하는 과정에서 변수가 내포하는 다양한 의미에 대해 접할 기회가 많았기 때문에 나타는 결과로 생각된다.

둘째, 중학교 1학년 수학영재들은 초등학교 6학년 수학영재에 비해 주어진 상황을 대수적으로 해석하여 문자를 포함한 식으로 표현하는 것에 능했다. 중등수학영재(47.8%)가 초등수학영재(14.3%)에 비해 주어진 상황을 문자를 포함한 식으로 나타내는 대수적인 해석 능력이 뛰어났다. 이는 문자와 식이 본격적으로 도입되는 시기가 중학교 1학년이기 때문에 중등수학영재가 초등수학영재보다 주어진 상황을 문자를 사용한 식으로 표현하는 것에 익숙하여 나타난

결과로 추측된다.

셋째, 대수적 개념에 대하여 오류를 일으킨 6명 중 1명만이 중등수학영재이며 5명은 초등수학영재로 나타났다. 특히 최소공배수, 소인수분해와 관련된 오류는 모두 초등수학영재에게서 나타났는데 이들은 소인수분해의 절차에 익숙하다 할지라도 소수의 정확한 정의, 소인수분해의 의미를 이해하지 못한 채 문제를 해결하려 하였다.

<표 8> 대수적 사고 요소와 오류 유형별 초 · 중등수학영재의 반응 비교

대수적 사고 요소 또는 오류 유형	초등수학영재	중등수학영재	합계
1) 양적으로 추론하기: 양의 속성 파악	19 (27.1%)	9 (39.1%)	28 (30.1%)
2) 대수적인 해석: 식으로 표현	10 (14.3%)	11 (47.8%)	21 (22.6%)
3) 개념의 오류를 만들어 냄	5 (7.2%)	1 (4.4%)	6 (6.5%)
비교하기 어려운 요소 또는 오류 유형	36 (51.4%)	2 (8.7%)	38 (40.9%)
합계	70 (100.0%)	23 (100.0%)	93 (100.0%)

2. 대수 학습 지도의 개선 방안

지금까지 수학영재교육 선발 시험에 지원한 학생들의 대수적 사고 경향성에 대한 결과를 도출하였다. 지원자들이 겪고 있는 대수적 사고에 대한 오류를 바탕으로 향후 수학영재교육에서 대수 학습 지도를 위해 개선되어야 할 방안에 대해 고찰하고자 한다.

첫째, 함수적 사고를 신장시킬 수 있는 수업이 이루어져야 한다. Blanton, Levi, Crites, & Dougherty (2011)은 대수적 사고를 위한 중요한 아이디어 중 하나로 함수적 사고를 제시하고 있는데, 함수적 사고에는 동시에 변하는 양 사이의 관계를 일반화하고, 이러한 관계를 말, 기호, 표 또는 그래프로 표현하며 함수 행동을 분석하기 위해 다양한 표현을 추론하는 것이 포함된다. 본 연구에서 제시된 문항을 해결하는 과정에서 학생들은 양적 추론에 많은 어려움을 겪었다. 양적 추론은 양들 사이의 일반적인 관계를 추론하는 능력을 의미하므로 함수적 사고를 신장시키는 학습을 통해 이러한 어려움이 어느 정도 해소될 수 있을 것이라 생각된다. 또한 한 변수의 값의 변화가 다른 변수의 값에 어떠한 영향을 미치는지에 대한 관계적 사고는 '양 사이의 관계'에 대한 학습뿐만 아니라 모든 대수 학습에서 요구되는 부분이므로 이에 대한 학습 및 논의가 이루어져야 한다.

둘째, 산술로서의 절차적 측면과 대수로서의 구조적 측면을 동시에 고려하는 학습이 이루어져야 한다. 본 연구의 문항에서 학생들은 주어진 상황을 식으로 표현한 후 방정식의 해를 구하는 과정에만 집중하는 경향을 나타냈는데, 산술에서의 절차적 측면을 지나치게 강조하게 되어 구조적 측면인 대수로의 이행에 어려움을 겪었기 때문으로 분석된다. 이는 산술식으로부터 자연스럽게 식을 구조적으로 변형하는 학습이 필요함을 말해준다. 예를 들면 등식을 다양한 방법으로 변형하여 식의 구조를 관찰하기, 한 문제를 다양한 풀이 과정을 통해 해결하기, 조작적 관점에서의 비대칭적 등호 개념과 관계적 관점에서의 대칭적 등호 개념에 대한 동시 학습 등이 지속적으로 이루어져야 한다.

셋째, 변수의 다양한 측면에 대한 균형 있는 학습이 요구된다. '자리지기로서의 미지수'를 구하는 방정식의 측면만 강조되어 x를 구하는 문제해결의 학습에 집중하게 되면 '다가이름으로서의 부정소', '독립변수, 종속변수 등 양 사이의 관계', '임의의 대상과 기호를 나타내는 구조'로서의 변수 x, y에 대한 학습이 제대로 이루어지지 못한다. 학생들이 대수적인 해석에 어려움을 겪었던 이유는 변수를 '다가이름으로서의 부정소'로 인식하지 못하여 상황을 일반화시키는데 어려움을 느꼈기 때문이다. 연산감각에 어려움을 겪었던 이유는 변수를 '임의의 대상과 기호를 나타내는 구조'로 생각하지 못했기 때문이다. 이를 극복하기 위한 방안으로 하나의 식을 다양한 관점에서 생각할 수 있도록 상황을 제시하거나, 더 나아가 학생 스스로 식에 적합한 다양한 상황을 만들어보고 이를 공유하는 활동을 할 수 있도록 지도해야한다.

넷째, 대수적 개념에 대한 단순 계산을 강조하는 교수-학습을 지양하고 수학적 개념을 학생 스스로 구성할 수 있도록 하는 활동이 추가되어야 한다. 남승인(2011)은 '수학영재교육 대상자의 수학용어에 대한 오개념 실태 조사'연구에서 많은 수학영재가 수학적 개념에 대해 정확하게 이해하고 있지 못하고 있다고 말하고 있다. 수학적 개념을 받아들이고 이를 적용하는 학습만 하는 것이 아니라 어떠한 개념이 생겨나게 된 필요성을 느낄 수 있는 활동을 해보고, 활동의 조직화를 통해 직접 개념을 정의해본다면 개념에 대한 이해도를 높일 수 있을 것이다. 이러한 활동은 단순한 지식 전달 수업보다 교사에게 수학적 개념에 대한 상당한 배경지식을 요하므로 수학영재를 가르치는 교사 또한 수학적 개념에 대한 깊이 있는 교수학적 분석을 한 후 지도해야 한다.

V. 결론 및 제언

본 연구에서는 대학부설 과학영재교육원 심화과정 중등수학반 선발과정 1단계 창의성 검사에 응시한 93명을 대상으로 대수적 사고의 특징 및 오류 유형을 분석하고 향후 대수-학습 지도를 개선하기 위한 방안을 탐색하였다. 대수 영역과 관련된 창의성 검사 1문항을 검사도구로 설정하였으므로 본 연구를 바탕으로 수학영재의 대수적 사고의 특징과 오류 유형을 일반화시키는데 일부 제한점이 있으며, 연구 결과 나타난 수학영재의 대수적 사고 특징과 오류 유형 및 대수-학습 지도의 개선 방안을 요약하면 다음과 같다.

첫째, 학생들은 양이 가진 속성에 대해 추론하기도 하였으나 두 양의 독립성을 파악하지 못하는 오류를 범하고 있었으며 특히 변화하는 두 양 x, y 사이의 관계를 비교하는 양적 추론에 어려움을 겪었다. 이러한 어려움을 극복하기 위한 방안으로 함수적 사고의 신장을 통한 대수 학습을 제시하였다.

둘째, 학생들은 일차방정식을 문제해결의 도구로 인식하여 시행착오, 합동식 등을 이용하여 미지수를 구하려는 경향을 보였다. 규칙성을 찾기 위해 표 만들기를 시도하기도 하였으며, 문제 상황을 식으로 표현한 학생들은 주로 방정식을 풀기 위해 오랜 시간을 고민했던 것으로 보인다. 이러한 경향을 보인 이유는 학생들이 식을 구조적으로 바라보지 못하고 답을 구하는 절차적 측면 즉, 알고리즘에만 집중하였기 때문이다. 따라서 식의 절차적 측면과 구조적 측면을

함께 학습할 수 있도록 지도해야 함을 제시하였다.

셋째, 학생들은 대수적인 해석에 익숙하지는 않았으나 분배법칙과 같은 연산 규칙에 대한 개념은 어느 정도 이해하고 있었으며 이를 식으로 표현하거나 구조를 파악하는 데 어려움을 겪었다. 또한 자리지기로서의 미지수로 변수를 이해하고 있었다. 문자의 다양한 측면에 대하여 학생들이 균형 있는 학습을 할 수 있도록 교사의 적절한 지도가 필요하며 특히 식에 따라 변화하는 변수의 역할과 본질을 이해할 수 있도록 풍부한 상황을 제공할 것을 제시하였다.

넷째, 대부분의 학생들은 적절한 수학적 개념 및 용어를 이용하여 문제를 해결하였으나 일부 학생들은 소인수분해, 최소공배수, 배수 등 대수와 관련된 기본 개념을 정확하게 이해하지 못하였다. 이는 학교수학교육 및 수학영재교육에서 개념의 의미에 대한 탐구보다는 문제해결의 방법적인 면에 치중한 결과로 추측된다. 대수적 개념에 대한 단순 계산을 강조하는 학습을 지양하고 수학적 개념을 학생 스스로 구성할 수 있도록 하는 활동이 추가되어야 함을 제시하였다.

이상의 분석 결과를 바탕으로 다음과 같이 제언하고자 한다. 첫째, 수학영재를 위한 대수 관련 프로그램을 개발할 때에는 학생들의 대수적 사고 수준을 정확하게 파악하고 특징을 이해한 후 이를 적용하여야 한다. 지원자들 중 선발 시험에 합격한 합격자들 사이의 이해 수준 또한 큰 차이를 보였다. 학생들이 특히 어떠한 부분에서 인지 장애를 겪고 있는지 면밀히 파악한 후 특히 중등수학영재 선발의 경우 산술에서 대수로의 이행 단계에 있는 학생들이 많이 분포되어 있으므로 이에 적합한 프로그램이 개발되어야 한다.

둘째, 학생들의 대수적 사고의 특징에 대한 연구를 추가적으로 수행할 필요가 있다. 본 연구는 대수 관련 한 문항을 대상으로 수행한 연구이므로 수학영재의 대수적 사고 특징으로 일반화하기 어렵다. 대수적 사고에 대한 분석을 실시한 후 수학영재의 다양한 대수적 사고 특징을 탐색하기 위한 적절한 문항을 개발하여 합격자들을 대상으로 적용해보는 등의 후속 연구를 실시할 필요가 있다.

셋째, 현재 수학영재교육기관에서 이루어지는 대수 영역의 교육과정, 프로그램, 그리고 교사의 수업 방법 등에 대한 조사연구를 실시할 필요가 있다. 대수 영역 프로그램 개발 관련 연구는 이루어지고 있으나 대수적 사고를 신장시키기 위한 효과적인 지도전략이나 수업 모형, 수업 전략 등에 대한 연구는 거의 이루어지고 있지 않다. 이러한 부분에 대한 후속 연구를 통해 수학영재의 대수 학습-지도에 대한 현황 파악 및 개선이 이루어질 수 있을 것이라 기대한다.

참 고 문 헌

교육부 (2013). **제3차 영재교육종합진흥계획(2013-2017)**. 서울: 교육부.

김남희, 나귀수, 박경미, 이경화, 정영옥, 홍진곤 (2011). **수학교육과정과 교재연구**. 서울: 경문사.

김래영, 이민희 (2013). 중학교 2학년 서술형 평가 문항 반응에서 나타난 오류 분석: 대수 영역을 중심으로. **수학교육학연구, 23**(3), 389-406.

김민정, 이경화, 송상헌 (2008). 초등 수학영재의 대수적 사고 특성에 관한 분석. **학교수학, 10**(1), 23-42.

김성준 (2002a). 대수적 사고와 대수 기호에 관한 고찰. **수학교육학연구, 12**(2), 229-245.

김성준 (2002b). 대수적 사고의 기원에 관한 고찰. **한국수학사학회지, 15**(2), 49-68.

김성준 (2002c). 수학 학습에서 이행에 관한 고찰: 산술과 대수를 중심으로. **수학교육학연구, 12**(1), 29-48.

김성준 (2004). **대수의 사고 요소 분석 및 학습-지도 방안의 탐색**. 박사학위논문. 서울대학교 대학원.

김홍원 (1998). 수학 영재 판별 도구 개발-수학 창의적 문제 해결력 검사를 중심으로-. **영재교육연구, 8**(2), 69-89.

남승인 (2011). 수학영재교육 대상자의 수학용어에 대한 오개념 실태 조사. **한국초등수학교육학회지, 15**(1), 179-198.

류희찬, 김미정 (2004). 산술적 지식과 대수적 지식 사이의 이행 과정에서 나타난 연결과 단절 현상에 관한 연구. **수학교육학논총, 25**, 269-295.

박미진, 서혜애, 김동화, 김지나, 남정희, 이상원, 김수진 (2013). 과학 · 수학 영재의 다중지능, 자기조절학습능력 및 개인성향의 차이. **영재교육연구, 23**(5), 697-713.

송상헌, 임재훈, 정영옥, 권석일, 김지원 (2007). 초등수학영재들이 페그퍼즐 과제에서 보여주는 대수적 일반화 과정 분석. **수학교육학연구, 17**(2), 163-177.

우정호, 김남희 (1996). 변수 개념의 교수학적 분석 및 학습-지도 방향 탐색. 수학교육학연구, 6(2), 197-210.

우정호, 김성준 (2007). 대수의 사고 요소 분석 및 학습-지도 방안의 탐색. **수학교육학연구, 17**(4), 453-475.

유미경, 류성림 (2013). 초등수학영재와 일반학생의 패턴의 유형에 따른 일반화 방법 비교. **학교수학, 15**(2), 459-479.

정현도, 강신포, 김성준 (2010). 초등학교 서술형 평가에서 나타나는 오류 유형 분석. **한국초등수학교육학회지, 14**(3), 885-905.

최영기, 도종훈 (2004). 수학 영재학생들의 인지적, 정의적, 창의적 특성 분석. **학교수학, 6**(4), 361-372.

Bell, A. (1996). Algebraic thought and the role of a manipulable symbolic language. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*. (pp.151-154). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., & Dougherty, B. J. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking in grades 3-5*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Clements, M. A. (1980). Analyzing children’s errors on written mathematical tasks. *Educational Studies in Mathematics, 2*, 121

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. New York, NY: Kluwer Academic Publishers.

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O., & Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*(1), 3-14.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. Chicago, IL: The University of Chicago Press.

Newman, M. A. (1977). An analysis of sixth-grade pupils'errors on written mathematical tasks. In M. A. Clements & J. Foyster (Eds.), *Research in Mathematics Education in Australia* (pp. 269-287). Melbourne: Swinburne College Press.

Renzulli, J. S. (1978). What makes giftedness? Reexamining a definition. *Phi Delta Kappan, 60*(3), 180-184.

Smith, J. P., & Thompson, P. W. (2008). Quantitative reasoning and the development of algebraic reasoning. In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp.95-132). New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Slavit, D. (1999). The role of operation sense in transitions from arithmetic to algebraic thought. *Educational Studies in Mathematics, 37,* 251-274.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. Coxford & A. Shulte (Eds.), *The Ideas of algebra, K-12* (pp. 8-19). Reston, VA: NCTM.

= Abstract =

Characteristics of Algebraic Thinking and its Errors by Mathematically Gifted Students

Kyung Eun Kim
Pusan National University

Hae Ae Seo
Pusan National University

Dong Hwa Kim
Pusan National University

The study aimed to investigate the characteristics of algebraic thinking of the mathematically gifted students and search for how to teach algebraic thinking. Research subjects in this study included 93 students who applied for a science gifted education center affiliated with a university in 2015 and previously experienced gifted education. Students' responses on an algebraic item of a creative thinking test in mathematics, which was given as screening process for admission were collected as data. A framework of algebraic thinking factors were extracted from literature review and utilized for data analysis. It was found that students showed difficulty in quantitative reasoning between two quantities and tendency to find solutions regarding equations as problem solving tools. In this process, students tended to concentrate variables on unknown place holders and to had difficulty understanding various meanings of variables. Some of students generated errors about algebraic concepts. In conclusions, it is recommended that functional thinking including such as generalizing and reasoning the relation among changing quantities is extended, procedural as well as structural aspects of algebraic expressions are emphasized, various situations to learn variables are given, and activities constructing variables on their own are strengthened for improving gifted students' learning and teaching algebra.

Key Words: Mathematically gifted students, Algebraic thinking, Mathematical errors, Variables

1차 원고접수: 2016년 2월 18일
수정원고접수: 2016년 3월 17일
최종게재결정: 2016년 3월 29일