한국학교수학회논문집 제 19 권, 제 1 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 19, Number 1, 1-19, March 2016

괄호 생략 관점에서 식의 표기에 관한 고찰

김창수[1)]· 강정기[2)]

본 연구는 오늘날 사용되는 식의 표기를 괄호 생략의 관점에서 고찰하였다. 먼저 연산 기호 생략 규칙과 관련한 초·중등 교과 내용을 검토해본 결과, '48÷2(9+3)의 계산 결과는 얼마인가?'라는 물음에 답할 명시적 근거를 찾기 어려웠다. 다음 표기에 관한 근본적인 탐구를 위해 전위 표기법, 중위 표기법, 후위 표기법의 특징을 살펴보고, 중위 표기법이 갖는 장·단점을 확인하였다. 동시에 표기법의 발전을 괄호 생략의 관점에서 조명해 보았다. 이러한 고찰로부터 연산 생략은 곧 함수의 이미지라는 관점이 괄호 생략을 원활하게 해석할 수 있는 한 방법임을 확인할 수 있었다. 이를 통해 역사 발생적 원리에 따른 수학적 표기 지도, 중위 표기법의 선택 맥락 이해와 난점 극복을 위한 노력의 재현, 연산자를 포함한 생략된 괄호를 찾아 근본 식을 파악하는 활동, 곱셈이 생략된 경우를 함수의 이미지로서 간주하는 관점의 명시 등을 포함한 몇 가지 지도방안을 제안하였다.

주요용어 : 괄호의 생략, 식의 표기, 중위 표기법, 함수의 이미지

Ⅰ. 서론

얼마 전 인터넷에서 미국의 한 수학 시험에 출제된 문제 '48÷2(9+3)의 계산 결과는 얼마인가'에 대한 이슈가 화제가 된 적이 있다. 어떤 이는 계산 결과가 2라고 하고 어떤 이는 288이라고 하여 논란이 되었다. 결과 값이 2라고 하는 사람은 2와 (9+3) 사이의 곱셈이 생략되었으므로 즉, 48÷2×(9+3)로 2×(9+3)를 먼저 계산하면 24이므로 48÷24를 계산하면 2가 된다는 것이다. 이에 반해 288이라고 주장하는 사람은 위 문제를 48÷2×(9+3)로 생각하지만 곱셈과 나눗셈의 연산 순서는 등장하는 순서대로 계산해야 하므로 먼저 48÷2를 먼저 계산하면 24이고 이것을 12와 곱하면 288이라고 주장하는 것이다.

계산 결과가 2라고 주장하는 사람들은 미국수학협의회의 'multiplication indicated by juxtaposition is carried out before division'이라는 규정을 든다. 즉, 곱셈 기호가 생략된 병렬항의 경우는 곱셈이 나눗셈에 앞선다는 규정이다. 또한 그들은 Russell, Whitehead의 「Principles of Mathematics」에도 답이 2라는 주장을 뒷받침하는 규정이 제시되어 있다고 주장한다. 반면, 계산 결과가 288이라고 주장하는 사람들은 '답은 2이다'라는 계산법은 곱셈

* MSC2010분류 : 97-03, 97U20

1) 경상대학교 사범대학부설중학교 (cupncap@gmail.com)
2) 진영중학교 (jeonggikang@gmail.com), 교신저자

이 생략되었다는 이유로 기존의 연산식에 없는 괄호를 추가하고, 곱셈과 나눗셈을 오른쪽부터 계산하는 오류를 범하므로 틀렸다고 주장한다. 또한 일부 공학용 계산기(TI-83, TI-84, TI-Nspire, 카시오제 공학계산기)와 스마트 폰도 이 답을 출력한다고 지적한다. 심지어 두 주장의 첨예한 대립으로부터 '수식 자체가 잘못되었다'는 주장까지 제기되었다. 이 식은 우선 수식 내부에서 /과 ÷는 같이 사용하지 않으며, 곱셈기호를 생략하기 위해서는 ÷가 아닌 /를 사용해야 한다는 규칙을 어겼다고 주장한다. 다시 말해 곱셈기호를 생략할 때 사용하는 2차원 식인 분수를 ÷를 사용하여 1차원 식으로 표현하는 바람에 생기는 오류라는 주장이다(엔하위키 미러, 2015).

이러한 논란은 비단 미국뿐 아니라 우리나라에서도 벌어지고 있다. 이광연 한서대 수학과 교수가 위의 식을 '오류가 있는 수식'이라고 했는데, 그 이유는 원칙적으로 중괄호로 묶거나 앞의 나눗셈 기호도 곱셈처럼 생략해서 분수식으로 써야 한다고 했다. 반면 남호영 영신고 수학교사는 정답이 2라고 했는데, 2(9+3)은 한 덩어리로 보기 때문에 뒤쪽을 완전히 계산한 다음에 나누기를 하는 게 중등학교 수준에 맞다고 했다(이민정 외, 2012 재인용).

이러한 문제에 대해 초등학생도 아닌 성인들조차, 심지어 수학 전문가 및 교육자조차 정확히 옳고 그름을 구분 짓지 못한다는 것은 현 수학의 표기법 및 수학 교육 표기 지도의 문제점을 반영해 주는 것이라 생각된다. 적어도 수학자 또는 수학교육자들은 이러한 표기에 대한 적절한 해석을 내어놓을 수 있어야 하며, 그것은 기존의 수학 표기법을 지지하는 방향이어야 할 것이다.

덧셈과 곱셈이 섞인 혼합계산, 곱셈 기호의 생략, 괄호의 생략 등과 관련하여 이미 여러 연구에서 학생들이 오개념을 가지고 있음을 밝혔으며 이에 대한 대안을 제시한 바 있다. 예를 들어, 정기근 외(2007)는 혼합계산에 대한 처방 프로그램을 개발하여 적용하고 그 효과성을 검증하였으며, 이민정 외(2012)는 곱셈 및 괄호 기호의 생략으로 인한 혼란을 줄이기 위한 방법을 수학사를 통해 고찰하였다. 또한 도종훈·허선희(2010)는 곱셈 기호와 나눗셈 기호의 생략 과정을 학생들이 재미있게 학습하도록 하기 위한 방안으로 카드 게임을 고안하고, 이를 활용한 수업을 시행하여 그 효과와 의의를 분석하였다.

이미 기존 연구에서 혼합계산, 기호와 괄호 생략으로 인한 혼란 등에 대해 문제를 제기하고 있지만, 본 연구는 식 '48÷2(9+3)'의 해석에 대한 근거를 마련하고자 한다는 점에서 기존 연구와 차별된다. 본 연구는 위의 식에 대한 첨예한 대립은 다름 아닌 괄호 생략과 관련한 해석의 문제라고 보았다. '48÷2(9+3)'에서 생략된 연산을 복귀시킬 경우 괄호를 필요로 하는지 그렇지 않은지가 문제인 것이다. 다시 말해, 산술식 48÷2(9+3)를 48÷{2×(9+3)}라고 볼 것인지 아니면 48÷2×(9+3)라고 볼 것인지의 문제이다. 대수의 측면에서 보면 $a \div bc$를 $a \div (b \times c)$라고 볼 것인지 아니면 $a \div b \times c$라고 볼 것인지의 문제이다. 본 연구에서는 대수는 곧 산술의 일반화라는 점에서 이 둘을 구분하여 보는 것은 적절하지 않다고 판단하였다. 따라서 이들 문제를 해석하는 통합적인 관점과 그 해석의 근거를 마련하기 위한 목적으로 식의 표기법을 괄호 생략의 관점에서 고찰해 보고자 한다.

이를 위해 먼저 이런 혼란이 어디서부터 비롯된 것인지를 살펴볼 필요가 있다. 식 표기법과 관련한 초등학교와 중학교 교과서와 교사용지도서를 분석함으로써, 두 가지의 대립된 해석이 발생한 원인이 무엇인지를 교수학적 관점에서 파악할 것이다. 다음 표기법 발달과정과 괄호 사용의 경위를 밝혀봄으로써 괄호 생략이 갖는 역사적 의미를 조명해 보고자 한다. 이는 괄호 생략의 역사적 의미를 살펴봄으로써 식 표기에 있어 괄호 생략의 당위성을 확보하고, 괄호 생략을 해석할 수 있는 수학적 근거 마련의 필요성을 강화하고자 하는 의도를 지

닌다. 이후 현재 사용되는 표기의 예를 연산의 본질적 의미에서 되짚어보는 사고활동을 통해 괄호 생략을 해석할 수 있는 하나의 관점이자 근거를 제안하고자 한다. 더불어 이러한 고찰로부터 수학 교수·학습에서 표기법과 관련한 몇 가지 시사점을 제공하고자 한다.

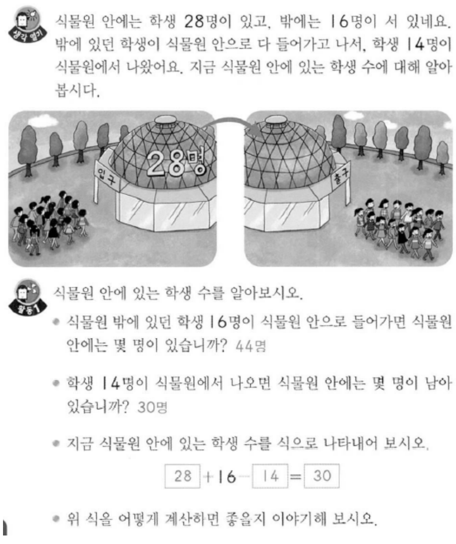
Ⅱ. 수학 교과서의 식 표기 분석

1. 초등 교과서의 산술식 표기 규칙

세 수 이상이 포함된 혼합계산 규칙은 초등학교 2학년 교과서에 처음으로 등장한다. 이와 관련된 교사용지도서는 '덧셈과 뺄셈 단원'에서 세 수의 혼합계산에 대한 다음과 같은 유의점을 제시하고 있다(교육과학기술부, 2013).

지도의 유의점
세 수의 혼합 계산은 문제 상황에 맞게 앞에서부터 순서대로 계산할 수 있도록 지도한다.

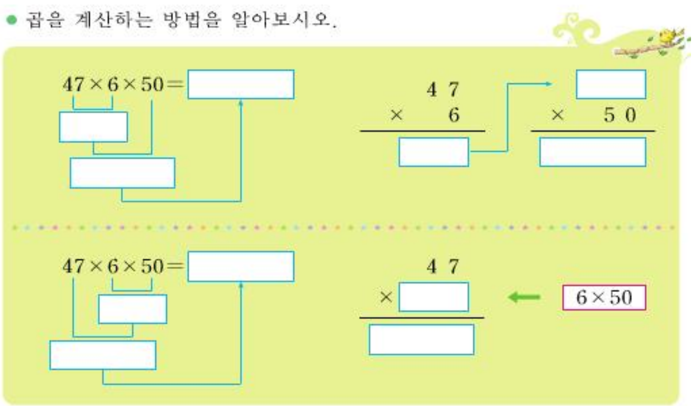
이러한 규칙은 상황으로부터 자연스럽게 덧셈과 뺄셈의 혼합 계산식을 유도하고, 앞에서부터 순서대로 계산하는 규칙을 생각하게 만드는 자연스러운 전개 방식을 취하고 있다. 그것이 연가산(세 수의 덧셈), 연감산(세 수의 뺄셈), 감가산, 가감산이든 상관없이 앞에서부터 순서대로 계산하는 규칙에 대한 학생들의 발견을 유도하는 것이 그 골자이다.



[그림 Ⅱ-1] 덧셈과 뺄셈의 혼합계산 규칙 지도(교육과학기술부, 2013)

혼합계산 규칙은 초등학교 4학년 교과서에서 더욱 본격화된다. 초등학교 수학 4-1 교과서에 세 수의 곱셈에 관한 규칙이 등장하며, 이것 역시 상황으로부터 곱셈식을 유도하고, 유도

된 곱셈식에 대한 규칙을 생각하게 만드는 전개방식을 택하고 있다(교육과학기술부, 2011a). 한 가지 흥미로운 점은 순서대로 앞에서부터 계산하는 규칙 대신 뒤의 것부터 계산해도 상관없다는 곱의 결합법칙을 지도한다는 점이다. 이는 곧 효율적인 계산 방식에 관한 인식을 돕기 위한 교육적 조치로 해석된다. 하지만 이러한 지도는 덧셈과 대비하여 명확한 계산 규칙을 제시하지 못하는 한계를 지닌다. 다시 말해, 괄호가 제시되지 않은 세 수의 곱셈에 대한 일반적인 계산 규칙이 제공되지 못하고 있다. 효율적인 산술 계산이 계산 규칙에 비해 교육적 우위를 점하고 있는 것으로 해석된다.



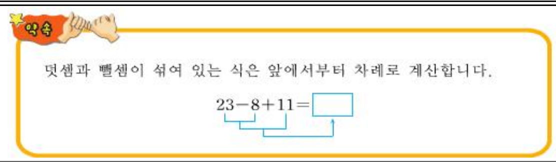
[그림 Ⅱ-2] 곱셈에 대한 결합법칙 인식을 돕기 위한 활동(교육과학기술부, 2011a)

이와 관련한 교사용지도서에는 효율적인 계산을 명시하고 있는데(교육과학기술부, 2011b), 이것이 곧 일반적 규칙이 제공되지 않은 이유로 해석된다.

> 이것은 세 수의 곱셈을 능숙하게 하도록 하는 활동이다. 세 수의 곱셈은 차례로 곱하는 것이 최선이 아니며 수가 배열된 상황에 따라 계산 순서가 달라져야 효율적인 계산을 할 수 있다는 것을 알게 한다.

초등학교 수학 4학년 교과서에 5단원 '혼합계산'에서는 본격적인 혼합계산 규칙이 '약속'의 형태로서 등장하게 된다. 덧셈과 뺄셈이 섞여 있는 혼합계산, 곱셈과 나눗셈이 섞여 있는 혼합계산, 덧셈과 뺄셈 그리고 곱셈이 섞여 있는 혼합계산, 덧셈과 뺄셈 그리고 나눗셈이 섞여 있는 혼합계산, 괄호가 있는 혼합계산 규칙이 <표 Ⅱ-1>과 같이 약속으로 제시되고 있다.

<표 Ⅱ-1> 혼합계산 유형별 약속(교육과학기술부, 2011a)

혼합계산 유형	약속
덧셈, 뺄셈이 섞여 있는 혼합계산	

곱셈, 나눗셈이 섞여 있는 혼합계산	약속 곱셈과 나눗셈이 섞여 있는 식은 앞에서부터 차례로 계산합니다. $240 \div 40 \times 2 = \square$
덧셈, 뺄셈, 곱셈이 섞여 있는 혼합계산	약속 덧셈, 뺄셈, 곱셈이 섞여 있는 식은 곱셈을 먼저 계산합니다. $50 - 7 \times 4 + 14 = \square$
덧셈, 뺄셈, 나눗셈이 섞여 있는 혼합계산	약속 덧셈, 뺄셈, 나눗셈이 섞여 있는 식은 나눗셈을 먼저 계산합니다. $20 + 240 \div 2 - 110 = \square$
(　)가 있는 혼합계산	약속 (　)가 있는 식은 (　) 안을 먼저 계산합니다. $1000 - (450 + 300) = \square$
{　}가 있는 혼합계산	약속 식에 쓰이는 괄호에는 (　), {　}가 있습니다. (　), {　}가 있는 식은 (　) 안을 먼저 계산한 후 {　} 안을 나중에 계산합니다. $30 - \{(2+3) \times 4 + 1\} = \square$
덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈, (　), {　}이 섞여 있는 혼합계산	약속 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈, (　), {　}가 섞여 있는 식은 다음과 같이 계산합니다. $30 \div \{13 - (2+6)\} + 2 \times 5 - 7 = \square$

여러 유형의 혼합계산 중 덧셈과 뺄셈이 섞여 있는 혼합계산은 교사용지도서에서 '단, 계산의 편리성을 고려하여 계산 순서를 바꾸는 경우가 있음을 설명한다'고 명시함으로서 규칙을 넘어 계산의 편리성에 대한 지도가 필요함을 언급하고 있다. 하지만 그 외의 혼합계산에서는 덧셈과 뺄셈의 혼합계산과는 다르게 계산순서가 다르면 계산한 값이 달라질 수 있음을 이해하도록 지도해야 한다는 점을 명시하고 있다(교육과학기술부, 2011b).

산술로 대표되는 초등학교 수학에 등장하는 계산 규칙은 상황으로부터의 산술식의 발생과 그에 따른 규칙의 발견이라는 자연스러운 전개 방식을 취하고 있으며, 무조건적 지시대신 '학생들과의 합의'에 의한 약속이어야 함을 일률적으로 강조하고 있다(교육과학기술부, 2011b). 이는 학습자 스스로의 지식 발견을 강조한 구성주의 사조가 반영된 결과로 해석된다. 다시 말해, 비록 약속일지라도 규칙을 암기가 아닌 이해의 대상으로 승격되기를 바라는 교육적 조치라고 볼 수 있다. 하지만 이와 같은 노력에도 불구하고 현재의 지도 방식으로는

왜 곱셈과 나눗셈을 덧셈과 뺄셈보다 먼저 계산해야 하는 것인지 그 맥락과 이유 파악이 어려운 한계를 지닌다.

2. 중등 교과서의 대수식 표기 규칙

중등 교과서의 대수식 표기 규칙을 살펴보기 위해, 신항균 외(2013a, 2013b, 2013c, 2013d), 이강섭 외(2013a, 2013b, 2013c, 2013d), 황선욱 외(2013a, 2013b, 2013c, 2013d)를 검토하였다. 본 연구에서는 다른 두 교과서의 내용과 별다른 차이가 없다는 점에서 황선욱 외(2013a, 2013b, 2013c, 2013d)의 자료를 대표로 제시하였다.

대수 기호 표현은 중학교 1학년 방정식 단원의 ‘문자와 식’에서 본격화되며, 동시에 효율적 표기를 목적으로 곱셈 기호의 생략 규칙이 [그림 Ⅱ-3]과 같이 명시된다(황선욱 외, 2013a).

곱셈 기호의 생략

❶ 수와 문자의 곱에서는 곱셈 기호 ×를 생략하고, 수를 문자 앞에 쓴다.

$2\times x=2x,\quad x\times(-3)=-3x$

❷ 문자와 문자의 곱에서는 곱셈 기호 ×를 생략하고, 보통 알파벳 순서로 쓴다.

$a\times x\times b=abx$

❸ 같은 문자의 곱은 거듭제곱으로 나타낸다.

$x\times x\times x=x^3,\quad 3\times a\times a\times b\times b\times b=3a^2b^3$

• 주의 ❶ 1 또는 −1과 문자의 곱에서는 1을 생략한다.

$1\times x=x,\quad -1\times x=-x$

❷ $0.1\times x$에서는 1을 생략하지 않고 $0.1x$로 나타낸다.

❸ $\frac{1}{2}\times x$는 $\frac{1}{2}x$ 또는 $\frac{x}{2}$로 나타낸다.

[그림 Ⅱ-3] 대수에서 곱셈 기호의 생략 규칙(황선욱 외, 2013a)

또한 괄호가 있는 곱 역시 곱셈 기호 ×를 생략하고 곱해지는 수를 괄호 앞에 쓴다는 규칙이 예시를 통해 명시되고 있다(황선욱 외, 2013a). 한편, 곱셈과 나눗셈이 섞여 있는 대수식에 대한 규칙은 다음과 같은 문제 풀이를 통해 제시되고 있다. 이와 관련한 교사용지도서에서 곱셈과 나눗셈의 생략에 대한 규칙을 아래와 같이 명시함으로써, 연산자의 생략은 곧 우선순위의 계산을 의미한다는 점을 예를 통해 보여주고 있다. 예컨대, [그림 Ⅱ-4]의 $x\div 3y$에서 곱셈 기호 ×의 생략은 $x\div 3\times y$가 아니라 $x\div(3\times y)$이라는 점을 명확히 하고 있다(황선욱 외, 2013b). 이러한 내용은 신항균 외(2013a)와 이강섭 외(2013a)에서도 동일한 규칙으로 등장한다.

문제 5 다음 식을 간단히 나타내어라.

(1) $a\times b\div 2$ (2) $x\div(3\times y)$

(3) $a\div b\times 5\times a$ (4) $-3\times(x-2)\div y$

문제 5 주안점 곱셈과 나눗셈의 기호가 섞여 있는 식에서 괄호가 있는 경우 괄호 안의 기호를 먼저 생략한 후, 앞에서부터 차례대로 기호를 생략하여 나타내게 한다.

풀이 (1) $a\times b\div 2=ab\div 2=\dfrac{ab}{2}$

(2) $x\div(3\times y)=x\div 3y=\dfrac{x}{3y}$

(3) $a\div b\times 5\times a=\dfrac{a}{b}\times 5\times a=5\times\dfrac{a}{b}\times a=\dfrac{5a^2}{b}$

(4) $-3\times(x-2)\div y=-3(x-2)\div y=-\dfrac{3(x-2)}{y}$

[그림 Ⅱ-4] 곱셈과 나눗셈이 섞여 있는 식에서 연산자의 생략(황선욱 외, 2013b)

이와 관련하여 황선욱 외(2013d)는 단항식의 곱셈, 나눗셈에서 다음과 같은 오류를 범하지 않도록 지도해야 할 것을 지적하고 있다.

오개념 바로잡기 | 단항식의 곱셈, 나눗셈에서 다음과 같은 오류를 범하지 않도록 지도한다.

- $2a\times(-3a)^2=2a\times(-3a^2)=-6a^3$ (×)
  → $2a\times(-3a)^2=2a\times 9a^2=18a^3$ (○)
- $6x^3y^2\div\dfrac{3}{4}xy=6x^3y^2\times\dfrac{4}{3}xy=8x^4y^3$ (×)
  → $6x^3y^2\div\dfrac{3}{4}xy=6x^3y^2\times\dfrac{4}{3xy}=8x^2y$ (○)

[그림 Ⅱ-5] 단항식의 곱셈과 나눗셈에서의 유의점(황선욱 외, 2013d)

또한 단항식의 계산에서 곱셈과 나눗셈이 섞인 경우에 대한 다음 규칙을 명시하고 있다(황선욱 외, 2013d). 이들 역시 신항균 외(2013d)와 이강섭 외(2013d)에서도 지도상 유의점으로 등장한다.

내용 연구

❶ 단항식의 계산에서 곱셈과 나눗셈이 섞여 있는 경우에는 앞에서부터 차례대로 계산하되, 나눗셈은 곱셈으로 바꾸어 계산하게 한다.

즉 $a\div b\times c=a\times\dfrac{1}{b}\times c$로 계산하게 한다.

오개념 바로잡기 | 단항식의 곱셈과 나눗셈이 섞여 있는 식에서 다음과 같은 오류를 범하지 않도록 지도한다.

$$x^2y^3\div xy=x^2\times y^3\div x\times y$$
$$=x^2\times y^3\times\frac{1}{x}\times y=xy^4\ (\times)$$

→ $x^2y^3\div xy=\dfrac{x^2y^3}{xy}=xy^2$ (○)

또 $a\div b\times c=a\div(b\times c)$로 계산하지 않도록 지도한다.

[그림 Ⅱ-6] 곱셈과 나눗셈이 섞여 있는 경우에 대한 유의점(황선욱 외, 2013d)

이러한 내용을 볼 때, 연산 기호의 생략은 곧 우선순위의 연산을 의미하는 것임을 알 수 있다. 이상의 일련의 규칙들은 특별한 맥락의 제공 없이 도입되고 있다. 단지 문자를 사용하여 식으로 표현하는 상황 맥락이 제공될 뿐, 곱셈 기호의 생략 규칙 도입을 위한 맥락은 제공되고 있지 않다. $2\times x$를 왜 $2x$라고 적는지에 대한 상황 맥락을 찾아 볼 수 없는 전개인 것이다(신항균 외, 2013b; 이강섭 외, 2013b; 황선욱 외, 2013b). 더군다나 초등의 교사용지도서에서 나타난 '학생들의 합의에 의한 약속' 역시 나타나지 않고 있다. 이처럼 중등의 수학 표기 지도는 이유나 맥락에 대한 지도가 결여되고 동시에 '학생들의 합의'를 간과함으로써, 규칙을 단순히 암기의 대상으로 간주하여 지도하는 측면이 강하다고 볼 수 있다.

한편, 연산 기호 생략 규칙과 관련한 초·중등의 교과 내용을 검토해 본 결과, 서론에서 언급한 '48÷2(9+3)의 계산 결과는 얼마인가'라는 물음에 답할 명시적 근거를 찾기 어려웠다. 산술식에서 어떠한 연산도 생략되지 않은 경우는 그것을 해석할 수 있는 명시적 근거를 초등학교 수학 교과서에서 찾을 수 있다(교육과학기술부, 2011a; 2011b). 하지만 위와 같은 ×은 생략되었지만 ÷은 생략되지 않은 경우에 대해 그것을 해석할 수 있는 명시적 근거는 찾기 어렵다. 결국 서론에서 밝힌 첨예한 대립 현상은 곱셈은 생략되었지만 나눗셈은 생략되지 않은 산술 표기를 해석할 수 있는 명시적 근거의 부족에서 비롯된 현상으로 볼 수 있다.

하지만 곱셈과 나눗셈이 섞여 있는 대수식에서는 ×은 생략되었지만 ÷은 생략되지 않은 경우의 예시적 근거를 찾을 수 있었다. 대수는 곧 산술의 일반화라는 점에 비춰볼 때, 논란의 중심에 섰던 산술식 48÷2(9+3)을 해석하는 근거를 대수식에서 찾을 필요가 있다고 생각된다. 중학교 1학년 '식의 값'과 관련된 다음 문제에 대한 교사용지도서의 풀이에는 산술식에서 곱셈 기호가 생략된 예를 접할 수 있다. 풀이 (3)에 등장하는 $-2\{3+3\times(-5)\}$는 곱셈 기호가 생략된 산술식의 형태이다. 이와 같은 예를 볼 때, 곱셈 기호가 생략된 산술식의 해석을 위해 대수식의 표기 규칙을 분석해 보는 것도 의미 있는 일이라 할 수 있다.

문제 2 **주안점** 문자가 두 개인 식에 수를 대입하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이 (1) $2a-4b=2\times3-4\times(-5)=6+20=26$

(2) $3ab+5=3\times3\times(-5)+5=-45+5=-40$

(3) $-2(a+3b)=-2\{3+3\times(-5)\}=-2(3-15)=24$

(4) $a^2+b^2=3^2+(-5)^2=9+25=34$

[그림 Ⅱ-7] 곱셈기호가 생략된 산술식의 예(풀이 (3))(황선욱 외, 2013b)

Ⅲ. 중위 표기법의 난점과 괄호 생략

1. 세 가지 표기법의 특징

연산기호와 관련하여 수학식을 표현하는 방법은 크게 전위 표기법(prefix, 전치 표기법), 중위 표기법(infix, 중치 표기법), 후위 표기법(postfix, 후치 표기법) 3가지가 있다. 전위 표기법은 수와 수 앞에 연산자를 표기하는 방법이고, 후위 표기법은 수와 수 뒤에 연산자를 위치시키는 방법이다. 이에 반해 현재 우리가 수학에서 사용하고 있는 표현 방법은 중위 표

기법이며, 이는 수와 수 사이 중간에 연산자를 표기하는 방법이다(Dhenakaran, 2011). 예컨대, $\times + 1,2+3,4$는 전위 표기법, $1,2+3,4+\times$는 후위 표기법, $\{(1+2)\times(3+4)\}$은 중위 표기법이다.

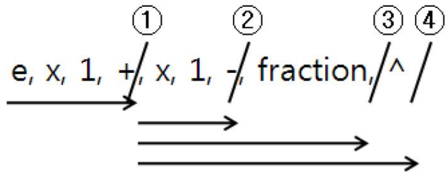
수학에서 전위 표기법은 Lukasiewicz(1878-1956)에 의해 제안되었다(miller, 2010). 전위 표기법은 실제 수학 역사에서도 나타나고 있는데, Hérigone은 두 인수의 곱을 □로 표기하여 [그림 Ⅲ-1]과 같이 곱에 대한 전위 표기법을 보여주고 있다(Cajory, 1928). 전위 표기법은 연산자가 먼저 나열된 후 수가 나오게 되므로 식의 해석이 다소 어려운 점이 있다. 이를테면, 전위 표기법 $+\times+\div 2,3,4,5,6$을 해석하기 위해서는 연산자가 어떤 두 수에 대한 것인지를 살피는 것이 필요하다.

□5+4+3, 7~3:~10, est 38

오늘날의 표기로의 변환 : $(5+4+3)\cdot(7-3)-10=38$

[그림 Ⅲ-1] Hérigone이 사용한 곱에 대한 전위 표기법(Cajory, 1928)

이후 피연산자를 먼저 위치시키고 연산자를 뒤에 위치시키는 것이 더 편리하다는 것이 발견되면서 이른바 '후위 표기법(postfix)', '역 Lukasiewicz(reverse Lukasiewicz)' 혹은 '역 폴란드 표기법(reverse Polish)'이 개발되었다. 후위 표기법은 연산자 스스로 연산 사이의 구획문자 역할을 함으로써 굳이 괄호를 필요로 하지 않는 장점을 가진다. 예컨대, $u\times(v^\wedge(w+3))/(x-y)$는 $uvw3+{}^\wedge\times xy-/$와 같이 괄호 없이 나타낼 수 있다(miller, 2010). 후위 표기법은 전위 표기법에 비해 가독성이 좋은 편이다. 이런 이유로 컴퓨터 프로그래밍은 후위 표기법을 선호하는 경향이 많다. 예컨대, 이세희 외(2009)는 후위 표기법을 이용한 수학식 색인 및 랭킹 방법을 제안하였으며, 그들은 수학식 $e^{\frac{x+1}{x-1}}$에 대한 생성 방법의 예를 [그림 Ⅲ-2]와 같이 보여주고 있다. 하지만 후위 표기법 역시 복잡한 식에 대해서는 연산자에 대한 피연산자를 찾아야 하는 번거로움으로 인해 직관적인 이해에 어려움이 따른다.



[그림 Ⅲ-2] 프로그램에 사용되는 수학식 $e^{\frac{x+1}{x-1}}$에 대한 후위 표기법(이세희 외, 2009)

반면, 중위 표기법은 연산자가 수와 수의 중간에 위치함으로써 가장 좋은 가독성을 가지게 되지만 정확한 해석을 위해서는 많은 괄호를 필요로 하게 되는 단점이 있다. 앞서 제시한 중위 표기법 $\{(1+2)\times(3+4)\}$는 전위, 후위 표기법에 비해 많은 괄호가 사용되고 있음을 알 수 있다. 물론 연산자 등장 순서대로 계산을 전제한다면 괄호를 필요로 하지 않겠지만, 그렇지 않은 경우를 가정할 경우 중위 표기법에서 괄호는 필연적이다. 이를테면, 앞서 전위 표기법으로 나타낸 $+\times+\div 2,3,4,5,6$은 $((((2\div3)+4)\times5)+6)$와 같이 중위 표기법으

로 표현될 수 있다. 여기서 연산자의 순서가 계산 순서를 의미하지 않는 상황에서 괄호를 사용하지 않는다면, 중위 표기법 $2\div3+4\times5+6$은 의미 해석에 혼란을 초래하게 될 것이다. 2와 3을 먼저 나눌 것인지 3과 4를 더할 것인지 보는 이의 관점에 따라 달라지기 때문이다. 따라서 중위 표기법은 필연적으로 다량의 괄호 발생이라는 난점을 극복하고 편의성을 추구하는 방향으로의 변화를 필요로 했으며, 그것은 곧 괄호의 생략이라는 결과로 이어지게 되었다.

2. 표기법의 발전과 괄호의 생략

15세기 중엽 독일에서 인쇄술이 발명되어 많은 고전과 외국 서적의 번역본이 대량으로 출판되면서 기호의 정비가 이루어지게 되었다. 구체적으로 13세기경 이탈리아의 Leonardo Pisano가 「7 더하기 8」을 「7 et 8」로 썼는데 라틴어 et을 줄여 '+'의 기호가 만들어졌다고 한다. 또한 1489년 독일의 Widmann이 「모자란다」는 라틴어 단어 minus의 약자 $\overline{\mathrm{m}}$에서 '-'만을 따서 쓰게 됨으로써 '-'기호가 생겨났다고 한다. 현재 쓰고 있는 '×' 기호를 처음 사용했던 사람은 영국의 Oughtred로서 이 기호는 그가 1631년에 쓴 「수학의 열쇠(Clavis Mathematicae)」라는 책에 나타난다. '÷' 기호는 오랜 옛날부터 쓰여 왔으며, 10세기경의 수학책에는 「10 나누기 5」 등과 같이 「나누기」라는 말도 함께 썼으나 후에 「나누기」란 말을 없애고 ÷로만 쓰게 되었다. 현재 우리가 사용하고 있는 기호 '÷'는 스위스의 수학자 Rahn이 1659년 쓴 「대수학(Teutsche Algebra)」에서 처음으로 나타난다(조태근 외, 2001).

이러한 연산 기호의 정비와 동시에 복잡한 산술과 대수식을 다루기 위한 괄호의 발전도 이어졌다. 16세기 초반에 괄호에 의해 표현된 식이 드물게 발견되었다고 한다. 괄호는 비교적 식자공(typesetter)들에게 자주 표현되었음에도 불구하고, 괄호가 사상이나 감정 따위를 효과적으로 표현하기 위해 사용하는 언어로 인식되어 수학적 기호로 채택되는 데에는 2세기 이상이 걸렸다(Cajory, 1928). 괄호가 본격적으로 사용된 것은 18세기 중반 이후라고 한다(교육과학기술부, 2011b).

괄호는 초창기에 괄선(vinculum)의 형태로 사용되기도 하였다. 대표적으로 Chuquet는 1484년 「Le Triparty en la Science des Nombres」에서 묶으려는 대상의 아래에 괄선을 사용하였는데, 그가 표기한 다음 [그림 Ⅲ-3]은 현대적 표기로 $\sqrt{14+\sqrt{180}}$을 나타낸 것이다(Cajory, 1928).

$$\text{℞}^2.\underline{14.\overline{p}.\text{℞}^2.180}$$

[그림 Ⅲ-3] Chuquet이 사용한 아래 괄선(Cajory, 1928)

아래에 나타낸 괄선은 위쪽에 나타나는 형태로 사용되기도 하였는데, 이는 Vieta의 수집된 저작물을 정리한 Frans van Shooten의 영향을 받은 것이다. 그는 1646년 Vieta의 편집 저작물에서 $B(D^2+BD)$를 나타내기 위해 다음의 위쪽 괄선을 사용하였다(Cajory, 1928).

$$B\text{ in }\overline{D\text{ quad.}+B\text{ in }D}$$

[그림 Ⅲ-4] Frans van Shooten이 사용한 위쪽 괄선(Cajory, 1928)

이렇게 식을 묶는 표기는 글자로 표현되기도 하였는데, Paciolo가 1494년과 1523년 「Summa」에서 'v'의 글자를 사용하였다고 한다. 이러한 표기법은 점차 괄호의 사용으로 변형되어 갔으며(Cajory, 1928), 구체적으로 괄호 ( )는 1556년 이탈리아의 Tartaglia의 책 「General Trattato di Numeri et Misure」에서 처음으로 나타나며, [ ]는 1550년경 Bombelli의 책 「Algebra」에서 나타났다. 한편, 괄호 { }는 1593년 Viète의 책 「Zetetica」에서 나타났다(조태근 외, 2001). 이러한 괄호는 여러 가지 표현으로 변천을 거듭하다가[3], 18세기 초반 Leibniz가 프랑스의 학술지 「Acta eruditorum」에서 현재의 의미의 괄호 기호를 사용하였다고 한다(Cajory, 1928). 이러한 괄호는 다름 아닌 연산의 순서를 결정짓는 역할을 하였다.

직관적 이해가 용이한 중위 표기법의 선택은 다량의 괄호 발생이라는 난점을 낳았다. 이를테면, 중위 표기법에서 분배법칙을 표현하는 $(a)\times\{(b)+(c)\}=\{(a)\times(b)\}+\{(a)\times(c)\}$은 많은 괄호로 인해 번잡해진다. 또한 식들 사이의 구분을 용이하게 하기 위한 괄호 역시 표기를 번잡하게 만드는 요인이 되었다. 따라서 이러한 난점을 극복하기 위한 노력이 시도되었으며, 식의 구분을 위한 괄호 생략 규칙의 발생이 대표적인 예라고 할 수 있다.

식의 계산은 언어체계로서 대상 기호(변수, 상수), 연산 기호, 괄호 등 세 종류의 기호에 의해 구사된다. 여기서 대상 기호를 괄호에 묶은 것이 곧 식이다. A, B를 식이라고 하면 $(+A)$, $(-A)$, $(A+B)$, $(A-B)$, $(A\bullet B)$는 모두 식이다(곽홍찬, 1986). 이와 같이 괄호에 의한 식의 구분은 연산자와 부호의 구분을 용이하게 하는 측면이 있다. 이를테면, $(2)-(-3)$에서 앞서 나오는 '-'는 연산자이며, 뒤에 나오는 '-'는 부호에 해당한다. 이처럼 식의 구분을 위해 사용된 괄호는 연산자와 부호의 경계를 명확히 했다[4].

하지만 실제로 그러한 식의 구성 규칙을 충분히 적용하여 만들어진 식은 아주 번잡한 괄호를 동반하게 된다. 예를 들어, $(((2)\bullet(x))-((((-(3))\bullet(y))+(4))\bullet(-(z))))$는 보통의 식을 쓰는 방법으로는 $2x-(-3y+4)(-z)$로 된다. 이와 같은 번잡한 괄호가 필요하게 되는 이유는 식을 명확하게 하기 위한 것이지만, 그 복잡성 때문에 다음과 같은 식 구성 단축 규칙이 사용되는 것이다(곽홍찬, 1986).

곧 괄호 생략의 규칙으로써, 다음이 제안되고 있다.

· 제일 밖의 괄호는 생략한다.
· 단일 대상 기호를 둘러 싼 괄호는 생략한다.
· 바로 앞에 연산 기호가 없을 때는 $(-A)$의 괄호를 생략한다.
· 항을 둘러싸는 괄호는 생략한다.
· $((A+B)+C)=(A+B+C)$, $((A\bullet B)\bullet C)=(A\bullet B\bullet C)$ 등이 사용되고, 곱셈 기호생략 규칙으로써 수와 수 사이에 있는 곱셈기호 외의 곱셈기호는 전부 생략한다는 규칙이 적용되고 있다(곽홍찬, 1986 재인용).

---

3) Blassière가 1770년에 $(2a+5b)(3a-4b)$, $(2a+5b)\times(3a-4b)$, $\overline{2a+5b}\times\overline{3a-4b}$라는 세 가지 표현을 설명했다고 한다(Cajory, 1928).

4) 기호를 과다하게 사용할 경우 괄호에도 불구하고 이러한 구분이 명확하지 않은 경우가 발생할 수 있다. 이를테면, $(-3)-(-(-5))$인 식에는 '-'가 4번 등장한다. 처음 (-3)의 '-'와 마지막의 (-5)의 '-'는 모두 음수를 나타내는 기호인 것은 쉽게 안다. 두 번째의 '-'는 뺄셈을 나타내는 연산 기호이다. 그렇지만 세 번째의 '-'는 어떤가? 이것은 「$a=-5$일 때 $-a$를 구하여라」에 사용되는 '-'이고 이것은 a의 덧셈에 대한 역원이다. 이처럼 동일한 기호 '-'가 여러 가지 의미로 사용되는 것을 이충걸(1981)은 '기호의 남용'이라고 지적하며, 적어도 학교수학에서는 이런 남용을 피할 것을 권고하였다.

이외에도 식 구성 단축 규칙에는 덧셈과 음의 부호가 겹칠 경우 빼기 연산자를 통해 간단히 나타내는 규약이 만들어졌으며, 이는 곧 괄호의 생략으로 이어졌다. $2+(-3)$은 이 규약을 통해 괄호 없이 $2-3$로 간단히 표기된다. 물론 이러한 표기법의 발전은 학습자에게 연산자와 부호의 구별을 어렵게 하는 요인이 되기도 하였지만, 결과적으로 수학적 표기를 간략하게 함으로써 직관적 이해를 높이는 계기가 되었다.

식 구성 단축 규칙의 사용만으로 중위 표기법의 난점을 극복하기에는 여전히 복잡한 식이 자리 잡고 있다. 예컨대, 연산의 계산 순서가 지정되지 않은 이차방정식은 $\{(-2)\times(x\times x)\}+(2\times x)-3$과 같이 괄호를 동반할 수밖에 없다. 하지만 직관적 이해를 돕기 위해서는 가능한 적은 괄호를 사용한 다항식을 써야 했다. 이러한 난점은 자연스럽게 연산 계산 순서 규칙을 낳게 한 원동력으로 생각된다.

곱셈이 덧셈과 뺄셈보다 앞선다는 관습은 16세기 즈음 기호 대수를 도입한 책에서 나타나고 있으며, 그것은 괄호를 생략할 수 있는 토대가 되었다. 다시 말해, $2\times x+3\times y$라는 표기는 곱셈이 덧셈보다 앞선다는 연산 계산 순서 규칙에 의한 괄호 생략의 결과로 해석할 수 있다. 또한 거듭제곱이 곱셈에 앞선다는 관습 역시 거듭제곱이 나타나는 초기의 책들에서 보이고 있다(Miller, 2010). 거듭제곱의 표기는 문자의 수를 작게 하는 점에서 항의 구조를 보다 직관적으로 나타내는 표기로서 전형적인 단축효과를 나타내는 기호이다(곽홍찬, 1986). 이처럼 연산 계산 순서 규칙과 거듭제곱 표기는 괄호 생략의 토대가 되었으며, 오늘날 우리는 복잡한 괄호를 필요로 하는 $2x^4+3xy^2+4x$와 같은 다항식을 간단히 나타낼 수 있게 되었다.

한편, 연산 기호의 생략 역시 괄호의 생략을 야기하게 된다. 연산 기호는 더욱 직관적인 형태로의 변형을 위해 단축형으로의 변형, 곧 생략으로 이어지게 되며, 병렬에 의한 곱셈 기호 생략 규칙이 만들어지게 된다. 병렬에 의한 곱셈의 생략은 인도의 Bakhshali 마을 근처에 매장된 문헌에서 8, 9, 10세기에 나타나고 있고, 15세기 문헌에서 al-Qalasadi에 의해 사용되기도 하였다(Cajory, 1928). 이러한 연산 기호의 생략 역시 괄호를 생략할 수 있는 토대가 되었다. 중학교 2학년 교과서(황선욱 외, 2013c)에 등장하는 $21x^3y^3\div\frac{7}{3}xy^5$은 곱셈의 생략에 의한 괄호 생략의 결과로 해석할 수 있다. 만약 곱셈 생략 규칙이 존재하지 않는다면, 위 식은 $(21\times x\times x\times x\times y\times y\times y)\div(\frac{7}{3}\times x\times y\times y\times y\times y\times y)$로 괄호 생략 없이 표기되었어야 한다. 나눗셈 연산을 생략한 분수 표현 역시 괄호 생략을 가능하게 한다. 분수식 $\frac{2+3y}{2x+z}$은 사실 분모와 분자의 괄호 생략을 가능하게 한 원동력이다.

현재 우리가 사용하는 많은 식은 괄호가 생략된 표현이다. 사실 정확한 식의 표현을 위해서는 많은 괄호가 필요한데, 괄호로 인해 식이 너무 복잡하게 됨으로써 식에 대한 이해를 어렵게 하는 난점이 발생했다. 따라서 수학자들은 괄호의 생략을 통해 중위 표기법의 난점을 극복하기 위해 몸부림 쳐 왔다. 표기에 대한 다양한 규칙이 생성되었고, 그것은 괄호의 생략을 야기하게 되었다. 표기에 대한 직관적 이해를 돕기 위해 식 구성 단축 규칙, 연산 계산 순서 규칙, 거듭제곱 표현, 연산 기호의 생략 등의 규칙이 만들어졌으며, 이는 곧 괄호 생략의 결과로 이어지게 된 것이다. 표기의 복잡성을 해소하고 직관적 이해를 고양시키기 위한 괄호 생략의 역사적 의미를 볼 때, 연산 생략 속에 자연스럽게 괄호 생략이 수반되는 것 역시 자연스런 표기 발전의 과정으로 볼 수 있을 것이다. 그렇지만 연산의 생략 속에 괄

호 생략이 수반되는지에 대한 명시적 규약은 찾기 어려우며, 대수에서 예시적 근거만을 찾을 수 있었다.

때문에 복잡성을 해소할 목적으로 도입된 괄호 생략은 서론에서 언급한 식 '48÷2(9+3)'에 대한 해석의 논란을 야기하였던 것이다. 다시 말해, 곱셈과 나눗셈이 포함된 식에서 곱셈만이 생략된 경우에 대한 혼란이 불가피한 것이다. 따라서 식의 간략화라는 괄호 생략의 의도와 이점을 충분히 살려가기 위해서는 무엇보다 괄호 생략을 해석할 수 있는 수학적 근거를 마련할 필요가 있으며, 다음 장에서는 그 근거를 제안하고자 한다.

Ⅳ. 괄호 생략에 대한 함수의 이미지 관점

수학의 표기에서 항이 2개이거나 하나의 연산자를 가진 단순 연산에서는 괄호의 생략이 문제시 되지 않는다. 반면 항이 3개 이상이고 서로 다른 연산자를 가지는 복합 연산일 경우에는 괄호의 생략은 논쟁의 대상이 되어 왔다.

1892년 Bailey는 「Mental arithmetic」에서 ÷과 × 모두가 포함된 표현을 피하라고 조언하였다. 또한 Fisherdhk Schwatt는 1898년 「Text-book of algebra」에서 $a\div b\times b$는 $(a\div b)\times b$로서 이해되어야 한다고 주장하였다. 1907년 Slaught와 Lennes은 「Hight school algebra」에서 어떤 순서에서도 곱셈이 먼저 수행되어야 하고, 그리고 나서 나눗셈이 왼쪽에서부터 오른쪽으로 수행되어야 한다고 주장하였다. 이러한 관점에서 $a\div b\times b$은 $a\div(b\times b)$로 해석되어야 한다. 또한 1910년 Hawkers, Luby와 Touton의 「First course of algebra」에서 ÷와 ×은 등장하는 순서대로 수행되어야 한다고 주장하였다. 1917년 "The report of the committee on the teaching of arithmetic in public shcools" Mathematical Gazette 8호는 이 같은 모호성을 극복하기 위하여 괄호의 사용을 추천하기도 하였다(Miller, 2010).

이러한 논쟁은 ÷과 × 두 연산자가 포함된 경우에 대한 충분한 근거가 존재하지 않기 때문에 빚어진 현상이다. 실제로 Cajori(1928)는 '만약 산술과 대수 용어가 ÷과 ×을 포함하고 있다면, 현재까지 어느 기호를 먼저 사용해야 하는지에 대한 합의가 없다'고 말한다.

그렇지만 현대의 많은 교과서들은 모든 곱셈과 나눗셈이 왼쪽에서부터 오른쪽의 순서로 차례대로 수행되어야 한다는데 동의하는 것처럼 보인다. 하지만 2011년 Hall에 의해 출판된 「Florida algebra」에서 주어진 변수의 값에 대해 평가할 목적으로 $3st^2\div st+6$이 제공되었고, st에 의해 나누어지는 것으로부터 정답이 제공되었다. 하지만 표현의 모호성으로 인해 그 다음 인쇄본에서는 (st)를 사용하기로 하였다(Miller, 2010).

그렇다면 $3x\div 2y$는 $\dfrac{3x}{2y}$인가? 아니면 $\dfrac{3xy}{2}$인가? 이것은 $3x\div 2y$을 $(3\times x)\div(2\times y)$로 해석하는가 아니면 $3\times x\div 2\times y$로 해석하는가에 따라 결정되는 문제이다. 현재의 표기법에 따르면 전자와 같이 해석해야 적합한 번역이며, 이러한 관점에서 표기법 $3x\div 2y$에는 괄호의 생략이 발생하였음을 알 수 있다. 그렇다면 이와 같은 괄호의 생략은 어떠한 관점에서 진행될 수 있었을까? 이 물음에 답하기 위해서는 곱셈과 나눗셈 연산의 본질적 의미를 되짚어 볼 필요가 있다.

곱셈은 이항연산(binary operation)으로 $\times:\mathrm{R}\times\mathrm{R}\to\mathrm{R}$인 함수이며 $\times(a,b)=a\times b$와 같

이 표기된다. 반면 나눗셈은 단항연산(unary operation)으로 $\div : \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R}$인 함수이며 $\div(a) = \dfrac{1}{a}$로 표기된다.[5] 다시 말해 나눗셈은 곱셈에 대한 역원으로 대응되는 단항연산이다. 이러한 함수로서의 연산의 관점에서 $a \div b$는 사실 $a \times (\div b)$를 줄여 나타낸 것이다. 따라서 $a \div b = a \times (\div b)$이며 이것은 $a \div b = a \times (\div b) = a \times (\dfrac{1}{b})$로 나타낼 수 있다.

그렇다면 곱셈기호가 생략되었다는 것은 무엇을 의미하는가? 함수 기호 '×'가 생략되었다는 것은 함수의 이미지, 즉 함숫값을 의미한다고 볼 수 있다. 현 수학의 표기에서 $3x \div 2y$는 $(3 \times x) \div (2 \times y)$로 해석되며, 이와 같은 해석이 가능하기 위해서는 연산 기호의 생략은 곧 함수의 이미지라는 관점이 필요한 것이다.

이 관점은 Gray & Tall(1994)의 Procept 개념에서도 분석해 볼 수 있다. Gray & Tall(1994)은 'symbol'이 '사고해야 할 과정(process)'과 '사고 대상으로서의 개념(concept)' 두 가지 의미를 모두 가지고 있다는 점에서 그 결합의 의미를 process와 concept의 합성어인 procept로써 드러내고자 하였다. 예컨대, $2+3x$는 2, 그리고 3과 x의 곱을 더하는 과정으로 여겨질 수 있고, 동시에 그것은 그 과정의 결과로서의 대상으로 취급할 수 있다. 이 관점에서 함수 기호 '×'의 생략을 살펴보면, 함숫값을 의미하는 '함수의 이미지' 관점은 process보다 concept에 가까운 개념으로 볼 수 있다. 다시 말해, $2+3x$에서 함수 기호 '×'가 생략된 $3x$를 하나의 대상인 concept로 간주하라는 의미에 가깝다.

'함수의 이미지' 관점에서 $a \times b \times c$의 연산을 살펴보면 $a \times b$를 우선 사상(mapping)하고 그 함숫값과 c를 다시 사상(mapping)하는 연산으로 해석 가능하다. 그러므로 $a \times b \times c = (a \times b) \times c$로 연산해야 하며, 곱셈기호를 생략하는 경우 순서대로 나타내 보면 위식은 $ab \times c$이었다가 abc가 된다. 함수의 입장에서는 절대 $a \times bc$로 연산될 수는 없다. 결합법칙과 교환법칙이 성립하므로 $ab \times c$와 $a \times bc$이 같아지는 것이지 순수한 함수의 입장에서는 다른 것으로 간주해야 한다.

그렇다면 $a \div b \div c$는 어떨까? $a \div b \div c$는 $a \times (\div b) \times (\div c)$을 줄여 나타낸 것이고 이것은 다시 나눗셈 함수에 의해 $a \times (\dfrac{1}{b}) \times (\div c)$로 고쳐지고 난후 곱셈 연산이 수행된다. 그러므로 곱셈기호를 생략하여 나타내면 $\dfrac{a}{b} \times (\div c)$이었다가 $\dfrac{a}{b} \times (\dfrac{1}{c})$이므로 $\dfrac{a}{bc}$가 되는 것이다. 또 $a \div b \times c$와 $a \times b \div c$의 경우는 각각 $a \times (\dfrac{1}{b}) \times c$와 $a \times b \times \dfrac{1}{c}$가 우선 수행되고 그런 다음 $(a \times (\dfrac{1}{b})) \times c$, $(a \times b) \times \dfrac{1}{c}$이 각각 수행된다. 여기서 주목할 것은 $a \times (\div b)$를 계산하기 위해서는 이항연산인 곱셈을 수행하기 전에 우선 단항연산인 나눗셈을 먼저 수행해야 한다는 점이다.

위 문제 $3x \div 2y$를 $3 \times x \div 2 \times y$로 생각하게 되면, $3 \times x \div 2 \times y = 3 \times x \times (\div 2) \times y$로 먼저 $3 \times x$를 계산 후 나눗셈 함수가 작동되게 된다. 그러므로 위식을 계산 순서대로 적어보면 $((3 \times x) \times (\dfrac{1}{2})) \times y$이다. 이렇게 되면 $2y$의 값을 가질 수 없게 된다. 즉 2와 y사이의 함수기

---

5) $\div$는 단항 연산이므로 두 항으로 표현 하지 않는다. $a-b=a+(-b)$와 같은 이유이다.

호 ×는 절대 생략될 수 없다. 다만 $\dfrac{1}{2}$와 y사이의 ×는 생략될 수 있다.

그러나 문제에는 $2y$의 값이 주어져 있다는 것이다. 이것은 $2\times y$의 함수가 작동 되었다는 것을 의미한다. 다시 말해, 곱셈이 생략됨으로써 2와 y에 대한 함수의 이미지라는 자격을 부여받게 된 것이다. 그러므로 결국 이것은 2 앞의 나눗셈보다 $2\times y$를 먼저 계산했다는 것으로 해석이 가능하게 되는 것이다. 또 $2\times y$를 먼저 계산했다는 것은 결국 괄호가 생략되어도 무방하다는 해석이 가능하게 된다. 그러므로 $3x\div 2y$은 '연산의 생략은 곧 함수의 이미지라는 관점'에서 $\times(3,x)\div\times(2,y)$이므로 현재의 번역 $(3\times x)\div(2\times y)$와 일치하는 해석을 할 수 있게 되는 것이다.

연산의 생략은 곧 함수의 이미지라는 관점은 괄호의 생략을 가능하게 하는 도구임을 알 수 있으며, 보다 나은 직관적 이해를 돕기 위해 괄호 생략을 추구해 온 수학 표기법의 발전을 해석할 수 있는 하나의 관점이 됨을 알 수 있다. 이 관점에서 식 $a\div bc$의 bc를 단순히 $b\times c$로 보는 것은 잘못된 것이며, 곱셈 연산의 이미지 $(b\times c)$로서 취급하는 것이 적절하다. 다시 말해 bc는 a와 대등한 연산 대상으로 간주되어야 하는 것이다. 이처럼 이 관점은 현행의 표기법을 적절하게 해석할 수 있는 한 관점으로, 중위 표기법의 단점인 과다한 괄호의 발생이라는 문제점 극복을 위한 수학자들의 노력의 산물을 적절히 해석할 수 있는 도구가 된다.

Ⅴ. 식 표기와 관련한 교육적 시사점

본 연구는 식 '48÷2(9+3)'의 해석에 대한 근거를 마련하는 것이 주요 연구 문제이다. 이를 위해 먼저, 식 표기법과 관련한 초등학교와 중학교 교과서와 교사용지도서를 분석함으로써, 두 가지의 대립된 해석이 발생한 원인이 무엇인지를 교수학적 관점에서 살펴보았다. 그 결과, 초등학교 교과서에서는 ×은 생략되었지만 ÷은 생략되지 않은 경우를 해석할 명시적 규정을 찾을 수 없었으며, 중학교 교과서에서는 이 경우에 대한 예시적 근거를 찾을 수 있었다. 다시 말해, 이러한 혼란은 산술을 대표하는 초등학교 교과서와 대수를 대표하는 중학교 교과서의 근거 사이의 괴리에서 비롯된 것임을 확인할 수 있었다.

다음 표기법 발달과정과 괄호 사용의 경위를 밝혀봄으로써 괄호 생략이 갖는 역사적 의미를 조명해 보았다. 괄호 생략은 중위 표기법으로 인해 불가피하게 발생하는 식의 복잡성을 해소하기 위한 노력의 일환으로 식 구성 단축 규칙, 연산 계산 규칙 순서, 거듭제곱 표현 등의 형태로 나타났다.

이러한 괄호 생략의 의도와 이점을 살려가기 위해서는 혼란을 야기하는 표현을 종식시킬 수 있는 해석의 근거를 마련할 필요가 있으며, 본 연구에서는 그 근거로 연산 기호의 생략은 곧 함수의 이미지라는 관점을 제안하였다. 이 관점은 현재의 대수에서의 관행적 표현을 적절하게 해석할 수 있는 한 관점이었다. 이러한 고찰로부터 표기법과 관련한 몇 가지 교육적 시사점을 제공하는 것으로 본 연구를 끝맺고자 한다.

오늘날 우리가 사용하는 수학 표기는 효율적인 표기를 갈구한 여러 수학자들의 노력의 산물이다. 그렇지만 이러한 수학적 표기는 관련 맥락 속에서 다루어지기보다 단순히 약속으로 도입되고 있다. 단지 초등학교 교과서에서 '학생들의 합의'의 기회를 제공하는 것에 그치고 있을 뿐이며, 이는 역사발생적 수학 학습-지도 원리[6]에 비추어 볼 때 바람직하지 못한 현상이다.

앞에서 살펴본 바와 같이 식 표기는 초등에서는 '학생들의 합의'를 강조한 이해의 대상으로 취급하는 반면, 중등에서는 단순한 암기의 대상으로 다루고 있다. 또한 초·중등 모두에서 곱셈 기호의 생략이 발생한 상황 맥락이 전혀 제공되지 않는 문제점을 확인할 수 있었다. 이에 본 연구에서는 수학적 표기를 상황 맥락이 풍부한 이해의 대상으로 승격시키기 위한 네 가지 교육적 시사점을 제안한다.

첫째, 역사 발생적 원리에 따른 수학적 표기 지도 방안이 모색될 필요가 있다. 수학적 표기 지도의 대다수는 이미 정해진 규칙을 배우고 난 뒤, 그와 관련된 문제 해결을 학습하는 것이 일반적이다. 이러한 지도는 수학을 만들어진 학문 또는 이미 완결된 학문으로 인식하게 만들 가능성을 지닌다. 하지만 수학은 어느 날 갑자기 만들어진 것이 아니며 현재에도 완결된 것이 아니다. 따라서 수학의 발생적 원리를 통해 현재 진행의 수학으로 인식할 수 있도록 도아야 할 것이다.

이를 위해 다음의 두 가지 활동을 제안한다. 먼저 기호를 새롭게 만들어 보게 하는 활동이다. 연산 기호나 괄호를 새롭게 만들어 보는 작업을 통해 그 기호에 대한 개념 모델 형성을 도울 수 있다. 예를 들면, 덧셈의 기호 표기를 고안하는 과정에서 '첨가'라는 인간의 활동을 생각하고 기호화 하면서 덧셈에 대한 개념모델이 자연스럽게 형성될 수 있다. 마찬가지로 괄호 기호 역시 개발의 기회를 제공한다면 그 고안 과정에서 '우선순위의 결정'이라는 인간의 활동을 생각하고 그것을 기호화하면서 괄호에 대한 개념 모델이 자연스럽게 형성될 수 있을 것이다.

다음은 식의 표기 규칙을 새롭게 만들어 보게 하는 활동을 독려하는 것이다. 곱셈과 나눗셈 기호가 함께 들어 있는 식에서 곱셈과 나눗셈의 생략은 반드시 동시에 이루어져야 한다거나 나눗셈은 항상 분수로 표현해야 한다는 규칙을 학생이 만들었다고 생각해보자. 그때 학생들에게 그 규칙에는 어떤 장·단점이 있는지를 알아보게 하는 활동이 이루어진다면, 표기 규칙은 단순한 약속이라는 생각에서 벗어나 이해의 대상으로 승격이 이루어지게 될 것이다.

둘째, 중위 표기법이 선택된 맥락을 이해하고, 중위 표기법의 난점을 극복하기 위한 수학자들의 노력을 학습자에게 재현시킬 필요가 있다. 이를 위해 먼저, 전위, 중위, 후위 표기법에 대한 비교의 기회를 제공해야 할 것이다. 이는 중위 표기법에 사로잡힌 사고 고착을 탈피하고, 중위 표기법의 장점을 인식하는 계기가 될 것이다. 비교는 초등에서 항이 2개인 경우부터 다루고, 점차 중등으로 나아가면서 항이 3개 이상인 복합적인 것을 다룸으로써, 지속적으로 중위 표기법의 장점을 인식시킬 필요가 있다.

다음으로 다량의 괄호 발생이라는 중위 표기법의 단점을 인식하고, 이를 극복하는 방안에 대한 숙고의 기회가 제공될 필요가 있다. 이를테면, '산술식 $2\div3+4\times5+6$에서 2와 3을 나누고, 4와 5를 곱하여 그 결과를 차례대로 더하려면 어떻게 식을 표기해야 할까?'와 같은 물음을 통해 중위 표기법에서 괄호는 필연적임을 인식시킬 필요가 있다. 물론 이때 괄호의 역사에서 나타난 괄선과 같은 형태의 표기가 제안될 수 있으며, 다양한 표기 생성을 허용하는 교수·학습이 이루어져야 할 것이다. 동시에 이를 극복할 수 있는 방안에 대해 학생들이 생각하고 토론할 기회를 제공함으로써, 스스로 연산에 관한 몇 가지 규칙을 만들 기회가 제공되어야 할 것이다. 이를 통해 괄호 생략을 위해 곱셈과 나눗셈이 덧셈과 뺄셈보다 먼저

6) 수학교육의 주요 문제는 수학을 산물로서 보고 최종적으로 다듬어진 개념과 정리만을 논리적인 전개 순서에 따라 연역적인 전개 방식으로 가르치는 데에서 비롯되며, 따라서 수학을 과정으로 보고 수학의 발생 과정을 학습-지도에 반영할 것을 주장하는 역사발생적 수학 학습-지도 원리가 Clairaut, Cajori, Smith, Klein, Branford, Toeplitz 등 여러 학자에 의해 주장되고 있다(우정호·민세영, 2002).

수행되어야 한다는 규칙의 필요성을 인식할 수 있도록 도와야 할 것이다.

셋째, 많은 것이 생략된 식에 대한 이해를 고양할 목적으로 연산자를 포함한 생략된 괄호를 모두 찾아 근본 식을 파악하는 활동이 필요하다. 현재의 교과서 문제는 주어진 대수식을 간략한 형태로 나타내는 문제가 주류를 이룬다. 예컨대, 현 교과서에는 '$-3\times(x-2)\div y$를 간단히 나타내어라'와 같은 문제가 대다수이다. 그런데 이와 같은 문제만을 다루게 되면, 기호가 생략되지 않은 경우에 대해 어려움을 가질 수 있다. 이민정 외(2012)에 따르면, $y=2x+1$에서 $x=-2$일 때 y의 값을 구하는 문제에서 일부 학생들이 x의 값에 -2를 대입하여 $y=2-2+1$와 같이 구하는 것을 발견했다. 그들은 이와 같은 학생 오류는 학생들이 완성된 수학 기호 형태로 곱셈과 괄호 기호를 배우고 있기 때문이라고 지적하였다. 또한 '학습 부진'을 보이지 않는 학생들의 경우에는 문자가 수를 대표하는 것이라고 이해를 하고 있으며, 기호가 생략되어도 큰 어려움을 가지지 않았지만, 오히려 곱셈과 괄호 기호를 생략하지 않았을 때 더 혼란스러워 하였다고 지적하였다. 이러한 주장을 고려할 때, '간단히 하여라'로 대표되는 교과서 문제의 역의 성격을 갖는 '생략된 기호를 모두 적어라'와 같은 문제 제시가 필요하다고 생각된다.

넷째, 서론에서 논란이 된 산술식의 해석에 대한 혼란 예방을 위해 곱셈이 생략된 경우는 함수의 이미지로서 간주되어야 한다는 원칙을 명시할 것을 제안한다. 함수의 이미지로서 간주된다는 것은 곱셈의 생략이 곧 괄호의 생략까지 동반된 형태로 보아야 한다는 의미를 지닌다. 이를테면, $a\div bc$에서 bc는 $b\times c$가 아니라 곱셈 연산의 이미지 $(b\times c)$로서 간주되며, 결국 bc는 a와 대등한 연산 대상으로 취급되어야 하는 것을 의미한다. 반면, $a\div b\times c$에서 a, b, c은 제각각 대등한 연산 대상으로 간주됨으로써 $a\div bc$과 $a\div b\times c$은 명백하게 구분된다. 따라서 이러한 차이를 명백히 하기 위한 목적으로 교과서에 곱셈이 생략된 형태를 해석할 수 있는 근거를 명시할 필요가 있으며, 본 연구에서는 '곱셈의 생략은 함수의 이미지'라는 관점을 교사용지도서에 명시하여 교육적으로 활용할 것을 제안한다.

본 연구에서 제안한 시사점은 학습자에게 적용하여 그 효과를 확인하지 않은 제안이라는 한계를 지닌다. 오히려 제시한 방안이 학생들에게 식 계산에 대한 거부감을 줄 수도 있을 것이다. 이러한 한계에도 불구하고 수학사적으로 인류의 편의를 위해 식의 표기에 관한 약속과 규범을 만들어져왔듯, 학생들 역시 식의 구성과 표현 활동 속에서 논의와 합의 과정을 통해 스스로 가장 합리적이고 편리한 표준(norm)을 형성해 가는 활동이 장려되어야 할 것이다. 따라서 이러한 제안을 구체화하여 그 효과와 한계를 확인하는 후속 연구가 이루어질 필요가 있다.

참고 문헌

교육과학기술부 (2011a). **초등학교 수학 4-1**. 서울: 두산동아.

교육과학기술부 (2011b). **초등학교 수학 4-1** 교사용지도서. 서울: 두산동아.

교육과학기술부 (2013). **수학 1~2학년군 수학 1 교사용지도서**. 서울: 천재교육.

곽홍찬 (1986). **수학적 표기에 대한 교육적 연구**. 서울대학교 박사학위논문.

도종훈·허선희 (2010). 곱셈과 나눗셈 기호의 생략 규칙 학습을 위한 카드 게임의 고안과 활용. **한국학교수학회논문집, 13**(3), 345-356.

박응서 (2011). 인터넷을 뜨겁게 달군 수식 '48÷2(9+3)' 종결자! 정답은 -288- 아니면 '2' ?. 서울: 인터넷과학신문 더사이언스.

신항균 외 6명 (2013a). **중학교 수학 1**. 서울: 지학사.

신항균 외 6명 (2013b). **중학교 수학 1** 교사용지도서. 서울: 지학사.

신항균 외 6명 (2013c). **중학교 수학 2**. 서울: 지학사.

신항균 외 6명 (2013d). **중학교 수학 2** 교사용지도서. 서울: 지학사.

우정호·민세영 (2002). 역사발생적 수학 학습-지도 원리에 관한 연구. **수학교육학연구, 12**(3), 409-424.

이강섭 외 10명 (2013a). **중학교 수학 1**. 서울: 미래엔.

이강섭 외 10명 (2013b). **중학교 수학 1 교사용지도서**. 서울: 미래엔.

이강섭 외 10명 (2013c). **중학교 수학 2**. 서울: 미래엔.

이강섭 외 10명 (2013d). **중학교 수학 2 교사용지도서**. 서울: 미래엔.

이민정·이양·양성필·박미숙 (2012). 곱셈과 괄호 기호의 사용에 대한 연구. **한국학교수학회논문집, 15**(4), 627-641.

이세희·신준수·김학수 (2009). 후위 표기법을 사용한 수학식 색인 및 랭킹. 한국정보과학회 언어공학연구회: 학술대회논문집(한글 및 국어정보처리), **한국정보과학언어공학연구회 2009년도 제 21회 한글 및 한국어 정보처리 학술대회**. 160-164.

이충결 (1981). **신수학교육**. 서울: 신한출판사.

정기근·김민정·노은환 (2007). 자연수 혼합계산에서 처방 프로그램의 개발·적용에 대한 효과 분석. **한국학교수학회논문집, 10**(4), 471-485.

조태근 외 4명 (2001) **수학 7-가 교사용지도서**. 서울: 금성출판사.

엔하위키 미러 (2015). **https://mirror.enha.kr/wiki/48%C3%B72(9+3)**에서 검색

황선욱 외 8명 (2013a). **중학교 수학 1**. 서울: 좋은책 신사고.

황선욱 외 8명 (2013b). **중학교 수학 1 교사용지도서**. 서울: 좋은책 신사고.

황선욱 외 8명 (2013c). **중학교 수학 2**. 서울: 좋은책 신사고.

황선욱 외 8명 (2013d). **중학교 수학 2** 교사용지도서. 서울: 좋은책 신사고.

Cajory, F. (1928). *A history of mathematical notations (Volume 1 & 2)*. La salle, IL: The Open Court.

Dhenakaran, S. S. (2011). Mathematical functions for muddling and simplifying text message. *International Journal of Computer Science and Technology, 2*(1), 182-184.

Miller, J. (2010). Earliest uses of symbols of operation. http://jeff560.tripod.com/operation.html

A Study on the mathematical notation of expression in terms of skipping the parenthesis[7)]

Kim, Chang Su[8)] · Kang, Jeong Gi[9)]

Abstract

This study investigated the mathematical notation used today in terms of skip ping the parenthesis. At first we have studied the elementary and secondary cur riculum content related to omitted rules. As a result, it is difficult to find explici t evidence to answer that question 'What is the calculation of the 48÷2(9+3)?'. I n order to inquire the notation fundamentally, we checked the characteristics on prefix, infix and postfix, and looked into the advantages and disadvantages on i nfix. At the same time we illuminated the development of mathematical notation from the point of view of skipping the parenthesis. From this investigation, we could check that this interpretation was smooth in the point of view that skippi ng the parentheses are the image of the function. Through this we proposed so me teaching methods including 'teaching mathematical notation based on historic genetic principle', 'reproduction of efforts to overcome the disadvantages of infix and understand the context to choose infix', 'finding the omitted parentheses to identify the fundamental formula' and 'specifying the viewpoint that skipping th e multiplication notation can be considered as an image of the function'.

Key Words : skipping the parenthesis, mathematical notation of expression, infix, image of the function

Received October 17, 2015
Revised February 23, 2016
Accepted March 25, 2016

* 2010 Mathematics Subject Classification : 97-03, 97U20
8) The middle school Affiliated with G.S.N.U. (cupncap@gmail.com)
9) Jinyeong Middle School (jeonggikang@gmail.com), Corresponding Author