

<학술논문>

DOI <http://dx.doi.org/10.3795/KSME-A.2016.40.4.381>

ISSN 1226-4873(Print)

2288-5226(Online)

생브낭 원리를 이용한 고전 보 이론의 고유진동수 및 좌굴하중 예측 개선

정 용 민* · 김 준 식**

* 금오공과대학교 기계시스템공학과

Improvement of Euler-Bernoulli Beam Theory for Free Vibration and Buckling Analyses via Saint-Venant's Principle

Yong-Min Jeong* and Jun-Sik Kim**

* Dept. of Mechanical System Engineering, Kumoh Nat'l Institute of Technology

(Received January 27, 2016 ; Revised February 10, 2016 ; Accepted February 13, 2016)

Key Words: Saint-Venant's Principle(생브낭의 원리), Free Vibration Analysis(자유진동해석), Buckling Analysis(좌굴해석)

초록: 본 논문에서는 생브낭의 원리가 근본적으로 구조물의 거동 예측에 잠재적으로 적용되어 있다는 점에 착안하여, 응력해석에 국한되어 있던 방법론을 자유진동 및 좌굴 문제 등에 적용하여 고전 보 이론의 정확도를 고차이론 수준으로 개선한다. 먼저 생브낭의 원리를 소개하고, 고전 보 이론에 의한 자유진동 그리고 좌굴해석 정식화를 진행하였다. 고전 보 이론의 변위장에 워핑함수와 섭동항을 추가하고, 합응력 증가(즉, 생브낭의 원리)를 적용하여 섭동항을 찾는다. 여기서 워핑함수들은 응력 평형방정식을 통하여 계산하였으며, 이 워핑함수들은 추가된 섭동항에 의하여 보의 응력 평형을 만족하게 된다. 제안된 방법론을 외팔보와 단순지지 보 문제에 적용하여 주파수 및 좌굴하중을 개선하였으며, 전단수정계수의 도입 없이 예측을 개선할 수 있음을 보였다.

Abstract: In this paper, the methodology applied to the improvement of stress analyses is extended to free vibration and buckling analyses. The essence of the methodology is the Saint-Venant's principle that is applicable to beam and plate models. The principle allows one to dimensionally reduce three-dimensional elasticity problems. Thus the methodology can be employed to vibration and buckling as well as stress analysis. First, the principle is briefly revisited, and then the formations of classical beam theories are presented. To improve the predictions, the perturbed terms (unknowns) are introduced together with the warping functions that are calculated by stress equilibrium equations. The unknowns are then calculated by applying the equivalence of stress resultants (i.e., Saint-Venant's principle). As numerical examples, cantilever and simply supported beams are analytically solved. The results obtained are compared with those of the classical beam theories. It is shown that the methodology can be used to improve the predictions without introducing shear correction factors.

1. 서론

1.1 연구배경

보 구조물은 기계, 건축, 항공 등의 현대공학에서 많이 사용되고 있는 부재이다. 보 구조물은 기

본 강성 이외에도 고유진동수 및 좌굴 임계하중 등이 성능에 지대한 영향을 미친다. 보 구조물의 해석은 전통적으로 고전 보 이론(Euler-Bernoulli beam; E-B)에 의해 수행되어 왔으나, 이방성 재료 또는 고주파수 영역해석에는 부적합하다는 것은 잘 알려져 있다. 주된 이유는 전단변형의 고려 여부이다. 따라서 전단변형을 고려한 가장 단순한 형태의 일차전단변형이론(Rankine-Timoshenko beam

† Corresponding Author, junsik.kum@kumoh.ac.kr

© 2016 The Korean Society of Mechanical Engineers

theory; R-T)이 널리 사용되어 왔다. 한편 정확한 전단변형을 고려하기 위해서는 전단수정계수(shear correction factors; SCFs)가 필수적이다.^(1,2) 이 계수들은 공식화 되어 있으나, 응력 분포 및 이방성 재료에 대해서는 적용할 수 없다는 단점이 있다. 이러한 단점을 극복하기 위한 여러 가지 방법론들이 문헌상에 제시되어 왔다.

먼저 고차전단변형이론들이 개발되었는데, 이 이론들은 전단수정계수의 도입 없이 전단변형을 고려할 수 있는 가장 직관적인 방법이라 할 수 있다.^(3,4) 그러나 최종적으로 구조물의 설계/해석에 있어서는 유한요소법을 사용해야 하는데, 이 고차이론들은 자유도를 증가시키기 때문에 전산자원을 상대적으로 많이 요구한다는 단점이 있다. 한편 널리 사용되고 있는 유한요소 프로그램들에 이러한 고차이론들은 아직 적용되지 않고 있다는 문제도 있다. 앞서 언급한 문제점들을 해결하기 위하여 고전이론 또는 일차전단변형이론을 활용하는 방법론들이 제기 되어 왔다.⁽⁵⁻⁷⁾ 이 중에서도 일차전단변형이론이 상용 프로그램에 널리 적용되고 있다는 점에서 많이 연구되어 왔다. 그러나 근본적으로 전단수정계수⁽⁸⁾의 해결이라 문제점을 내포하고 있다. 이에 전단수정계수를 사용하지 않으면서도 전단변형효과를 고려하고 상용프로그램에도 적용할 수 있는 방법론의 필요성이 제기 되었다.

최근에 고전이론과 생브낭의 원리에 기초한 해석기법이 평판의 응력해석을 위하여 개발되었다.^(7,9) 이 방법은 고전 보 이론의 해를 생브낭의 원리를 이용하여 후처리함으로써 간단한 계산만으로 정확도를 높일 수 있다는 것이다. 본 연구에서는 응력해석 개선을 위해 개발된 방법론을 진동 및 좌굴 해석에도 적용할 수 있게 확장하고자 한다. 이를 위하여 먼저 방법론의 근간이 되는 생브낭의 원리를 소개한다. 이어서 고전 보 이론에 기초한 진동 및 좌굴 방정식을 이용하여 전단변형을 고려하는 워핑함수와 보의 평형을 위한 섭동항을 도입하는 과정을 보여주고자 한다. 마지막으로 수치예제를 통해 본 연구에서 제안된 방법론이 일차전단변형이론의 해와 같은 결과를 보임으로써 전단수정계수의 도입이 필요 없는 효과적인 방법론임을 보인다.

1.2 생브낭의 원리

생브낭의 원리^(10,11)의 정의는 “정적 등가 하중이 작용하는 시스템에서 최대치수 이상 떨어진 점의 응력상태는 동일하다.”이며, 원통형과 같은 1 차원 보 구조물에 대해 적용되었다. 여기서, 응력상태란

응력분포가 아니라 서로 다른 응력분포가 생성하는 합응력(축력, 모멘트합력)들을 의미한다. 생브낭의 원리에 따르면 동일한 시스템에 대해 반드시 만족해야 하는 것은 합응력들이 서로 같아야 한다는 것이다. 이를 식으로 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_{-b/2}^{b/2} \sigma_{11} dz = \int_{-b/2}^{b/2} \tilde{\sigma}_{11} dz \quad (1)$$

$$\int_{-b/2}^{b/2} \sigma_{11} z dz = \int_{-b/2}^{b/2} \tilde{\sigma}_{11} z dz$$

본 논문에서는 개선 전후의 합응력은 동일하다는 생브낭의 원리를 이용하여 고전 보 이론(E-B)의 변위를 후처리함으로써 변위섭동항을 계산하고 자유진동 해석에서의 고유진동수, 좌굴하중 예측에 대한 결과를 정확한 전단수정계수를 가지는 일차전단변형이론의 해와 비교하고 그 정확도를 확인하였다.

2. 정식화

이 장에서는 각각의 보 이론을 가상일의 원리에 적용하여 자유진동식과 좌굴하중식을 유도하고, 생브낭의 원리를 이용하여 변위섭동항을 계산하는 과정을 소개한다. 2.1 절과 2.2 절에서는 각각 고전이론과 일차전단변형이론을 유도하고, 2.3 절에서는 고전이론의 해를 개선하는 방법론에 대해 기술한다.

2.1 고전 보 이론

고전 보 이론(E-B)의 변위장은 다음과 같이 주어진다.

$$u_1(x, z) = v_1(x) - zv_{3,1}(x) \quad (2)$$

$$u_3(x) = v_3(x)$$

자중을 무시하고 외력을 고려한 동적 가상일의 원리는 다음과 같다.

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV + \int_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV = \langle P_i \delta u_i \rangle \quad (3)$$

여기서 $\langle \cdot \rangle$ 는 보 단면에 대한 적분을 나타낸다.

식 (2)의 변위장을 사용하면, von-Karman 형태의 기하 비선형을 고려한 변형률은 다음과 같이 주어진다.

$$\epsilon_{11} = v_1' - zv_3'' + \frac{1}{2}(v_3')^2 \quad (4)$$

$$\gamma_{13} = 0$$

식 (2)와 (4)를 식 (3)에 대입하고 각각의 변수에 대해 변분을 취하면 다음과 같이 자유진동식, 좌굴하중식이 계산된다.

$$\omega_{EB}^2 = \frac{\int_0^l EI(v_3'')^2 dx}{\int_0^l \rho A(v_3)^2 dx} \quad (5)$$

$$P_{EB} = \frac{EIv_3^{(4)}}{v_3''} \quad (6)$$

여기서 EI 는 굽힘 강성을, A 는 보의 단면적을 그리고 l 은 보의 길이를 각각 나타낸다. 식 (5)의 자유진동식의 경우 식 (4)에서 비선형항을 제외하고, 회전관성의 영향을 무시하여 계산된다.

2.2 티모센코 보 이론

이 절에서는 고전이론의 정확성 비교를 위하여 대표적인 일차전단변형이론인 티모센코 보 이론 (R-T)의 해를 구하고자 한다. 이 이론의 변위장은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} u_1(x, z) &= v_1(x) + z\theta(x) \\ u_3(x) &= v_3(x) \end{aligned} \quad (7)$$

식 (7)의 변위장으로부터 기하비선형성을 포함하는 변형률은 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= v_1' + z\theta' + \frac{1}{2}(v_3')^2 \\ \gamma_{13} &= \theta + v_3' \end{aligned} \quad (8)$$

식 (8)을 식 (3)의 가상일의 원리에 대입하고 정리하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\omega_{RT}^2 = \frac{\int_0^l EI(\theta')^2 dx + \int_0^l k_s GA(\theta + v_3')^2 dx}{\int_0^l \rho A(v_3)^2 dx} \quad (9)$$

$$P_{RT} = -\frac{EI\theta'''}{v_3''} \quad (10)$$

여기서 G 는 전단 강성을, 그리고 k_s 는 전단수정 계수를 나타낸다. 진동수를 나타내는 식 (9)는 식 (5)에서 적용한 조건들을 적용하였다.

2.3 고전 보 이론의 개선

고전 보 이론의 해를 개선을 위해서는 먼저 횡방향 전단응력을 계산하여야 한다. 이 응력은 응

력 평형방정식을 두께 방향으로 적분함으로써 얻을 수 있다. 그러면 횡방향 전단응력 σ_{13} 은 다음과 같이 계산된다.

$$\sigma_{13} = \frac{1}{2}Ev_3''' \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \quad (11)$$

한편 횡방향 변위장 u_3 는 고전 보 이론과는 다르기 때문에 이를 고려하여 미지의 항인 면외 변위 섭동항 w_3 를 포함하도록 가정한다.

$$\tilde{u}_3(x) = v_3(x) + w_3(x) \quad (12)$$

식 (11)과 (12)를 아래의 전단응력 구성방정식에 대입하고 두께방향으로 적분함으로써 개선된 면내 변위장 \tilde{u}_1 를 계산할 수 있다.

$$\sigma_{13} = G(\tilde{u}_{1,3} + \tilde{u}_{3,1}) \quad (13)$$

계산된 면내 변위장은 다음과 같다.

$$\tilde{u}_1 = v_1 - (v_3' + w_3')z + \frac{E}{2G}v_3''' \left(\frac{1}{3}z^3 - \frac{h^2}{4}z \right) \quad (14)$$

식 (12)와 식 (14)에 주어진 개선된 변위장을 식 (3)의 가상일의 원리에 대입하고, 회전관성의 영향을 무시하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} &\int_V \rho \ddot{u}_3^{IE}(v, w) \delta u_3^{IE}(v, w) dV \\ &+ \int_V \sigma^{IE}(v, w) \delta \varepsilon^{IE}(v, w) dV \\ &+ \int_V \tau^{IE}(w) \delta \gamma^{IE}(w) dV - P_1 \delta v_1(l) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 상첨자 IE 는 개선된 변위장에 의한 변위, 변형률 그리고 응력을 가리킨다.

식 (15)의 변분식을 각각의 변수 v, w 로 분리하여 계산할 수 있으며, 밀줄 친 부분에서 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\int_0^l M(v, w) \delta w_3'' dx \quad (16)$$

식 (16)에 나타나는 모멘트 $M(v, w)$ 는 생브낭의 원리에 의해 M^{EB} 와 같아야 하며, 이를 통해 미지의 변위 섭동항 (w_3)을 계산할 수 있다. 최종적으로 면외 섭동항은 다음과 같이 얻어진다.

$$w_3 = -\frac{h^2 E}{10 G} v_3'' + c_1 x + c_2 \quad (17)$$

여기서 변위섭동항 w_3 의 적분상수 c_1, c_2 는 보의 경계조건을 적용함으로써 계산할 수 있다.

개선된 변위장에 기초한 자유 진동식은 식 (15)로부터 계산되며 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\omega_{IE}^2 = \frac{\int_0^l EI(v_3'')^2 dx}{\int_0^l \rho A v_3(v_3 + w_3) dx} \quad (18)$$

식 (18)로부터 개선된 진동수는 고전이론과 비교하여 전단변형에 의한 추가 처짐에 의해서만 변화함을 알 수 있다. 이는 진동수의 변화의 주 원인이 변형에너지가 아니라 운동에너지에 있음을 보여준다.

좌굴 문제에 대한 정식화도 자유진동 정식화와 유사하게 식 (15)로부터 계산된다. 정리하면 다음과 같다.

$$\int_V \sigma_{11} \delta v_1' dV - P_1 \delta v_1(l) = 0 \quad (19)$$

$$P_{IE} = \frac{EI v_3^{(4)}}{v_3'' + w_3''} \quad (20)$$

식 (19)에서 $N = P_1 = P_{IE}$ 라는 조건을 얻을 수 있으며, 이는 적용된 이론과 관계없이 물리적으로 가해진 힘은 동일해야 하기 때문이다. 식 (19)의 결과를 적용하면 좌굴 하중식을 식 (20)과 같이 얻을 수 있다. 한편 진동식 (18)과는 다르게 좌굴 하중식 (20)은 보의 변형에너지가 (즉, 전단변형에 의한 추가 곡률) 좌굴 하중 변화의 주된 이유임을 보여준다.

식 (18)과 식 (20)으로부터 전단변형에 의한 추가 변형은 진동수 및 좌굴하중을 고전 보 이론과 비교할 때 더 낮은 값으로 나타남을 명확하게 보여주고 있다. 이는 생브낭의 원리에 의해 추가 처짐이 (즉, 섭동항) 모멘트에 영향을 주지 않기 때문이다. 다음 장에서는 이 절에서 관찰된 주요 결과들을 수치예제를 통해 보여주고자 한다.

3. 수치예제

이 장에서는 다양한 경계조건을 가지는 보 문제에 대해 본 논문에서 유도된 새로운 식들을 이용하여 진동수 및 좌굴하중을 계산한다. 얻어진 결과들의 정확성 검증을 위하여 일차전단변형 이론의 해와 비교한다. 먼저 3.1절과 3.2절에서는 외팔

보, 단순지지보에 대한 자유진동을 해석하고, 3.3절과 3.4절에서는 같은 경계조건에 대한 선형 좌굴 문제를 해석하고자 한다.

3.1 외팔보의 자유진동해석

외팔보 문제의 경우 고전 보 이론의 엄밀해가 잘 알려져 있으므로 첫 번째 고유 모드함수를 적용하여 해석하였다.

$$v_3 = \cosh(\lambda x/l) - \cos(\lambda x/l) - \psi \left\{ \sinh(\lambda x/l) - \sin(\lambda x/l) \right\} \quad (21)$$

여기서 $\lambda = 1.87510407$, $\psi = 0.734095514$ 이다. 고전 보 이론의 해는 식 (21)을 식 (5)에 대입하고 적분함으로써 계산 할 수 있다.

한편 개선된 변위장을 이용한 주파수 개선은 섭동항을 계산해야 한다. 섭동항의 식은 식 (17)에 주어져 있으며, 적분상수들을 결정하여 완성할 수 있다. 외팔보의 경우 섭동항은 고정단의 경계조건으로 결정할 수 있으며, 이 경우에는 고전적인 경계조건이 아닌 점근적으로 정확한 경계조건을 적용해야 하는 것으로 문헌에 보고되어 있다.^(7,9) 이 조건은 평균변위가 고정단에서 0이라는 것으로 주어지며 다음과 같다.

$$\int_{-l/2}^{l/2} u_3(0, z) dz = \int_{-l/2}^{l/2} z u_1(0, z) dz = 0 \quad (22)$$

상기 평균변위 조건을 적용하여 식 (17)에서 나타나는 섭동항의 적분상수들을 다음과 같이 결정할 수 있다.

$$c_1 = -\frac{1.249 \times 10^{-16} Eh^2}{Gl^3} \quad (23)$$

$$c_2 = \frac{0.703203 Eh^2}{Gl^3}$$

이제 식 (23)의 결과들을 진동수 방정식 (18)에 대입하면 개선된 주파수를 얻는다.

일차전단 변형이론의 경우 고전 보 이론과는 다르게 엄밀해가 복잡함으로 평형방정식과 경계조건을 만족하는 근사함수를 사용하였다. 이 근사해는 다음과 같이 주어진다.

$$\theta(x) = Cx - \frac{C}{l}x^2 + \frac{C}{3l^2}x^3$$

$$v_3^{RT}(x) = \left(\frac{EI}{k_s GA} \right)^2 \theta' - \int_0^x \theta dx - C \left(\frac{EI}{k_s GA} \right)^2 \quad (24)$$

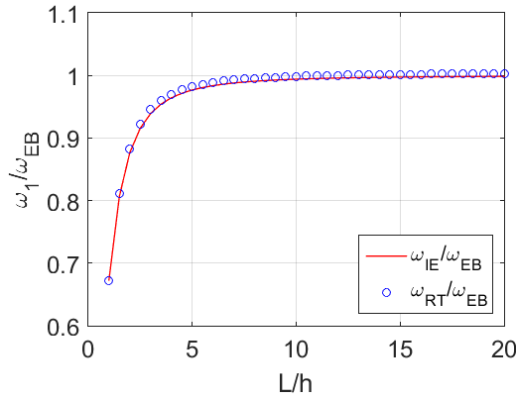


Fig. 1 The normalized first natural frequency of a cantilever beam

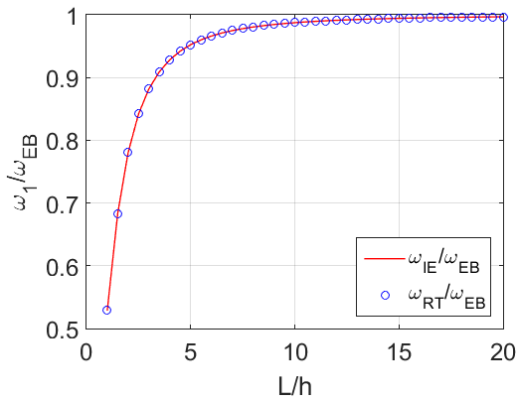


Fig. 2 The normalized first natural frequency of a simply-supported beam

여기서 상수 C 는 근사함수의 크기를 나타낸다. 수치비교를 위하여 등방성 재질을 가정하였으며, 앞서 계산된 개선된 주파수 및 티모셴코 보 이론의 해를 고전 보 이론의 해로 무차원화하여 보의 길이/두께 비의 함수로 Fig. 1에 도시하였다. 등방성 재질의 경우 전단수정계수(k_s)는 사각단면에 대해 정확하다고 알려진 5/6을 적용하였다. 그림에서 보듯이 본 논문에서 제안된 방법이 정확한 전단수정계수를 가지는 티모셴코 보의 이론해와 잘 일치함을 알 수 있다. 약간의 오차는 티모셴코 보의 해석해를 구함에 있어 근사해를 적용한 것에 기인하여, 이는 다음 3.2절의 단순지지보 예제에서는 정확하게 일치하는 것으로 확인할 수 있다.

3.2 단순지지보의 자유진동해석

단순 지지보의 평형방정식과 경계조건을 만족하는 고유 모드함수는 잘 알려져 있으며 다음과 같이 주어진다.

$$v_3 = A \sin(\pi x / l) \tag{25}$$

식 (25)를 식 (5)에 대입하여 고전 보 이론의 해석해를 얻는다. 이 해석해는 3.1절에서 기술한 것처럼 섭동항식 (17)을 통해 개선할 수 있으며, 단순지지보의 경계조건인 양단의 모멘트와 처짐이 0이라는 조건을 적용하여 섭동변위를 계산한다. 식 (18)을 이용하면 개선된 주파수를 계산할 수 있다. 티모셴코 보 이론의 경우, 처짐은 식 (25)와 같으며 회전각 변위는 코사인 함수를 적용하여 다음과 같이 얻어진다.

$$\omega_{RT}^2 = \frac{\omega_{EB}^2}{1 + \left(\frac{EI \pi}{k_s GA l} \right)^2} \tag{26}$$

단순지지 보에 대한 주파수를 보의 길이/두께 비의 함수로 Fig. 2에 도시하였으며, 물성치 및 무차원화는 3.1절에서 기술한 바와 동일하다. 그림에서 보듯이 개선된 해가 정확한 전단수정계수를 가지는 티모셴코 보 이론의 해와 정확하게 일치함을 알 수 있다.

Fig. 1과 Fig. 2로부터 보의 주파수를 전단수정계수의 도입 없이 고전 보 이론의 해를 후처리함으로써 (즉 섭동항의 계산만을 통해 개선) 주파수를 개선할 수 있음을 알 수 있다. 정확한 전단수정계수를 계산할 수 없을 경우 본 논문에서 제안한 방법이 대안이 될 수 있음을 보여준다.

3.3 외팔보의 좌굴해석

좌굴 해석을 위해 먼저 외팔보 경계조건을 고려하였으며, Fig. 3에 보이는 것처럼 길이가 l 인 보의 자유단에 압축력 P 를 문제를 고려하였다. 좌굴문제 해석을 위하여 고전 보 이론의 평형방정식과 경계조건을 만족하는 근사함수를 다음과 같이 가정하였다.

$$v_3 = A(1 - \cos \frac{\pi x}{2l}) \tag{27}$$

상기 식을 식 (6)에 대입하면 고전 보 이론에 의한 좌굴하중을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$P_{EB} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} \tag{28}$$

티모셴코 보 이론의 경우 진동문제에서 사용한

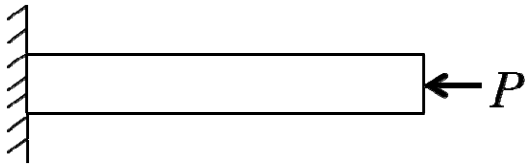


Fig. 3 Cantilever beam subjected to compressive load at the end

식 (24)의 처짐과 회전각 변수들을 그대로 적용하였다. 식 (24)를 식 (10)에 대입하면 다음과 같이 좌굴하중을 계산할 수 있다.

$$P_{RT} = \frac{P_{EB}}{\left(1 + \frac{EI}{k_s GA} \frac{\pi^2}{4l^2}\right)} \quad (29)$$

개선된 좌굴하중은 식 (17)의 섭동항을 식 (22)의 평균변위 경계조건을 적용하여 계산하고, 개선된 좌굴 하중식 (20)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$P_{IE} = \frac{P_{EB}}{\left(1 + \frac{6}{5} \frac{EI}{GA} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2\right)} \quad (30)$$

위의 식 계산에 있어 섭동항의 적분상수들은 모드 함수 계산에만 필요하다. 만약 해석자가 좌굴하중에만 관심이 있다면 섭동항의 이차 미분만이 필요하기 때문에 이 상수들을 계산할 필요가 없다. 즉, 경계조건을 적용을 필요로 하지 않는다. 이는 매우 중요한데 모멘트 등가(즉, 생브낭의 원리)의 원리만을 사용하여 복잡한 경계조건을 적용 없이 좌굴하중을 계산할 수 있기 때문이다. 식 (30)의 계산을 위해서는 아래와 같은 간단한 식을 사용할 수 있다.

$$w_3'' = -\frac{h^2}{10} \frac{E}{G} v_3^{(4)} \quad (31)$$

티모셴코 보 이론에 의한 좌굴하중(29)과 개선된 좌굴하중(30)을 고전 보 이론의 좌굴하중(28)으로 무차원화한 값을 보의 길이/두께비의 함수로 Fig. 4에 도시하였다. 티모셴코 보의 경우 전단수정계수는 5/6을 적용하였으며, 3.1절의 외팔보 진동문제와 마찬가지로 개선된 좌굴하중과 잘 일치함을 알 수 있다.

3.4 단순지지보의 좌굴해석

좌굴문제에 대한 경계조건의 영향을 조사하기 위하여 이 절에서는 단순지지 경계조건을 고려하였다. 보의 형상, 경계조건 그리고 변위함수는 3.2절에

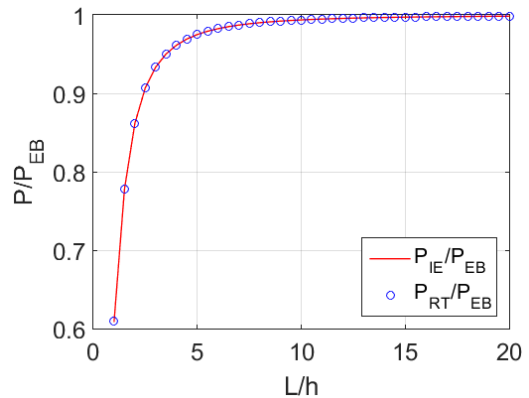


Fig. 4 The first buckling load of a cantilever beam

기술된 자유진동문제와 같다. 반복되는 과정을 피하기 위하여 결과만을 간략히 정리하고자 한다.

티모셴코 보 이론의 경우 변위함수는 식 (25)를 사용하고 회전각 변위는 코사인 함수를 가정한 다음, 식 (10)에 대입하고 정리하면 다음과 같이 좌굴하중을 계산할 수 있다.

$$\frac{P_{RT}}{P_{EB}} = \frac{1}{1 + \frac{EI}{k_s GA} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2} \quad (32)$$

단순지지 보에 대한 개선된 좌굴하중은 섭동항식 (17)에 3.2절에서 기술한 단순지지 경계조건을 적용하면 진동문제에서와 같은 섭동변위를 얻는다. 이때 좌굴하중만의 계산을 위해서는 3.3절에 기술된 것처럼 경계조건이 필요없는 식 (31)을 적용할 수 있다. 얻어진 결과들을 좌굴하중 식 (20)에 적용하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\frac{P_{IE}}{P_{EB}} = \frac{1}{1 + \frac{6}{5} \frac{EI}{GA} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2} \quad (33)$$

외팔보 예제의 경우와 마찬가지로 사각단면에 대한 전단수정계수 5/6 을 티모셴코 보 이론에 적용하면 식 (32)와 식 (33)의 두 결과가 정확히 일치함을 알 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 생브낭의 원리를 이용한 응력 개선 방법을 자유진동 및 좌굴해석에 적용함으로써 해석결과의 정확도를 높일 수 있는 방법을 소개하였다. 고전 보 이론에서는 무시되었던 전단변형효과가 변위 섭동항을 고려함으로써 보정되었으며, 정확한 전단 수정계수를 가지는 티모셴코 보 이론

의 결과와 아주 잘 일치하는 결과를 얻을 수 있었다. 이러한 결과는 전단수정계수를 미리 계산하기 어려운 복합재료 구조물이나 복잡한 단면 형상을 가지는 구조물의 자유진동 및 좌굴 해석에 있어 티모셴코 보 이론보다 효과적일 것으로 예상된다. 한편 본 방법론은 전단수정계수를 구하는 새로운 도구로도 사용될 수 있다.

본 논문에서 소개한 방법론은 고전 보 이론뿐만 아니라 다른 이론들에도 적용될 수 있다. 이는 후 처리를 통해서 사용된 이론의 정확도를 개선할 수 있음을 의미한다. 실제적인 적용을 위해서는 상용 CAE 소프트웨어에 응용하는 것이 필요하며 추후 연구에서 다루어질 예정이다.

후 기

본 연구는 금오공과대학교 학술연구비에 의하여 연구된 논문입니다.

참고문헌

(References)

- (1) Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., 1951, *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, New York.
- (2) Dym, C. L. and Shames, I. H., 1982, *Solid Mechanics : A Variational Approach*, McGraw-Hill, New York.
- (3) Cho M. and Parmerter, R. R., 1992, "An Efficient Higher Order Plate Theory for Laminated Composites," *Compos. Struct.* Vol. 20, pp.113~123.
- (4) Cho, M., 1994, "Review on Higher Order Laminated Composite Plate Modelings," *Trans. Korean Soc. Mech. Eng.*, Vol. 34, No. 7, pp. 517~526.
- (5) Cho M. and Kim, J.-S., 1996, "Four-noded Finite Element Post-process Method Using a Displacement Field of Higher Order Laminated Composite Plate Theory," *Comput. Struct.*, Vol. 61, No. 2, pp. 283~290.
- (6) Kim J.-S. and Cho, M., 2005, "Enhanced First-order Shear Deformation Theory for Laminated and Sandwich Plates," *J. Appl. Mech-T ASME*, Vol. 72, pp. 809~817.
- (7) Kim, J.-S. and Cho, M., 2011, "A Novel Methodology of Improving Stress Prediction via Saint-Venant's Principle," *J. Comput. Struct. Eng. Inst. Korea*, Vol. 24, No. 2, pp. 149~156.
- (8) Gruttmann, F. and Wagner, W., 2001, "Shear Correction Factors in Timoshenko's Beam Theory for Arbitrary Shaped Cross-sections," *Comput. Mech.*, Vol. 27, p.199~207.
- (9) Kim, J.-S., 2012, "Application of Saint-Venant's Principle to Anisotropic Beam," *Trans. Korean Soc. Mech. Eng. A*, Vol. 36, No. 4, pp. 451~455.
- (10) von Mises, R., 1945, "On Saint Venant's Principle," *Bull. Am. Math. Soc.*, Vol. 51, pp.555~562.
- (11) Fung, Y. C., 1965, *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, pp.304~309.